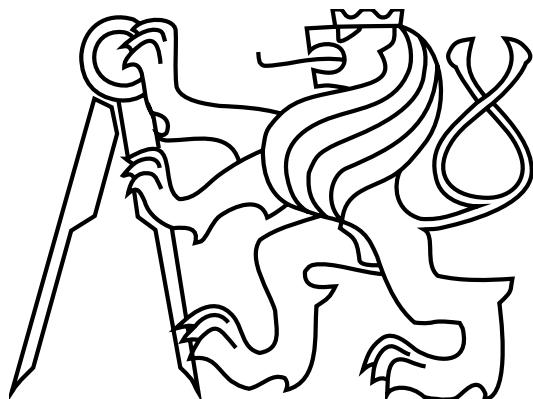


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Numerické algoritmy pro MPC s  
proměnnými parametry

Příbram, 2008

Autor: Karel Spálenka





## **Poděkování**

Děkuji především Ing. Jaroslavu Pekařovi, Ph.D. za trpělivost a množství rad, poskytnutých během častých konzultací. Dále děkuji prof. Ing. Vladimíru Havlenovi, CSc. za komentáře a korekce k této práci. Velký dík patří také rodičům a přátelům za vytvoření příznivého prostředí pro studium.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady ( literaturu, projekty, SW atd.) uveden v přiloženém seznamu.

V Praze dne 21.5.2008

Gralata

podpis



# Abstrakt

Optimální řízení nelineárních systémů pomocí plně nelineárního prediktivního regulátoru představuje velmi náročnou proceduru, jak z hlediska složitosti návrhu, tak z pohledu výpočetní náročnosti určení vhodného akčního zásahu. V této diplomové práci představíme základní myšlenku řízení soustav s proměnnými parametry, který je založený na approximaci citlivostních funkcí. Díky tomuto přístupu je možné výrazným způsobem omezit množství nutných výpočtů, čímž dochází k rozšíření pole působnosti tohoto regulátoru na množství relativně rychlých procesů.

**Klíčová slova:** Prediktivní regulátor, MPC, nelineární regulace, citlivostní funkce, LPV.

# Abstract

Optimal control of nonlinear systems with fully nonlinear predictive controller is very difficult task - both from complexity in design and from computation time needed to obtain optimal control signal. In this diploma thesis we introduce basic idea of control for systems with varying parameters which is based on approximation of sensitivity functions. Using this concept it is possible to significantly reduce the number of computative tasks which allow use of this controller to number of relatively fast processes.

**Keywords:** Predictive controller, MPC, nonlinear control, sensitivity function, LPV.



České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Karel Spálenka**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný  
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Numerické algoritmy pro MPC s proměnnými parametry**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s obecnou metodou nelineárního MPC založenou na výpočtu citlivostních funkcí.
2. Analyzujte možnosti aproximace výpočtu citlivostních funkcí pro soustavy s proměnnými parametry typu gain-scheduling.
3. Nalezněte a implementujte odvozené numericky efektivnější metody výpočtu.
4. Porovnejte kvalitu řízení a numerickou náročnost výpočtu na konkrétním procesu.

Seznam odborné literatury:

Frank Allgower / Nelinearni MPC, Birkhauser, 2000  
Jaroslav Pekař / disertace Robust model predictive control, Praha, 2005  
Short course on MPC, ETH-Zurich, 2005  
časopisecké publikace

Vedoucí: prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
vedoucí katedry



r.e. M. Šebek  
doc. Ing. Boris Šimák, CSc.  
děkan

V Praze dne 10. 9. 2007



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
1.1	Organizace práce . . . . .	2
1.2	Použitá symbolika . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Stav problematiky</b>	<b>4</b>
2.1	Model dynamického systému . . . . .	4
2.1.1	Linearizace nelineárního systému . . . . .	5
2.2	Kalmanův filtr . . . . .	7
2.3	Lineární prediktivní regulátor (MPC) . . . . .	9
2.3.1	Diskrétní lineární model systému . . . . .	9
2.3.2	Kritérium . . . . .	10
2.3.3	Klouzavý horizont . . . . .	12
2.4	Nelineární prediktivní regulátor (NMPC) s konečným horizontem . .	16
2.4.1	Algoritmy pro nalezení řešení NMPC . . . . .	17
2.4.2	Citlivostní funkce . . . . .	18
2.4.3	Predikční model . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Prediktivní regulátor pro časově proměnné systémy</b>	<b>22</b>
3.1	Linearizace systému podél trajektorie . . . . .	22
3.2	Citlivostní funkce pro linearizovaný systém . . . . .	24
3.3	Prediktivní regulátor pro linearizovaný diskrétní systém . . . . .	25
3.3.1	Nelineární MPC . . . . .	25
3.3.2	Prediktivní regulace LPV systému . . . . .	26
3.3.3	MPC pro LPV . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Ověření metody na modelu přehříváku páry</b>	<b>28</b>
4.1	Syntéza modelu . . . . .	28
4.1.1	Úvod . . . . .	28

4.1.2	Blok Steam Generation a Combustion Process . . . . .	30
4.1.3	Blok Mixer . . . . .	31
4.1.4	Blok Heat Exchanger . . . . .	32
4.2	Řízení modelu . . . . .	34
4.2.1	Poznámky k implementaci . . . . .	34
4.2.2	Vstupy a výstupy . . . . .	39
4.2.3	Identifikace . . . . .	39
4.2.4	Výsledky identifikace . . . . .	40
4.2.5	LPV MPC . . . . .	41
4.2.6	Srovnání numerické náročnosti a kvality řízení . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Obsah přiloženého CD</b>	<b>51</b>

# Seznam obrázků

2.1	Dynamický systém s pozorovatelem stavu . . . . .	10
2.2	Vývoj $\mathbf{u}(k)$ a $\mathbf{y}(k)$ pro různé délky $T_p$ . . . . .	15
2.3	Vývoj $\mathbf{u}(k)$ a $\mathbf{y}(k)$ pro různé $\mathbf{Q}$ . . . . .	15
2.4	Metody <i>direct single shooting</i> a <i>direct multiple shooting</i> . . . . .	18
4.1	Blokové schéma modelu . . . . .	28
4.2	Principiální schema tepelné elektrárny . . . . .	29
4.3	Objemové elementy přehříváku . . . . .	33
4.4	Přestup tepla – teplotní profil . . . . .	34
4.5	Blokové schéma řízené soustavy . . . . .	35
4.6	Frekvenční charakteristiky OL bez $PI$ . . . . .	36
4.7	Odezva CL soustavy bez $PI$ na skok . . . . .	37
4.8	Frekvenční charakteristiky OL s $PI$ . . . . .	38
4.9	Odezva CL soustavy s $PI$ na skok . . . . .	38
4.10	Vstupní signál při identifikaci . . . . .	40
4.11	Shoda odezvy nelineárního a linearizovaného modelu . . . . .	41
4.12	Statické zesílení v kanálu Fuel . . . . .	42
4.13	Statické zesílení v kanálu Steam flow . . . . .	42
4.14	Statické zesílení v kanálu Temperature reference . . . . .	43
4.15	Průběh časové konstanty . . . . .	43
4.16	Odezva linearizovaného systému na jednotkový skok pro různé $\sigma(t)$ .	44
4.17	Odezva systému na rampu v $\sigma(t)$ . . . . .	45
4.18	Odezva systému na skok v kanálu Fuel . . . . .	46
4.19	Odezva systému na skok v kanálu Steam flow . . . . .	47
4.20	Odezva nelineárního systému na rampu pro různé $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ . . . . .	48

# Kapitola 1

## Úvod

Ve světě okolo nás se setkáváme s řadou procesů, které je třeba řídit. Důvody pro to jsou mnohé – ať už zvýšení ekonomické výnosnosti, zvýšení rozsahu použitelnosti, či prostě zajištění podmínek pro provoz, atp. Pro dosažení tohoto cíle jsou systémy, jejichž vlastnosti chceme nějakým požadovaným způsobem měnit, doplněny o další komponenty a vazby, které to definovaným způsobem zajišťují.

Většinu procesů tvoří ty, jejichž vývoj probíhá nelineárně a není možné je přesně popsat lineární diferenciální rovnicí. Jednou z možností, jak řídit takový systém (což je obecně velmi náročné), je vytvořit lineární model pomocí linearizace ve vhodném pracovním bodě, navrhnout řízení pro tento model a to aplikovat na původní nelineární systém. Nevýhodou tohoto přístupu je jeho přibližnost – popis systému získaný linearizací je vhodnou approximací původního jen v blízkém okolí pracovního bodu, které je obecně tím menší, čím je charakter nonlinearity „silnější“.

Procesy, které je možné popsat soustavou lineárních diferenciálních rovnic se nazývají lineární. Pro tyto systémy jsou vyvinuty ověřené metody, jak dosáhnout požadované kvality regulace.

Regulátor, který je možné k regulaci použít a který bude předmětem našeho zájmu, je prediktivní regulátor. Ve srovnání s regulátory navrženými pomocí frekvenčních metod má řadu výhod, ale i jisté nevýhody.

Akční zásah vypočtený pomocí prediktivního regulátoru je optimální vzhledem ke zvolenému kritériu. Nespornou výhodou tohoto regulátoru je možnost přirozeně zakomponovat omezení plynoucí z fyzikální reality použitých prvků (např. konečná rychlosť otevírání ventilů, rozsah hodnot, které mohou signály nabývat, je pouze v určitém rozsahu, atp). Jeho nevýhodou je výpočetní náročnost určení optimálního akčního zásahu. Rozvoj výpočetní techniky však umožňuje překonat tento „handicap“ a rozšiřuje rozsah použitelnosti pro tento typ regulace na rychlejší procesy.

Hlavním cílem této práce, je seznámit čtenáře se základy řízení systémů proměnných v čase pomocí prediktivní regulace. Tento přístup přináší možnost regulovat relativně rychlé nelineární systémy (ty, které je možné approximovat LPV systémem) na základě prediktivní regulace lineárního modelu. V textu je ukázáno, jak je možné modely parametrisovat podél trajektorie a řídit je pomocí lineárního prediktivního řízení, přičemž je s pomocí citlivostních funkcí ukázána souvislost s regulací pomocí plně nelineárního systému.

## 1.1 Organizace práce

V kapitole 2 je ve stručnosti shrnuta problematika linearizace systémů, prediktivní strategie pro řízení na konečném horizontu s omezeními pro lineární i nelineární popis systémů v diskrétní oblasti. Pro účely poslední kapitoly je zde představen koncept rozšířeného pozorovatele stavu. V závěru jsou uvedeny odvození vztahů pro výpočet citlivostních funkcí nelineárního systému, potřebné pro kapitolu 3.

Ve třetí kapitole čtenáře seznámíme s teoretickými závěry plynoucími z kapitoly předchozí a navrhneme jejich použití ve spojení se soustavami s proměnnými parametry. Ukážeme souvislost mezi nelineární prediktivní regulací nelineárního systému a lineární prediktivní regulací modelu tohoto systému.

V kapitole 4 jsou výše uvedené poznatky aplikovány na model reálného procesu a je zde ověřena jejich platnost. Tímto procesem je nelineární model přehříváku tepelné elektrárny, jehož parametry se mění v závislosti na výkonové hladině elektrárny.

## 1.2 Použitá symbolika

V textu je použito následující značení

<b>A,B</b>	... matice
<b>x,y</b>	... vektor (sloupcový)
$\alpha, \beta$	... skalár
<b>x*,y*</b>	... optimální hodnota (naznačena hvězdičkou)
<b>I</b>	... jednotková matice
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$	... množina
<b>A &gt; 0</b>	... „A je pozitivně definitní“
<b>A ≥ 0</b>	... „A je pozitivně semidefinitní“
LPV	... Linear Parameter Varying
MPC	... Model Predictive Control
NMPC	... Nonlinear Model Predictive Control
QP	... Quadratic Programming
SQP	... Sequential Quadratic Programming

# Kapitola 2

## Stav problematiky

Při řízení pomocí prediktivní regulace je předpokladem úspěchu kvalitní model řízeného systému. Při jeho tvorbě se často setkáme s tím, že prakticky každý reálný proces obsahuje nějakou nelinearitu a je tedy třeba se s touto skutečností vyrovnat. Jednou z možností, jak to provést – tou nejjednodušší – je nelinearitu zanedbat. To je však možné jen tam, kde i tento redukovaný popis bude dostatečně přesný, a často může mít toto zanedbání závažné důsledky. V obecném případě je tedy tato možnost nepoužitelná.

Jinou metodou, jak nelinearitu odstranit, je ve zvoleném pracovním bodě systém linearizovat a s výslednou approximací dále pracovat. Jak bylo zmíněno v úvodu, je nedostatkem tohoto přístupu jeho omezený rozsah platnosti a z toho plynoucí nižší kvalita regulace (v krajním případě i ztráta stability) mimo tento rozsah.

Další možností je uvažovat plně nelineární model systému. V tomto případě je pro řízení třeba použít odpovídající regulátor, jehož návrh je spojen s řadou komplikací, které přináší nelineární přístup.

### 2.1 Model dynamického systému

Předpokládáme, že řízený dynamický systém může být popsán soustavou obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^{n_x}$  je vektor stavu,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^{n_u}$  vektor vstupů,  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^{n_y}$  vektor výstupů a  $\mathbf{x}_0$  počáteční podmínka systému.

Dále předpokládáme, že existují omezení na stav  $\mathbf{x}(t)$ , vstupní signály  $\mathbf{u}(t)$  a výstupní signály  $\mathbf{y}(t)$  pro čas  $t \geq 0$

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y}, \quad (2.3c)$$

$$(2.3d)$$

kde  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{Y}$  jsou množiny přípustných hodnot stavu, vstupu a výstupu.

### 2.1.1 Linearizace nelineárního systému

Pokud je soustava rovnic (2.1a) nelineární, můžeme pomocí Taylorova rozvoje provést její approximaci ve zvoleném rovnovážném bodě  $(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))$ , ve kterém platí

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t)) = 0, \quad (2.4)$$

následujícím způsobem. Předpokládejme, že při přírůstku  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{eq}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$  se stav systému změní na  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{eq}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$ , kde  $\Delta\mathbf{u}(t)$  a  $\Delta\mathbf{x}(t)$  značí infinitezimálně malé změny vstupního signálu a stavu. Pak platí

$$\dot{\mathbf{x}}_{eq}(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{eq}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)).$$

Funkci na pravé straně rovnice můžeme rozvinout do Taylorovi řady. Zanedbáme-li členy řádu dvě a vyššího, pak předchozí rovnice přejde při uvažování rovnosti (2.4) do tvaru

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{u}(t)} \Delta\mathbf{u}(t).$$

Ta společně s počáteční podmínkou  $\Delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_{eq}(t_0)$  popisuje, jak se v čase vyvíjí odchylka stavu systému od rovnovážného bodu.

Výstup systému je popsán rovnicí (2.1b). Je-li tato rovnice nelineární, provedeme její linearizaci obdobně jako v předchozím případě. Tento postup pak vede k popisu

$$\mathbf{y}_{eq}(t) + \Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t)) + \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{u}(t)} \Delta\mathbf{u}(t)$$

a pro přírůstek výstupu

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{x}(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial\mathbf{u}(t)} \Delta\mathbf{u}(t).$$

V daném rovnovážném bodě pak tedy můžeme maticově vyjádřit rovnice linearizovaného systému (v přírůstcích stavu a vstupního signálu) takto

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t),$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}(t).$$

Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  jsou Jakobiány pro které platí

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_{n_x}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{n_x}}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_{n_x}}{\partial \mathbf{x}_{n_x}} \end{bmatrix} |_{(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{u}_{n_u}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_{n_x}}{\partial \mathbf{u}_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_{n_x}}{\partial \mathbf{u}_{n_u}} \end{bmatrix} |_{(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))},$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_{n_x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{n_x}}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_{n_x}}{\partial \mathbf{x}_{n_x}} \end{bmatrix} |_{(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))},$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{u}_{n_u}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{u}_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_{n_x}}{\partial \mathbf{u}_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \mathbf{g}_{n_x}}{\partial \mathbf{u}_{n_u}} \end{bmatrix} |_{(\mathbf{x}_{eq}(t), \mathbf{u}_{eq}(t))}.$$

Detailedly odvození viz např. v [1].

## 2.2 Kalmanův filtr

Pro zjišťování aktuálního stavu lineárního, v čase neproměnného, diskrétního dynamického systému – pokud ten není přímo měřitelný – je možné použít diskrétní Kalmanův filtr. Jedná se o rekurzivní filtr umožňující zjistit hodnotu stavu při zašuměných měřeních. V případě, že výstupní signál určený z odhadu stavu určeného pomocí Kalmanova filtrova asymptoticky nesleduje referenční signál, je možné filtr rozšířit a tím dosáhnout asymptotického sledování konstantního referenčního signálu. Rozšíření spočívá v tom, že se k vektoru stavu systému přidají stavy reprezentující neměřitelnou poruchu, která vzniká díky nepřesnostem v linearizaci nelineárního modelu nebo odlišnosti reálného systému a modelu. Pro lineární diskrétní systém se šumem procesu a měření výstupu ve tvaru (2.5) je pak tvar rozšířeného systému uveden v rovnicích (2.6).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (2.5b)$$

Zde uvedené matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{D}$  jsou linearizované a diskretizované matice systému (2.1) ze sekce 2.1.

V reálné aplikaci je odůvodněné předpokládat, že získané signály budou zatíženy neměřitelnou poruchou  $\mathbf{d}$ . Z tohoto důvodu rozšíříme Kalmanův filtr o stav reprezentující poruchu. Toto rozšíření nám umožní určit její hodnotu a díky tomu dosáhneme přesnějšího odhadu stavu. V dalším textu z předpokládáme přítomnost poruchy na výstupu. (Důvodem je shodné použití při ověření na modelu v kapitole 4, kde předpokládáme působení neměřitelné poruchy na výstupní signál. Obecně je však třeba umístit neměřitelnou poruchu tam, kde skutečně působí, viz [9].) Matice  $\mathbf{A}_d$  je rovna jednotkové matici o velikosti rovnající se počtu stavů poruchy  $d$ , protože poruchové stavy jsou modelovány jako náhodná procházka. (Tím rozumíme takovou posloupnost, kde přírůstky jsou nezávislé a stejně rozložené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. Nejlepším odhadem pro predikci je tedy hodnota předchozí.) Matice  $\mathbf{B}_d$  je rovna nule, předpokládáme-li, že porucha ovlivňuje nikoli stav, ale pouze výstup systému. Z tohoto předpokladu také vyplývá, že délka vektoru  $\mathbf{d}$  je rovna počtu výstupů. Konečně  $\mathbf{C}_d$  je matice jedniček rozměru  $n_y \times n_d$ , kde  $n_y$ ,  $n_d$  je počet výstupů a stavů poruchy<sup>1</sup>. Šumy procesu ( $\mathbf{v}(k)$ ,  $\mathbf{v}_d(k)$ ) a měření

---

<sup>1</sup>Aby bylo možné určit jednotlivé složky vektoru  $\mathbf{d}$ , musí být dvojice  $(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix}, [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_d])$  detekovatelná.

$(\mathbf{e}(k))$  jsou nekorelované, bílé a diskrétní s normálním rozdělením  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{v}_d(k) \end{bmatrix} \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k) \quad (2.6b)$$

Odhad stavu systému probíhá u modifikovaného Kalmanova filtru ve dvou fázích – v datovém a časovém kroku.

V datovém kroku je z dat v čase  $k$  (tj.  $\mathbf{y}(k)$ ), apriorního odhadu podmíněné střední hodnoty stavu v čase  $k$  využívající data do času  $k - 1$ . V časovém kroku jsou hodnoty z minulého odstavce společně s maticemi popisujícími dynamiku systému (viz (2.6)) použity k určení nového apriorního odhadu. Detaily je možno najít například v [5].

**Poznámka:** Tato práce si neklade za cíl provést úplný rozbor dané problematiky, pasáže zde uvedené mají vysvětlit strukturu použitou v případě praktického ověření na modelu, uvedeném v kapitole 4. Detailnější informace o problematice lze nalézt například v [9].

## 2.3 Lineární prediktivní regulátor (MPC) s konečným horizontem

Prediktivní řízení je pokročilá metoda kombinující přímovazební a zpětnovazební přístup k řízení diskrétních systémů, která se v průmyslu rozšiřuje od osmdesátých let. Řízení lineárním prediktivním regulátorem je založeno na iterativním výpočtu budoucího chování modelu systému – odtud také název *Model Predictive Control* (MPC). Tento model, který je lineární, používáme k výpočtu vhodných řídicích signálů. Určení tohoto „vhodného“ signálu je předmětem řešení optimalizační úlohy, kterou řešíme na tzv. časovém horizontu predikce  $T_p$ . Řešení optimalizační úlohy je určováno numericky a je relativně výpočetně náročné. Řízení je tedy použitelné spíše pro pomalejší procesy, kde je perioda vzorkování dostatečně dlouhá, aby bylo možno určit akční zásah ve zlomku periody a ve zbytku ho aplikovat. V rozsahu času  $[t; t + T_p]$  jsou určovány vstupní signály (protože jen ty můžeme přímo ovlivnit) tak, aby bylo minimalizováno kritérium (kritérium má význam ztrátové funkce) definované pro konkrétní problém. Tímto kritériem definujeme své požadavky na chování regulátoru. Například je možné pomocí něj zabránit příliš velkým akčním zásahům, zajistit sledování referenčních signálů, apod. Nespornou výhodou prediktivního regulátoru vůči „klasickým“ metodám řízení (jako řízení regulátory *PID* navrženými pomocí frekvenčních metod), je díky relativní volnosti volby hodnoty vstupního signálu možnost zakomponovat jejich omezení. Díky znalosti dynamického modelu je možno omezení klást i na ostatní signály. Můžeme tedy např. stanovit rozsah v jakém se mohou pohybovat hodnoty zvolených veličin, omezit rychlosť jejich změny, atp. Další výhodou, kterou má regulátor díky predikci do budoucnosti, je, že při známé referenční trajektorii (což obvykle bývá) je regulátor schopen rychleji zareagovat na – pro něj již očekávané – změny a rychleji odregulovat probíhající děj.

Z důvodu relativně snadné řešitelnosti se často používá kritérium kvadratické. Numerickou metodou pro minimalizaci kritéria, které je funkcionálem, je matematické kvadratické programování *QP*. V další části této kapitoly se budeme věnovat *MPC* řízení s tímto kritériem. Poznamenejme, že v celém textu je uvažován stejný horizont predikce a řízení.

### 2.3.1 Diskrétní lineární model systému

Jak bylo uvedeno výše, řízení pomocí lineárního *MPC* probíhá na diskrétním lineárním modelu systému. Ten získáme linearizací a diskretizací modelu uvedeného v

kapitole 2.1. Stavové rovnice takového diskrétního dynamického LTI modelu mohou mít např. tvar

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) \quad (2.7b)$$

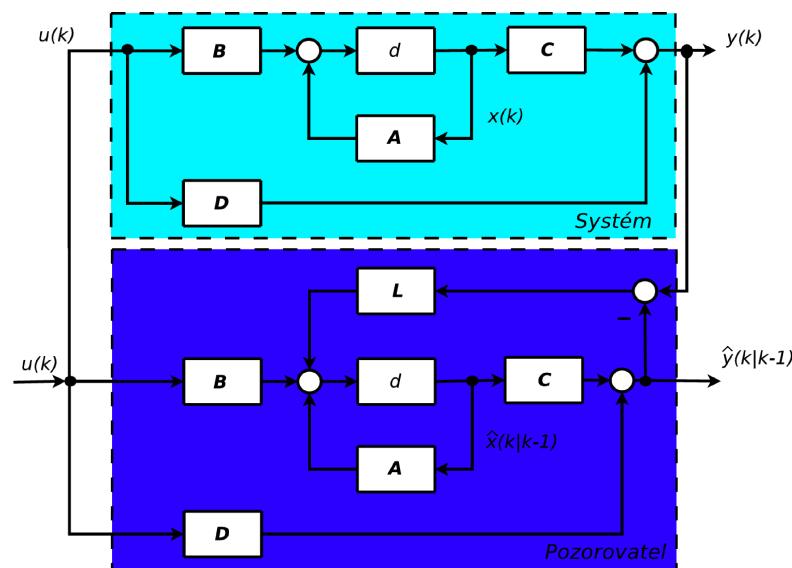
s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0, \quad (2.7c)$$

kde

$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^{n_x}, \mathbf{u}(k) \in \mathcal{R}^{n_u}, \mathbf{y}(k) \in \mathcal{R}^{n_y}.$$

Podmínkou pro realizovatelnost tohoto typu řízení je pozorovatelnost stavu systému. Není-li stav přímo pozorovatelný, použijeme k odhadu stavu systému pozorovatele stavu<sup>2</sup> v zapojení dle obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Dynamický systém s pozorovatelem stavu

### 2.3.2 Kritérium

Jak bylo naznačeno výše, v průběhu řízení pomocí *MPC* je v každé vzorkovací periodě opakovaně řešena úloha nalezení minima kvadratické kriteriální funkce. Metodou, kterou je možné použít pro nalezení minima ztrátové funkce, je matematické

---

<sup>2</sup>Viz kapitola 2.2

kvadratické programování, minimalizující kvadratickou formu

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{w} + \mathbf{c}^T \mathbf{w}, \quad (2.8a)$$

s omezením nerovnostmi

$$\mathbf{A}_{ineq} \mathbf{w} \leq \mathbf{b}_{ineq} \quad (2.8b)$$

a rovnostmi

$$\mathbf{A}_{eq} \mathbf{w} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (2.8c)$$

kde  $\mathbf{H} \succ 0$  je symetrická matice řádu  $n \times n$  a  $\mathbf{c}$  vektor délky  $n$ . Pro konvexní úlohy je nutnou a postačující podmínkou pro globální minimum  $\mathbf{w}^*$  formy  $f(\mathbf{w})$  splnění Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek. Detaily viz např. v [6],[11].

Optimalizační úlohu pak formalizujeme následujícím způsobem

$$\min_{\substack{k+T_p-1 \\ \mathbf{u}_k}} J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}), \quad (2.9)$$

s kritériem, které může mít například tvar

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) &= \sum_{i=k}^{k+T_p-1} ((\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i))^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i)) \\ &\quad + (\Delta \mathbf{u}(i))^T \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{u}(i)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

s tím, že platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i+1) &= \mathbf{Ax}(i) + \mathbf{Bu}(i), \\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{Cx}(i) + \mathbf{Du}(i), \\ \mathbf{x}(i) &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}(i) \in \mathcal{U}, \mathbf{y}(i) \in \mathcal{Y}, \\ \text{kde } \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} &= (\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+T_p-1))^T \\ \text{a } \Delta \mathbf{u}(i) &= \mathbf{u}(i) - \mathbf{u}(i-1). \end{aligned}$$

Predikovanou odezvu systému na horizontu  $T_p$  můžeme zapsat maticově takto

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{Su}_k^{k+T_p-1} = \mathbf{Vx}_0 + \mathbf{Su}_k^{k+T_p-1}, \quad (2.11)$$

s omezeními

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ineq} \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} &\leq \mathbf{b}_{ineq}, \\ \mathbf{A}_{eq} \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} &= \mathbf{b}_{eq}, \\ \mathbf{x}_0 &\in \mathcal{R}^{n_x}, \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} \in \mathcal{R}^{T_p \cdot n_u}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^{T_p \cdot n_y}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+T_p-1) \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{T_p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & & & \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & \\ \mathbf{CAB} & & \mathbf{D} & \\ \vdots & & & \ddots \\ \mathbf{CA}^{T_p-2}\mathbf{B} & \dots & & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

s tím, že  $\tilde{\mathbf{y}}$  je odezva na počáteční stav  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{Su}_k^{k+T_p-1}$  je odezva na řízení na horizontu predikce. Hodnota kritéria je pak

$$J = (\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{Su}_k^{k+T_p-1} - \mathbf{y}_{ref})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{Su}_k^{k+T_p-1} - \mathbf{y}_{ref}) + (\Delta \mathbf{u}_k^{k+T_p-1})^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}, \quad (2.13)$$

kde

$$\Delta \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k^{k+T_p-1} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

a  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  jsou pozitivně semidefinitní symetrické váhové matice vážící výstupní a akční signál na horizontu predikce, ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{k+1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{k+T_p-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{k+1} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{k+T_p-1} \end{bmatrix}$$

**Poznámka:** Konkrétně toto kritérium penalizuje odchylku výstupního signálu od referenční hodnoty a minimalizuje změny akčního zásahu. O výsledné hodnotě posloupnosti akčních signálů  $\mathbf{u}_k^{k+T_p-1}$  rozhodne mimo omezení také to, v jakém „pořadí“ je velikost prvků matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ .

### 2.3.3 Klouzavý horizont

Jak bylo uvedeno výše, výpočet optimálního zásahu je iterativní. Takový přístup je nutný, abychom mohli systém řídit po celou dobu, kdy je řízení požadováno, jinými

slovy, pokud bychom výpočet neopakovali, byla by známa sekvence akčních signálů jen pro horizont predikce. Tím, že posouváme horizont optimalizace a opakujeme výpočet optimálního zásahu tedy dosáhneme řízení na nekonečném horizontu<sup>3</sup>. Tento přístup se v angličtině nazývá *receding horizon*.

Posun, který uskutečňujeme v každém kroku iterace, je pouze o jeden krok, přičemž aplikujeme jen první vypočtenou hodnotu akčního zásahu. To se na první pohled může zdát neefektivní, je-li díky optimalizaci možné získat během jednoho kroku výpočtu  $T_p$  akčních zásahů do budoucna. Důvod, proč ve skutečnosti výpočet opakujeme po každém kroku a jako vstupní signál použijeme pouze první vypočtenou hodnotu, je zřejmý. Výpočet minima se opírá o znalost stavu na počátku optimalizace a pro účely predikce se počítá s tím, že stav na počátku optimalizace je znám přesně a vliv poruch na predikovanou trajektorii je nulový. Tento předpoklad však není v reálné aplikaci splněn a proto se musí výpočet v dalším kroku opakovat, aby došlo k propagaci nové hodnoty stavu, která se vlivem poruch může od predikované hodnoty odlišovat.

## Příklad

Následující příklad ilustruje použití prediktivní regulace na systém druhého řádu – dva integrátory spojené v sérii.

Stavový popis diskretizovaného systému je následující

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jako kritérium optimalizace bylo zvoleno

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} (\mathbf{y}^T(i) \mathbf{Q}_i \mathbf{y}(i) + \mathbf{u}^T(i) \mathbf{R}_i \mathbf{u}(i)) ,$$

---

<sup>3</sup>Nezaměňovat s horizontem predikce – jedná se o „rozsah“ ve kterém provádíme řízení.

s tím, že platí

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(i) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(i), \\ \mathbf{y}(i) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(i), \\ -1 \leq \mathbf{u}(i) &\leq 1,\end{aligned}$$

neboli

$$J = (\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{u}_k^{k+T_p-1})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) + (\mathbf{u}_k^{k+T_p-1})^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k^{k+T_p-1},$$

s omezením

$$-1 \leq \mathbf{u}(k) \leq 1,$$

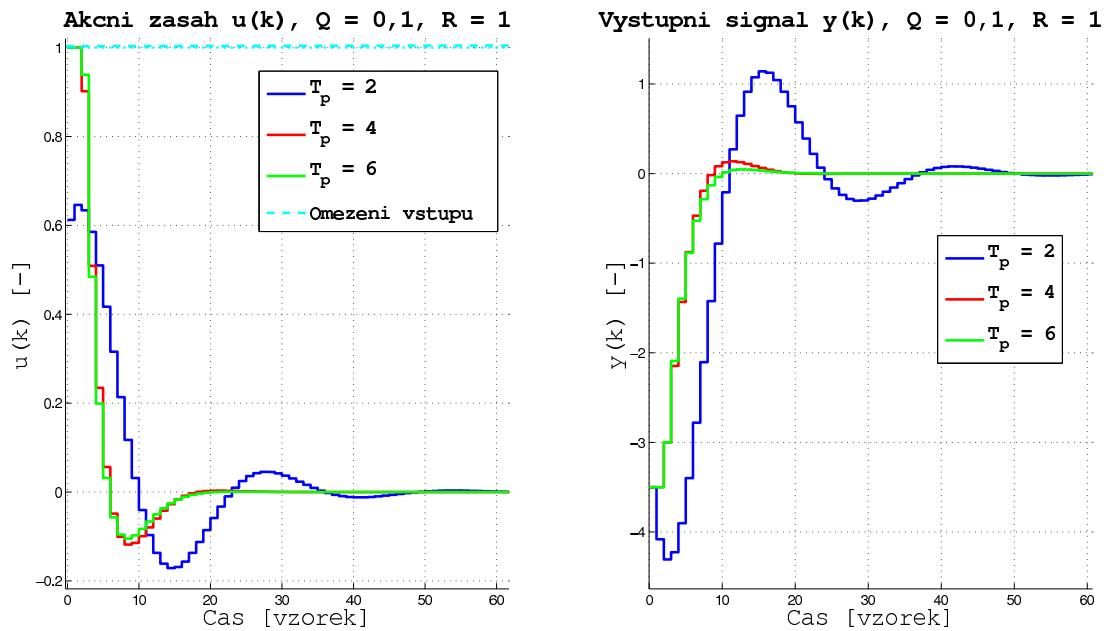
převádějící výstup systému do počátku.

Na obrázku 2.2 je zobrazen akční zásah a výstupní signál pro konstantní hodnotu váhových matic<sup>4</sup> ( $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R} = 1$  a pro délku predikčního horizontu  $T_p = 2$ ,  $T_p = 4$  a  $T_p = 6$ ). Ze zobrazených grafů je vidět, že délka horizontu predikce výrazně ovlivňuje kvalitu regulace. Zatímco v případě nejkratšího horizontu predikce ( $T_p = 2$ ) dochází k ustálení výstupního signálu až za cca 50 sekund, v případě horizontu o délce  $T_p = 6$  je stejněho výsledku dosaženo za přibližně 15 sekund.

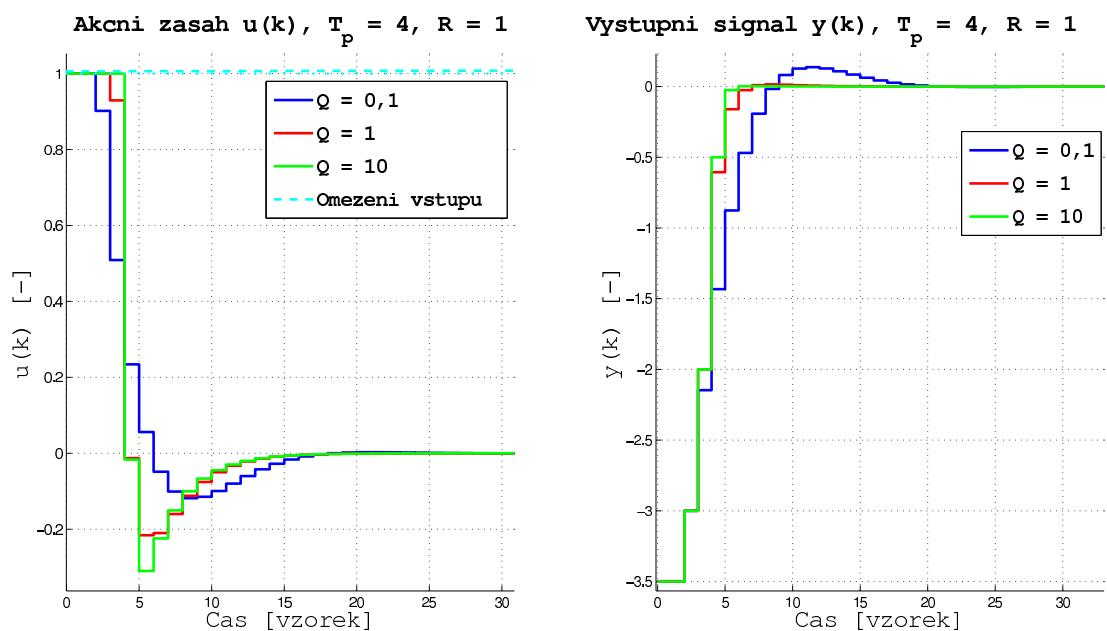
Obrázek 2.3 ilustruje vliv velikosti váhových matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ , při délce horizontu  $T_p = 2$ . Je vidět, že při menší hodnotě prvků  $\mathbf{Q}$  je akční zásah menší – je kladen větší důraz na minimalizaci akční veličiny. Naopak při větší hodnotě prvků  $\mathbf{Q}$  má vyšší prioritu minimalizace odchylky výstupního signálu od požadované hodnoty. Na obou grafech je možné pozorovat, že vstupní signál je v mezích daných omezeními.

---

<sup>4</sup>V obrázcích 2.2, 2.3 jsou z důvodu názornosti uvedeny hodnoty matice  $\mathbf{Q}$  jako skaláry. Ve skutečnosti se však jedná o multiplikativní člen, jímž je násobena jednotková matice příslušného rozměru.



Obrázek 2.2: Vývoj akčního zásahu  $u(k)$  a výstupního signálu  $y(k)$  pro různé délky horizontu predikce  $T_p$



Obrázek 2.3: Vývoj akčního zásahu  $u(k)$  a výstupního signálu  $y(k)$  pro různé váhové matici  $Q$

## 2.4 Nelineární prediktivní regulátor (NMPC) s konečným horizontem

Při řízení systému ve tvaru popsaném soustavou diferenčních rovnic ve tvaru (2.14)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.14c)$$

kde

$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^{n_x}, \mathbf{u}(k) \in \mathcal{R}^{n_u}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^{n_y},$$

s omezeními

$$\mathbf{x}(k) \in \mathcal{X},$$

$$\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U},$$

$$\mathbf{y}(k) \in \mathcal{Y},$$

pomocí prediktivního regulátoru je v každém vzorkovacím okamžiku řešen problém nalezení optimální řídicí posloupnosti na horizontu predikce  $T_p$  pro systém v otevřené smyčce. Toto optimální řízení je aplikováno do okamžiku, než je k dispozici nové měření ze kterého je opět vypočteno nové řešení a cyklus se opakuje. Problém, který tu řešíme můžeme formalizovat takto

$$\min_{\mathbf{u}_k^{k+T_p-1}} J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}), \quad (2.15)$$

Kritérium optimality, podle kterého posuzujeme kvalitu daného řízení může mít například takovýto tvar

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} L(\mathbf{x}(i), \Delta \mathbf{u}(i)),$$

kde  $L$  je ztrátová funkce hodnotící kvalitu řešení, tedy

$$L(\mathbf{x}(i), \Delta \mathbf{u}(i)) = \|\mathbf{x}(i)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(i)\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (2.16)$$

s tím, že

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(i+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)), \\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)), \\ \mathbf{x}(i) &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}(i) \in \mathcal{U}, \mathbf{y}(i) \in \mathcal{Y},\end{aligned}$$

kde matice  $\mathbf{Q} \succeq 0$ ,  $\mathbf{R} \succeq 0$  jsou symetrické matice vážící výstup a vstup systému. Řešením této optimalizace je posloupnost optimálních  $\mathbf{u}_k^{*k+T_p-1}$ , ze kterých se vybírá pouze komponenta pro první vzorkovací okamžik a výpočet se opakuje. Tento proces lze chápat jako uzavření zpětné vazby. Stavová rovnice tohoto systému je

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}^*(k)), \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.17b)$$

**Poznámka:** Iterativnost postupu hledání má stejný zdůvodnění, jako v případě lineárního MPC (viz 2.3.3).

#### 2.4.1 Algoritmy pro nalezení řešení NMPC

Proces nalezení optimálního akčního zásahu u NMPC je nelineární optimalizační úloha, která je, podobně jako v případě MPC u lineárních systémů, řešena v každém okamžiku vzorkování. Mezi metody, které řeší tento problém „online“ patří například *direct single shooting* a *direct multiple shooting*.

Algoritmus *direct single shooting* pracuje tak, že pomocí numerické integrace vypočte predikci vývoje stavu  $\mathbf{x}(k)$  pro celý horizont predikce na základě počátečního stavu  $\mathbf{x}_0$ , s tím, že optimalizuje hodnotu akčního zásahu tak, aby hodnota zvoleného kritéria byla minimální. Hledání minima probíhá pomocí pomocí sekvenčního kvadratického programování (SQP) – postup, při kterém je Lagrangeova funkce  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$  (kde  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$  představuje omezení ve tvaru rovností<sup>5</sup>) approximována kvadratickou formou a za pomoci kvadratického programování je iterativně hledáno její minimum. Aplikován je pouze první krok nalezeného řešení a výpočet probíhá znovu.

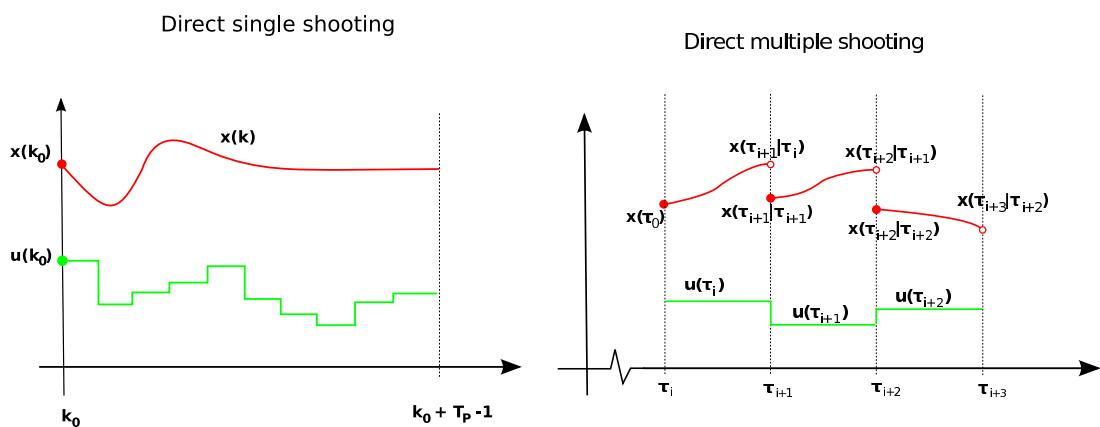
Algoritmus *direct multiple shooting* se od předchozího liší tím, že horizont je rozdelen na  $N$  intervalů, tj.  $[\tau_i; \tau_{i+1}]$ , kde  $i = 0, 1, \dots, T_p$ . Na každém z těchto intervalů je prováděna predikce stavové trajektorie odděleně (přičemž řídící veličina je na tomto intervalu vhodně approximována – např. po částech konstantní funkcí)

---

<sup>5</sup>Detailedly viz v [11]

a nemusí tedy platit, že koncový stav na intervalu přechozím se rovná počátečnímu stavu na intervalu novém. Z tohoto důvodu se k problému přidávají tzv. vazební podmínky zajišťující spojitost problému. Přínosem tohoto postupu oproti algoritmu *direct single shooting* je to, že při rozdělení horizontu predikce je stavová trajektorie jednodušší a je možné snáze najít optimální řešení. Citlivost na nevhodné počáteční podmínky, která zvláště u nestabilních systémů může způsobit velkou odchylku skutečné hodnoty stavu od predikované, je díky rozdělení řešení problému na subintervaly je při použití této metody nižší.

Princip těchto metod je naznačen na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Metody *direct single shooting* a *direct multiple shooting*

### 2.4.2 Citlivostní funkce

V této části ve stručnosti naznačíme princip odvození citlivostních funkcí stavu a výstupu na počáteční stav systému a jeho vstup. Tyto funkce vypovídají o tom, jak se změní stav a výstup systému, změní-li se počáteční podmínka systému a/nebo jeho vstup. Při jejich znalosti můžeme tedy provést linearizaci podél trajektorie, která (zvláště při „silném“ charakteru nonlinearity) je lepší approximací chování systému v daném stavu, než linearizace provedená v jednom pracovním bodě. Díky tomu jsme schopni najít přesnější linearizovaný model systému, který je možné s výhodou použít při prediktivním řízení. Pro detaily odvození viz [7]. Tyto závislosti se v daném čase dají vyjádřit pomocí matic. Derivace těchto matic podle času nám pak ukazuje, jak se daná citlivost dynamicky vyvíjí.

### Citlivost stavu systému $\mathbf{x}(t)$ na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$

Citlivostní matice  $\Phi(t, t_0)$ , která popisuje závislost stavu systému  $\mathbf{x}(t)$  na počátečním stavu  $\mathbf{x}_0$ , je možno vyjádřit jako

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (2.18)$$

V čase  $t+dt$  platí (za použití Taylorova rozvoje prvního rádu  $\mathbf{x}(t+dt) \approx \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)dt$ )

$$\Phi(t+dt, t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}(t+dt)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial [\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt]}{\partial \mathbf{x}_0}, \quad (2.19)$$

pak je tedy  $\Phi(t+dt, t_0)$  s využitím pravidla o derivaci součtu a dosazením z (2.18) rovno<sup>6</sup>

$$\Phi(t+dt, t_0) = \Phi(t, t_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Phi(t, t_0) dt. \quad (2.20)$$

Časová derivace matice (2.18) je z definice derivace dána vztahem

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\Phi(t+dt, t_0) - \Phi(t, t_0)}{dt}. \quad (2.21)$$

Dosazením (2.20) do (2.21) dostaneme

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Phi(t, t_0) \quad (2.22)$$

s počáteční podmínkou  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ . Tato rovnice popisuje vývoj citlivosti stavu systému na počáteční stav.

### Citlivost stavu systému $\mathbf{x}(t)$ na vstup systému na počátku $\mathbf{u}(t_0)$

Obdobně jako v předchozím případě vyjádříme citlivostní matice jako derivace stavu systému, tentokrát však podle vstupu v počátku (o vstupu  $\mathbf{u}(t)$  předpokládáme, že je na daném intervalu konstantní –  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0)$ )

$$\Gamma(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{u}(t_0)}. \quad (2.23)$$

Matici  $\Gamma(t, t_0)$  získáme řešením soustavy diferenciálních rovnic podobně jako v předcházející sekci. Výsledný vztah pro dynamickou citlivost stavu na vstupní signál v počátku má potom tvar

$$\dot{\Gamma}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Gamma(t, t_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} 1(t - t_0), \quad (2.24)$$

kde  $1(t - t_0)$  je jednotkový skok v čase  $t = t_0$ .

---

<sup>6</sup> $\mathbf{f}(\cdot)$  je zkrácený zápis pro  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , analogicky pro funkci  $\mathbf{g}(\cdot)$

### Citlivost výstupu systému $\mathbf{y}(t)$ na počáteční stav $\mathbf{x}_0$

Citlivostní matice výstupu na počáteční stav je

$$\Theta(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (2.25)$$

Podobně jako v předchozích sekcích je možné ukázat, že

$$\Theta(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Phi(t, t_0). \quad (2.26)$$

### Citlivost výstupu systému $\mathbf{y}(t)$ na vstup v počátku $\mathbf{u}(t_0)$

Za předpokladu neměnnosti vstupního signálu na daném intervalu platí

$$\Pi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{y}(t)}{\partial \mathbf{u}(t_0)}. \quad (2.27)$$

Úpravou pak získáme  $\Pi(t, t_0)$

$$\Pi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Gamma(t, t_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} 1(t - t_0). \quad (2.28)$$

#### 2.4.3 Predikční model

Na základě uvedených citlivostních matic je možné odvodit vývoj stavu systému a jeho výstupu. Jedná se o linearizovaný model a proto je jeho platnost omezena pouze na malé okolí bodu, ve kterém je prováděna approximace nelineárního systému. Vágní formulace „malé“ je zde zvolena úmyslně, jelikož jeho velikost závisí na charakteru nonlinearity a je tedy nutné pro každý konkrétní systém zjistit jeho přijatelnou velikost.

Vliv přírůstku vstupu  $\delta \mathbf{u}(t_{i-1})$  na přírůstek stavu systému  $\delta \mathbf{x}(t_i)$  s počáteční podmínkou  $\delta \mathbf{x}(t_{i-1})$  můžeme vyjádřit následujícím lineárním vztahem

$$\delta \mathbf{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1}) \delta \mathbf{x}(t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1}) \delta \mathbf{u}(t_{i-1}). \quad (2.29)$$

Provedeme-li výpočet přírůstku stavu pro  $j = 1, \dots, i$ , t.j.

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \delta \mathbf{x}(t_0) + \Gamma(t_1, t_0) \delta \mathbf{u}(t_0),$$

$$\delta \mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \delta \mathbf{x}(t_1) + \Gamma(t_2, t_1) \delta \mathbf{u}(t_1),$$

$$\delta \mathbf{x}(t_3) = \Phi(t_3, t_2) \delta \mathbf{x}(t_2) + \Gamma(t_3, t_2) \delta \mathbf{u}(t_2),$$

$\vdots$

$$\delta \mathbf{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1}) \delta \mathbf{x}(t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1}) \delta \mathbf{u}(t_{i-1}),$$

uvidíme, že můžeme určit přírůstek v čase  $t_i$ , vycházející ze stavu v čase  $t_0$ , dle předpisu

$$\delta\mathbf{x}(t_i|t_0) = \Phi_0^i \delta\mathbf{x}(t_0) + \sum_{j=1}^i \Phi_j^i \Gamma(t_j, t_{j-1}) \delta\mathbf{u}(t_{j-1}|t_0), \quad (2.30)$$

kde  $\Phi_j^i$  je rovno

$$\Phi_j^i = \begin{cases} \prod_{k=0}^{i-j-1} \Phi(t_{i-k}, t_{i-k-1}) & \text{pokud } i > j \\ \mathbf{I} & \text{pokud } i = j. \end{cases}$$

Výše uvedené platí pouze v případě přístupu *direct single shooting*. Chceme-li provádět predikci modelu na základě citlivostních funkcí i pro metodu *direct multiple shooting*, pak musíme respektovat vazební podmínky  $\delta\mathbf{x}(t_i|t_i) = \delta\mathbf{x}(t_i|t_{i-1})$ , které nám neumožní predikci formalizovat výše uvedeným způsobem. V tomto případě bude predikovaná hodnota stavu s použitím citlivostních funkcí rovna

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}(t_i|t_{i-1}) &= \Phi(t_i, t_{i-1}) \delta\mathbf{x}(t_{i-1}|t_{i-1}) + \Gamma(t_i, t_{i-1}) \delta\mathbf{u}(t_{i-1}|t_{i-1}), \\ \delta\mathbf{x}(t_i|t_i) &= \delta\mathbf{x}(t_i|t_{i-1}), \end{aligned}$$

s tím, že počáteční podmínky  $\delta\mathbf{x}(t_{i-1}|t_{i-1})$  jednotlivých intervalů predikované trajektorie jsou použity jako další proměnné v optimalizační úloze.

# Kapitola 3

## Prediktivní regulátor pro časově proměnné systémy

V minulé kapitole jsme uvedli způsob řízení plně nelineárního modelu systému – řízení nelineárním prediktivním regulátorem. Bylo zmíněno, že regulátor v tomto případě vypočítává optimální řídící posloupnost pro celý horizont predikce, na základě nelineárního modelu systému. Jelikož tento algoritmus vede na řešení pomocí numerických metod (*direct multiple shooting* řešené pomocí sekvenčního kvadratického programování (SQP)), je časová náročnost výpočtu velká. Pro řadu procesů je však náročnost výpočtu optimálního akčního zásahu pomocí tohoto regulátoru natolik značná, že řízení není možné takto realizovat.

V této kapitole odvodíme metodu řízení založenou na linearizaci nelineárního modelu systému podél trajektorie, pro kterou je možné využít lineární prediktivní řízení a významně tak zrychlit proces výpočtu. Tím se pak otevírají možnosti pro řízení mnoha relativně rychlých procesů.

### 3.1 Linearizace systému podél trajektorie

Předpokládejme nelineární popis modelu shodný s popisem uvedeným v kapitole 2.1, ovšem s přidaným signálem  $\sigma(t)$ , parametrizujícím systém, který je nezávislý na ostatních vstupech a na stavu systému. Tedy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \sigma(t)), \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \sigma(t)), \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \mathcal{R}^n\boldsymbol{\sigma}$ ,  $n_{\boldsymbol{\sigma}}$  je počet prvků vektoru  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ . Nalezení explicitní závislosti je obecně problematické a často vychází ze znalosti fyzikálního popisu systému, nebo je tuto závislost možné zjistit při identifikačních experimentech.

Protože při řešení nelineárních rovnic můžou nastat potíže s jejich řešitelností, je u nelineárních systémů často prováděna approximace v blízkosti nějakého pracovního bodu  $(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t))$ , která je lineární. V případě systému popsaném soustavou rovnic (3.1) můžeme tyto pracovní body parametrizovat s využitím externího signálu  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ . Pracovní body se pak tedy budou pohybovat po trajektorii závislé na  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , přičemž platí, že  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}_p(t), \boldsymbol{\sigma}(t))$  je rovnovážným bodem pro všechna  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ .

Provedeme-li linearizaci dle kapitoly 2.1.1, dostaneme následující vztahy popisující chování již lineárního systému

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{x}(t) + \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)) + \delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t)) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{x}(t) + \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \mathbf{u}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)), \boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

Dále můžeme podobně jako v 2.1.1 vyjádřit Jakobiány  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t))$  a  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ . Po dosazení a úpravě obdržíme stavový popis pro přírůstek stavu a výstup systému  $\delta \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  ve tvaru

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{u}(t), \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{y}_p(\boldsymbol{\sigma}(t)). \quad (3.3b)$$

Stavový popis uvedený v rovnicích (3.3) je popisem modelu, který je proměnný v čase. V anglické literatuře se tento typ systému nazývá *Linear Parameter Varying* (LPV). V tomto tvaru se tedy jedná o nelineární systém (3.1) linearizovaný podél trajektorie parametrizované signálem  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ .

## 3.2 Citlivostní funkce pro linearizovaný systém

Vyjdeme-li z modelu (3.3) odvozeného v předchozí kapitole, můžeme za pomocí poznatků o citlivostních funkcích pro nelineární systém odvozených v kapitole 2.4.2 najít novou parametrizaci linearizovaného modelu založenou právě na výše zmíněných citlivostních funkcích.

Pro přehled uvádíme jejich finální tvary:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Phi(t, t_0) \quad , \text{ s p. p. } \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.4a)$$

$$\dot{\Gamma}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Gamma(t, t_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{f}(t)} \mathbf{1}(t - t_0) \quad , \text{ s p. p. } \Gamma(t_0, t_0) = \mathbf{0}, \quad (3.4b)$$

$$\Theta(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Phi(t, t_0), \quad (3.4c)$$

$$\Pi(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Gamma(t, t_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} \mathbf{1}(t - t_0). \quad (3.4d)$$

Je zřejmé, že bude-li systém popsatelný rovnicemi (3.3), pak Jakobiány  $\frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)}$  a  $\frac{\partial \mathbf{g}(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)}$  mohou být approximovány maticemi  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t))$  a  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t))$  a rovnice přejdou do tvaru

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \Phi(t, t_0) \quad , \text{ s p. p. } \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.5a)$$

$$\dot{\Gamma}(t, t_0) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \Gamma(t, t_0) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \mathbf{1}(t - t_0) \quad , \text{ s p. p. } \Gamma(t_0, t_0) = \mathbf{0}, \quad (3.5b)$$

$$\Theta(t, t_0) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \Phi(t, t_0), \quad (3.5c)$$

$$\Pi(t, t_0) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \Gamma(t, t_0) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \mathbf{1}(t - t_0). \quad (3.5d)$$

Z tohoto popisu je vidět, že i citlivostní funkce jsou parametrizovány externím signálem  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ .

Jelikož rovnice (3.5a) a (3.5b) jsou lineární diferenciální rovnice prvního řádu s proměnnými koeficienty, můžeme najít jejich řešení ve tvaru

$$\Phi(t_2, t_1) = \exp \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) dt \right), \quad (3.6a)$$

$$\Gamma(t_2, t_1) = \exp \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) dt \right) \left( \int_{t_1}^{t_2} \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) dt \right] \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) dt \right). \quad (3.6b)$$

Porovnáme-li tyto vztahy s rovnicemi v kapitole 7 knihy [10], které popisují vzorkování spojitého systému, najdeme zde značnou podobnost – jedná se totiž o vzorkování nestacionárního systému. Přijmeme-li zjednodušující předpoklad, že paramet-

rizaci matic systému v intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t_1))(1 - \alpha) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t_2))\alpha, \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t_1))(1 - \alpha) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t_2))\alpha, \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t)) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t_1))(1 - \alpha) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(t_2))\alpha, \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t)) &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t_1))(1 - \alpha) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}(t_2))\alpha,\end{aligned}$$

kde  $\alpha = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$  a  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ , pak je možné vyřešit integrály v předcházejících rovnicích a vztah (3.6a) přejde do tvaru

$$\Phi(t_2, t_1) = \exp \left[ (t_2 - t_1) \frac{\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t_1)) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t_2))}{2} \right].$$

Použijeme-li pro výpočet matic  $\Phi(t_2, t_1)$  a  $\Gamma(t_2, t_1)$  podobný postup, jako je navrhován v [10], strana 125 (kde pro tam značenou matici  $\Phi$  použijeme značení  $\Xi$ ), pak dostaneme rovnice

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(t)) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.7a)$$

$$\exp [(t_2 - t_1)\Xi] = \begin{bmatrix} \Phi(t_2, t_1) & \Gamma(t_2, t_1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (3.7b)$$

Z poslední rovnice dekompozicí matice  $\exp [(t_2 - t_1)\Xi]$  snadno dostaneme hledané matice.

### 3.3 Prediktivní regulátor pro linearizovaný diskrétní systém

#### 3.3.1 Nelineární MPC

V kapitole 2.4 byla představena koncepce regulátoru pro nelineární diskrétní systém dle (2.14), t.j.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

Pro takovýto problém je pro získání optimálního akčního zásahu třeba v každém kroku nalézt (např. pomocí metody *direct multiple shooting*, řešené SQP) minimum

kriteriální funkce ve tvaru

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} L(\mathbf{x}(i), \Delta \mathbf{u}(i)).$$

Tento koncept je obecně platný, avšak výpočetní náročnost určení citlivostních matic (3.4) je často překážkou pro jeho úspěšné nasazení v aplikaci.

### 3.3.2 Prediktivní regulace LPV systému

Pokud použijeme poznatků odvozených v kapitole 2.4.2, pak můžeme kritérium pro nelineární prediktivní regulátor přeformulovat do tvaru

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} (\|\mathbf{x}(i)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(i)\|_{\mathbf{R}}^2),$$

s tím, že

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}(i+1|i) &= \Phi(i+1, i) \delta \mathbf{x}(i|i) + \Gamma(i+1, i) \delta \mathbf{u}(i|i), \\ \delta \mathbf{x}(i+1|i) &= \delta \mathbf{x}(i+1|i+1), \\ \mathbf{y}(i|i) &= \Theta(i+1, i) \delta \mathbf{x}(i|i) + \Pi(i+1, i) \delta \mathbf{u}(i|i) + \mathbf{y}_p(\sigma(i)), \\ \mathbf{x}(i) &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}(i) \in \mathcal{U}, \mathbf{y}(i) \in \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

V předchozí kapitole jsme ukázali, že pro podmínu  $\mathbf{x}(i+1|i) = \Phi(i+1, i) \delta \mathbf{x}(i|i) + \Gamma(i+1, i) \delta \mathbf{u}(i|i)$  můžeme najít ekvivalentní vyjádření pomocí diskretizovaných matic LPV systému. Použijeme-li tohoto dílčího výsledku, můžeme tuto nelineární optimalizaci převést na lineární, jak ukazuje následující kapitola.

### 3.3.3 MPC pro LPV

Pro třídu systémů popsatelných pomocí diferenciálních rovnic (3.1), můžeme provést linearizaci podél trajektorie dle předchozích sekcí a potom provést výpočet optimálního vstupního signálu pomocí lineárního MPC. Výhodou takového přístupu je úspora výpočetního času – QP programování používané v lineárním MPC je „levnější“, než výše zmiňované metody používané při výpočtech s NMPC.

Model linearizovaného systému bude tedy poté popsán rovnicemi (3.3) a kritérium může mít například podobu

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} ((\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i))^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i)) + (\Delta \mathbf{u}(i))^T \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{u}(i)),$$

s tím, že platí

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}(i+1) &= \mathbf{A}'(\boldsymbol{\sigma}(i))\delta \mathbf{x}(i) + \mathbf{B}'(\boldsymbol{\sigma}(i))\delta \mathbf{u}(i), \\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{C}'(\boldsymbol{\sigma}(i))\delta \mathbf{x}(i) + \mathbf{D}'(\boldsymbol{\sigma}(i))\delta \mathbf{u}(i) + \mathbf{y}_p(\boldsymbol{\sigma}(i)), \\ \mathbf{x}(i) &\in \mathcal{X}, \mathbf{u}(i) \in \mathcal{U}, \mathbf{y}(i) \in \mathcal{Y},\end{aligned}$$

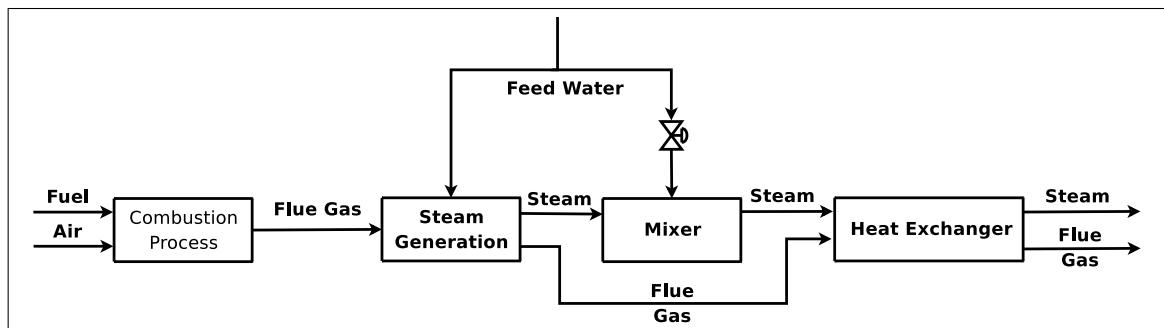
kde čárkou jsou značeny diskretizované matice. Matice  $\mathbf{A}'(\boldsymbol{\sigma}(i))$ ,  $\mathbf{B}'(\boldsymbol{\sigma}(i))$ ,  $\mathbf{C}'(\boldsymbol{\sigma}(i))$ ,  $\mathbf{D}'(\boldsymbol{\sigma}(i))$  po řadě odpovídají maticím  $\Phi(i+1, i)$ ,  $\Gamma(i+1, i)$ ,  $\Theta(i+1, i)$  a  $\Pi(i+1, i)$ . Pro jejich výpočet však již není nutné vypočítat množství diferenciálních rovnic (jejichž určení probíhá časově náročnými numerickými metodami), jak by tomu z definice v kapitole 2.4.2, ale je možné přímo je určit výše zmíněnou diskretizací.

# Kapitola 4

## Ověření metody na modelu přehříváku páry

### 4.1 Syntéza modelu

Systém použitý pro ověření teoretických výsledků uvedených v předchozích částech je model tepelné elektrárny se zvláštní pozorností věnovanou soustavě přehříváků. V jednotlivých podsekčích této části jsou popsány zásadní komponenty tohoto modelu s objasněním jejich motivace a principu. Na obrázku 4.1 je uvedeno blokové schéma dávající představu o propojení dílčích subsystémů v modelu. V úvodu ve stručnosti



Obrázek 4.1: Blokové schéma modelu

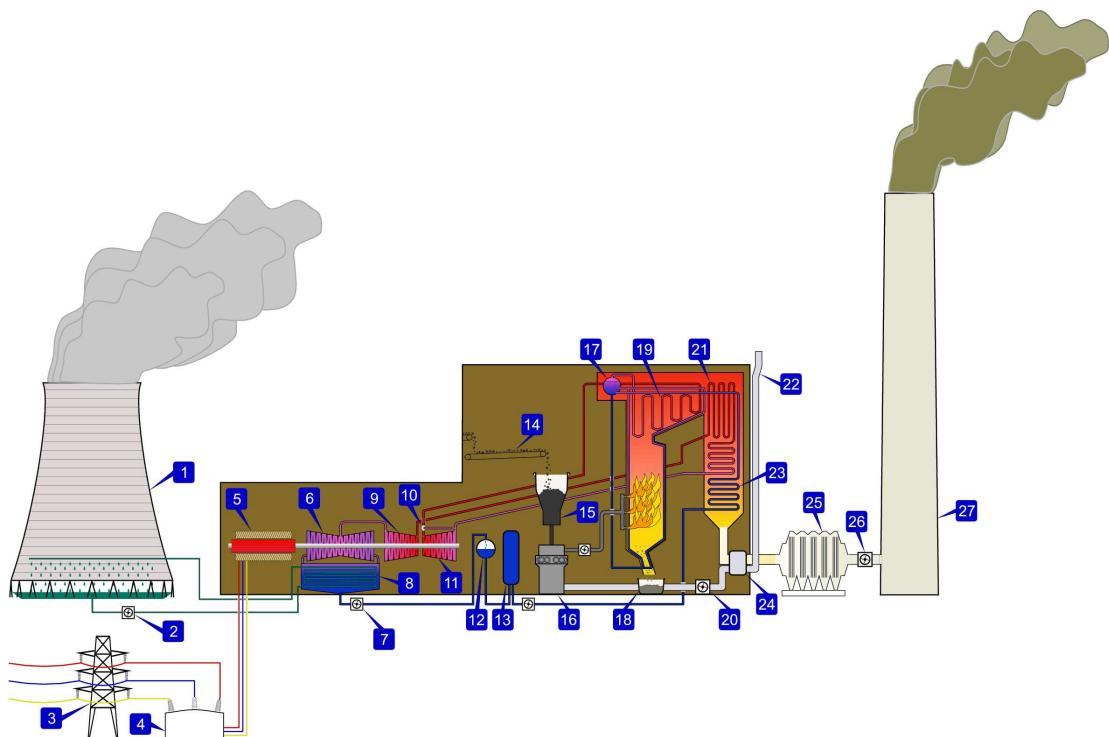
shrňeme základní jevy, které motivovaly vznik jednotlivých částí modelu.

#### 4.1.1 Úvod

Zjednodušeně je možno popsat tepelnou elektrárnu takto<sup>1</sup>: palivo (uhlí) je ve mlýně rozemleto na jemný prášek a smícháno se vzduchem, odkud proudí do spalovací

<sup>1</sup>Převzato z <http://en.wikipedia.org>

komory, kde hoří. Tepelná energie uvolněná při spalování je předávána do teplonosného média (čistěné vody) proudícího ve stěnách kotle. Kapalina, která se postupně přeměňuje na páru, je vedena do bubnu, ve kterém se ze směsi vody a páry odděluje pára. Ta je pak pomocí vstřikování vody upravena na vhodnou teplotu a vedena do soustavy přehříváků, ve kterých je opět zahřívána a vzniká přehřátá pára (teplota např.  $540^{\circ}\text{C}$  a tlak 12 MPa). Přehřátá pára je následně vedena k soustavě turbín, mezi kterými je ještě doohřívána, přičemž po výstupu z tohoto řetězce klesne její teplota i tlak - pára turbínám předala svou energii. Vystupující pára – nyní jen lehce nad bodem varu – je ochlazena tepelným kontaktem s chladící vodou v kondenzoru, odkud se kondenzát vede zpět na začátek procesu. Aby se mohl cyklus opakovat, je chladící kapalina ochlazena v chladících věžích, odkud je po dostatečném ochlazení vedena zpět do kondenzoru. Kapalina se opakovaně používá z toho důvodu, že při provozních tlacích a teplotách je ústrojí značně náchylné ke korozi a je proto je nutno používat čistěnou vodu zbavenou minerálních příměsí. Principiální schema elektrárny je na obrázku 4.2. Jelikož pro co nejfektivnější provoz elektrárny je vý-



Obrázek 4.2: 1,2 – chlazení vody; 3,4 – připojení k síti VN; 5 – generátor; 6,9,10,11 – turbíny; 7,8 – kondenzace a čerpání vody; 12,13 – úprava a předehřev vody; 14,15,16 – doprava a mletí uhlí; 17 – boiler; 18 – popelník; 19 – přehříváky; 22 – přívod vzduchu; 25 – čištění spalin; 26,27 – výfuk spalin (zdroj <http://en.wikipedia.org>)

hodné, aby parametry výstupní páry byly co nejblíže provozních limitů ústrojí (s tím, že je ale nesmějí překročit – došlo by k poškození zařízení) je třeba přesně řídit proces spalování a dodávky páry. Tím je pak umožněno zvýšit výkonovou hladinu elektrárny.

Mezi problémy komplikující dosažení tohoto cíle, které vznikají v reálné elektrárně, patří např. fluktuace množství vstupujícího paliva způsobené tím, že do drtiče paliva nepadá konstantní množství uhlí za časový okamžik; různorodost složení paliva (např. odlišné procentuální zastoupení uhlíku v uhlí pocházejícího z jiného dolu) a z toho plynoucí odlišnosti ve výhřevnosti jednotkového množství; teplota a množství spalin je v určitých mezích proměnlivé – pří míchání se vzduchem dochází k turbulencím a proces spalování probíhá v různých okamžicích jinak; atp. Tyto jevy se projevují jako poruchy, jejichž vliv je třeba eliminovat. Další komplikaci představuje přechod teplonosného média mezi různými stavů, v nichž dochází ke změně jeho fyzikálních parametrů – měrné tepelné kapacity a entalpie.

Jak je patrné z předcházejícího popisu principiální funkce elektrárny, pára je k turbínám přivedena právě ze soustavy přehříváků a je tedy vhodné její parametry korigovat v tomto místě.

#### 4.1.2 Blok Steam Generation a Combustion Process

Jak bylo uvedeno výše, v reálné elektrárně je turbíně předávána energie tokem přehřáté páry, která ji roztáčí. Po předání energie turbíně je pára ochlazena a kondenzující kapalina je opět přečerpána a připravena k ohřátí tokem horkých spalin v kotli.

Tento popis v sobě obsahuje množství dynamických dějů a úkolem tohoto bloku je tyto děje postihnout, byť ve zjednodušené formě, jelikož proces vyvíjení páry nehraje v této práci stěžejní roli.

Proces spalování paliva, jehož rychlosť ovlivňuje množství energie dodané médiu roztácejícímu turbíny je ovlivněn řadou faktorů. Mezi ně patří například to, jak dlouho probíhá mletí uhlí ve mlýně, doprava paliva do kotle, zda je palivo stejného složení, množství vzduchu přiváděného do kotle při spalování, způsob proudění spalin, atp. Dynamika předávání tepelné energie spalin teplonosnému médiu proudícímu v trubkách umístěných ve stěnách kotle je závislá na parametrech použitého ústrojí – to je např. koeficient prostupu tepla materiélem trubek, jejich tloušťka, měrná tepelná kapacita a entalpie média, rychlosť jeho proudění, tlak uvnitř trubek, atd.

Z výše uvedeného lze usuzovat, že stav kanálu páry a spalin je poměrně kom-

plikované přesně modelovat, a proto je v modelu u tohoto bloku uvažována lineární změna vlastností dle aktuálního množství paliva u toho kterého kanálu s dynamikou prvního řádu. Tento approximační přístup vedoucí ke zjednodušení vychází ze zkušenosti a vede k výsledkům uspokojivým pro účely ověření na modelu.

### 4.1.3 Blok Mixer

K modelování míchání tekutiny s nižší teplotou (např. 270 °C) se vstupní párou, tak aby teplota výstupní páry byla při daném požadovaném průtoku rovna referenční (např. 460 °C), dochází v bloku nazvaném **Mixer**. Dosažení této teploty na výstupu bloku (a tedy i na vstupu do bloku **Heat Exchanger**) je účelné pro stabilizaci výstupní teploty páry.

Výsledné teplo při procesu míchání dvou tekutin je možné vypočítat ze zákona zachování energie a hmoty ve tvaru

$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad (4.1a)$$

$$m_1 + m_2 = m, \quad (4.1b)$$

kde hodnoty tepelné energie vstupujících tekutin jsou  $Q_1 = h_1 m_1$ ,  $Q_2 = h_2 m_2$  a tepelná energie směsi vody a páry je rovna  $Q = hm$ , měřené v [MJ]. Parametry  $h_i$  jsou měrná entalpie s jednotkou [kJ/kg], vyjadřující energetický obsah jednotkového množství a  $m_i$  je hmotnost v [kg] dané tekutiny. Hmotnost  $m$  představuje celkovou hmotnost výsledné směsi. Předpokládáme-li tedy, že míchání páry a vody lze modelovat jako míchání dvou tekutin, dále pak, že teplota proudícího média v obou skupenstvích se mění jen velmi pomalu a prostor ve kterém je prováděno směšování je tepelně izolován, pak lze dosadit výše uvedené vztahy s parametry pro vodu a páru do rovnice (4.1) s tím, že místo hmotnosti dosadíme hmotnostní tok. Z toho tedy plyne, že uvažujeme ideální stav, za kterého všechno teplo, které odevzdá proud horké páry, je bezeztrátově přijato chladnější kapalinou. Rovnice tedy bude mít tvar

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0, \quad (4.2a)$$

a tedy

$$\Delta h_1 \dot{m}_1 + \Delta h_2 \dot{m}_2 = 0. \quad (4.2b)$$

$\Delta h_i$  je rozdíl entalpie mezi počátečním a koncovým stavem a je rovno

$$\Delta h_i = h_i \text{ FINAL} - h_i \text{ INITIAL}$$

Měrná entalpie je obecně funkčí tlaku [MPa] a teploty [°C] –  $h = h(p, T)$ .

Jak je uvedeno v sekci 4.1.1, pára je odebírána z bubnu a její tlak můžeme za pomoci změny přiváděného množství paliva regulovat na požadovanou úroveň. Zvýšení výkonové hladiny elektrárny a tedy i odběru páry se pak projeví na fluktuaci v množství paliva, ale nikoli tlaku<sup>2</sup>.

Jelikož je z hlediska výše uvedeného možné považovat tlak za konstantní, aniž bychom ovlivnili sledované parametry modelu, můžeme jeho vliv na změnu měrné entalpie zanedbat a formálně ji lze tedy považovat za funkci pouze termodynamické teploty –  $h = h(T)$ .

Nyní tedy můžeme dosadit do rovnice (4.2):

$$\Delta h_1 \dot{m}_1 = -\Delta h_2 \dot{m}_2, \quad (4.3a)$$

$$(h_c - h_a) \dot{m}_1 = (h_b - h_c) \dot{m}_2, \quad (4.3b)$$

$$h_c = \frac{h_a}{\dot{m}} \dot{m}_1 + \frac{h_b}{\dot{m}} \dot{m}_2, \quad (4.3c)$$

kde  $h_a = h_1 \text{ INITIAL}$ ,  $h_b = h_2 \text{ INITIAL}$  a  $h_c = h_{FINAL}$ , která je pro obě tekutiny shodná. Z rovnice (4.3) snadno pomocí parních tabulek zjistíme jaké teplotě (při konkrétním tlaku) přísluší zjištěná entalpie a tedy jaká je teplota výsledné směsi.

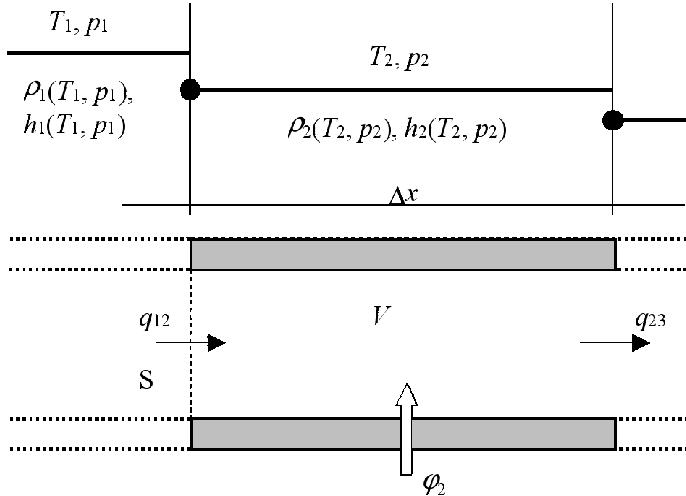
#### 4.1.4 Blok Heat Exchanger

Blok Heat Exchanger modeluje vlastní přehřívák, který je ústředním bodem našeho zájmu. Jedná se o plně nelineární systém s rozprostřenými parametry, který je modelován pomocí sériového zapojení konečných objemových elementů  $V$ , délky  $\Delta x$  se shodnými vlastnostmi. Jednu z možností, jak toto spojení elementů reprezentovat zobrazuje obrázek 4.3, kde je vidět přehled použitých stavových veličin – teplota  $T$  [° C], tlak  $p$  [MPa], hmotnostní tok  $q$  [kg/s], hustota  $\rho(T, p)$  [kg/m<sup>3</sup>] a měrná entalpie  $h(T, p)$  [kJ/kg].  $\varphi$  [kJ/s] představuje tepelný tok spalin ohřívající protékající médium.

Tento blok popisuje jak probíhá přenos tepelné energie ze spalin na páru v přehřívácích na základě diferenciálních rovnic popisujících transport média, energetickou a hmotnostní bilanci elementu (pro detaily viz [2]). Je zde modelován přenos tepla pomocí souproudu i protiproudou (alternativě) – rozdíl mezi nimi je ve směru proudu ohřívaného a teplonosného média. Jak název napovídá, u souproudu jsou směry

---

<sup>2</sup>Při tomto přístupu vědomě zanedbáváme dynamiku regulace tlaku na referenční hodnotu z důvodu zjednodušení finálního modelu – cílem není přesný popis kompletní elektrárny.



Obrázek 4.3: Objemové elementy přehříváku (zdroj: [2])

proudční shodně, u protiproudou opačně. Poznamenejme, že při práci s tímto blokem byl vždy použit souproud.

Teplo přenášené proudem spalin se dostává k ohřívanému médiu přestupem přes překážku tvořenou stěnou trubky přehříváku. Množství tepla  $Q$ , která za čas  $\tau$  [s] projde plochou  $S$  [ $\text{m}^2$ ] o teplotě  $T_1$  do stěny o teplotě  $T'_1$  je možné vyjádřit tzv. Newtonovým vztahem

$$Q = \alpha_1 S \tau (T_1 - T'_1),$$

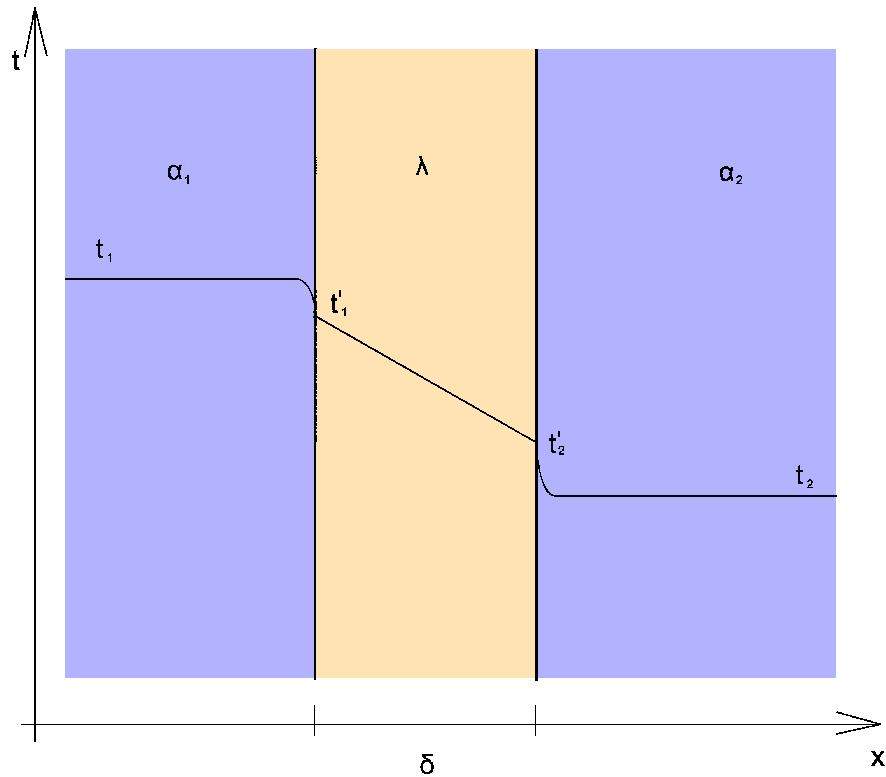
kde  $\alpha$  [ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ] je koeficient přestupu tepla stěny přehříváku. Přestup tepla z trubky do páry je možné popsat analogickým vztahem

$$Q = \alpha_2 S \tau (T'_2 - T_2).$$

Vedení tepla stěnou trubky popisuje rovnice

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} S \tau (T'_1 - T'_2),$$

kde  $\lambda$  [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] je tepelná vodivost,  $\delta$  [m] je šířka stěny. Celý proces ilustruje obrázek 4.4, na kterém je vidět tzv. mezní vrstva na rozhraní kapaliny a pevné látky, kde dochází k prudkému teplotnímu skoku. V bloku jsou uvažovány parametry ovlivňující prostup tepla a explicitně vystupují v rovnicích. Pomocí diferenciálních rovnic je určována teplota  $T_1$  a  $T_2$ . Kvůli malé tloušťce stěny trubky přehříváku a z toho plynoucí rychlé dynamice přestupu tepla stěnou je tato zanednána a teploty  $T'_1$  a  $T'_2$  jsou nahrazeny jednou střední hodnotou mezi těmito teplotami. Zohledněné parametry jsou: velikost teplosměnných ploch, objem elementu, tloušťka, měrná tepelná kapacita a koeficient přestupu tepla stěny přehříváku. Dle změny teploty a tlaku je v



Obrázek 4.4: Přestup tepla – teplotní profil (zdroj: <http://cs.wikipedia.org>)

modelu zahrnuta také závislost entalpie, měrného objemu a měrné tepelné kapacity páry pomocí parních tabulek.

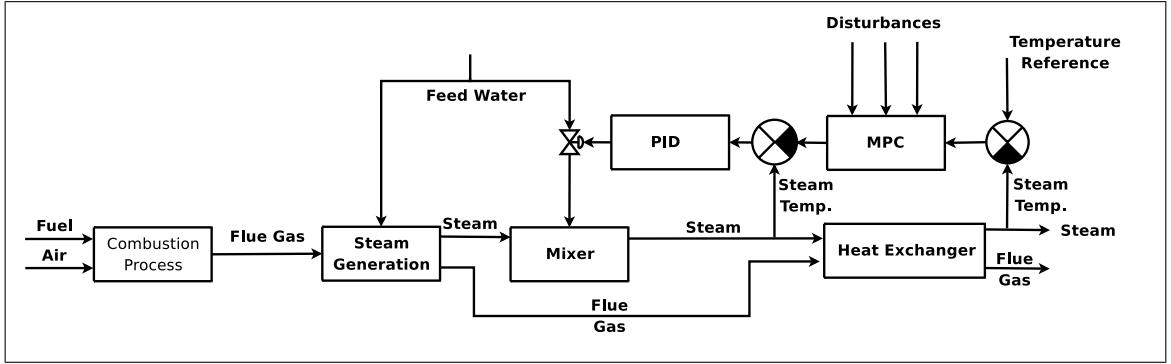
## 4.2 Řízení modelu

Na základě popisu uvedeném v části 4.1 bylo v Matlabu sestaveno simulinkové schéma na kterém bylo prováděno testování teoretických předpokladů. Ideové schéma je na obrázku 4.5.

### 4.2.1 Poznámky k implementaci

Implementace bloku Heat Exchanger byla přímočará a souhlasí s popisem uvedeným v minulé části. Pro blok Heat Exchanger byla ve firmě Honeywell spol. s.r.o. vytvořena s-funkce realizující potřebné výpočetní úkony, která byla pro účely práce převzata.

V bloku Steam Generation a Combustion Process byla v souladu s předchozím popisem provedena aproximace na základě aktuální výkonové hladiny elektrárny.



Obrázek 4.5: Blokové schéma řízené soustavy

Teplota spalin a množství spalin a páry mají následující parametrizaci

$$T_{flue} = (1 - \sigma(t))T_{flue min} + \sigma(t)T_{flue max},$$

$$\dot{m}_{flue} = (1 - \sigma(t))\dot{m}_{flue min} + \sigma(t)\dot{m}_{flue max},$$

$$\dot{m}_{steam} = (1 - \sigma(t))\dot{m}_{steam min} + \sigma(t)\dot{m}_{steam max},$$

která je vždy doplněna dynamikou prvního řádu.

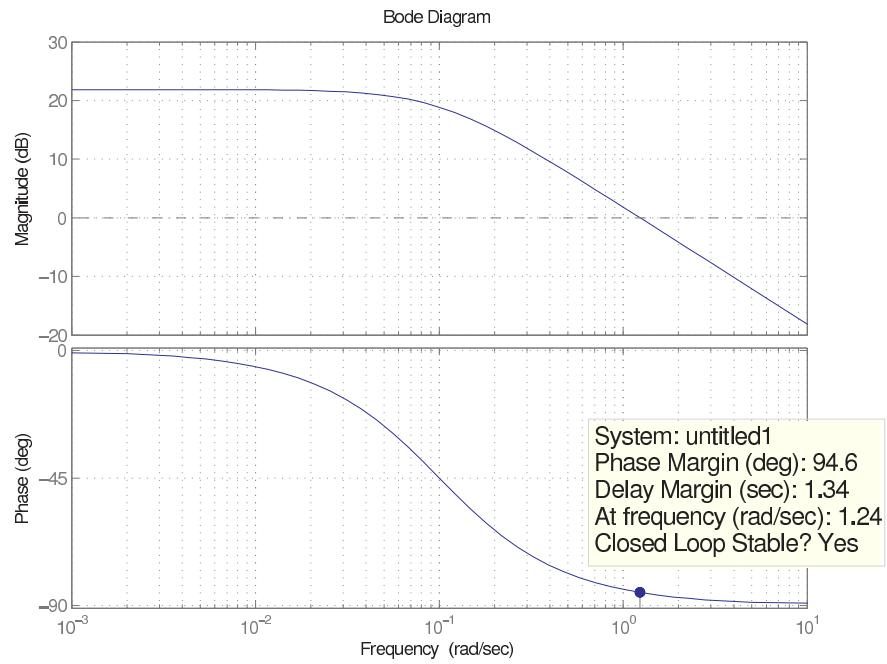
U bloku **Mixer** je množství vstřikované chladnější kapaliny odvozováno z rozdílu teplot páry vystupující z bloku **Mixer** a referenční teploty páry. Regulační obvod je doplněn *PI* regulátorem, který byl navržen pomocí nástroje *rltool* tak, aby se hodnota výstupního signálu ustálila v co nejkratším čase a bez překmitu, při zachování reálných hodnot vstřiku chladiva. Vstupem do této regulační smyčky je hodnota průtoku chladící tekutiny. Výstupem je pak teplota výsledné směsi tekutin. Součástí regulačního obvodu je dynamika prvního řádu s časovou konstantou 10 s, simulující dynamiku chování soustavy, což zahrnuje dynamiku ventilu ovládajícího vstřik chladiva a ohřev termočlánku, který měří teplotu pární směsi. Přenos otevřené smyčky je potom dán dynamikou tohoto ventilu zapojenou v sérii s vlastním blokem pro míchání, který má charakter proměnného zesílení. Pro typické průtoky byl přenos otevřené smyčky tohoto subsystému bez *PI* regulátoru identifikován takto

$$G_{OL}(s) = \frac{-1,24}{s + 0,1}.$$

Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky ( $-G_{OL}(s)$ ) jsou na obrázku 4.6.

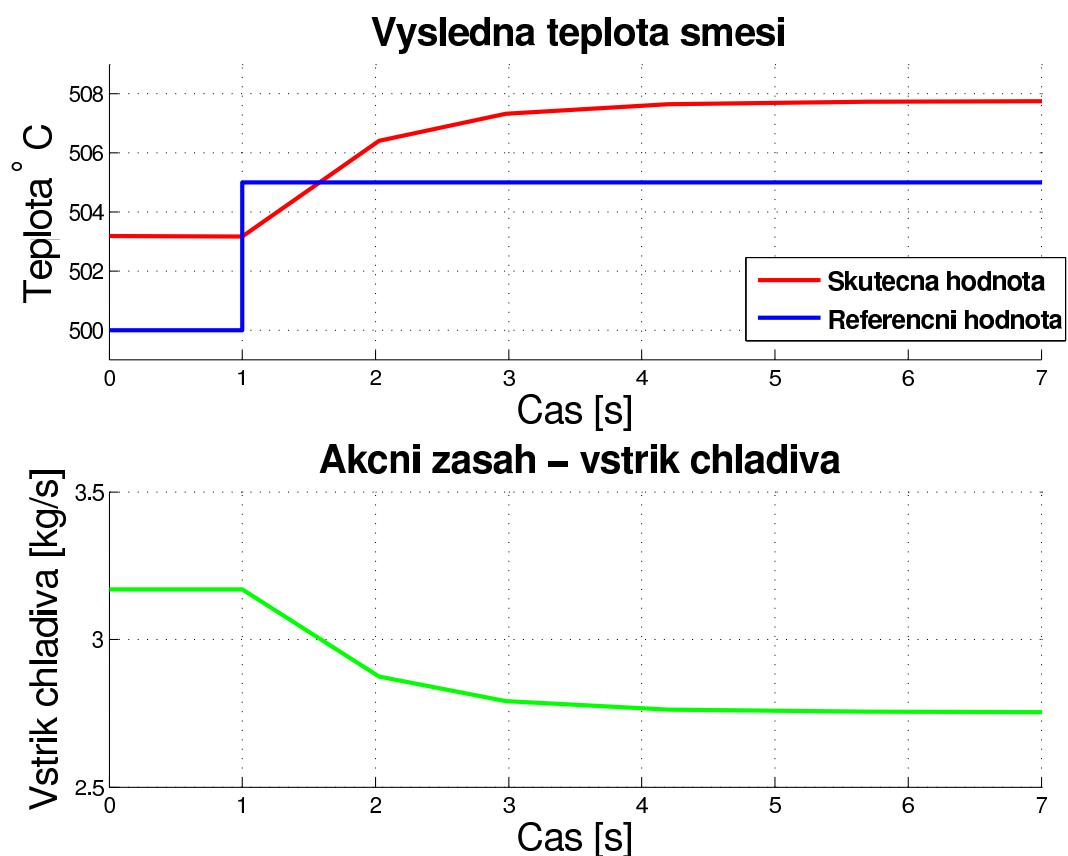
Odezva systému v uzavřené smyčce s proporcionálním regulátorem o přenosu  $R(s) = 1$  ( $G_{CL}(s) = \frac{-G_{OL}(s)}{1+G_{OL}(s)}$ ) na skok reference pak na obrázku 4.7. Pro asymptotické sledování konstantní reference byl do smyčky přidán zmínovaný *PI* regulátor s přenosem

$$R(s) = \frac{s + 0,1}{s}.$$

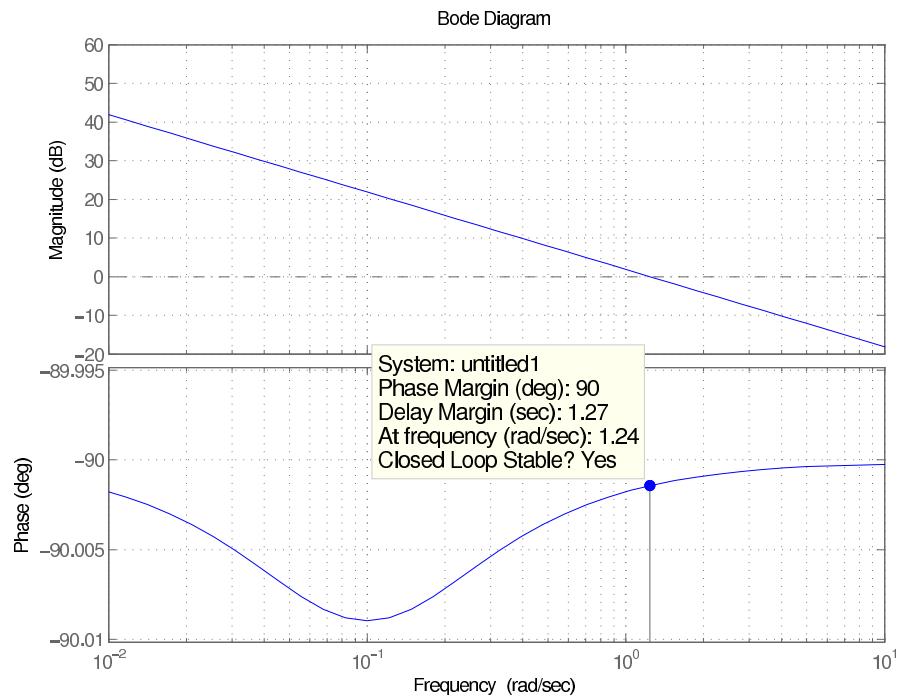


Obrázek 4.6: Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky

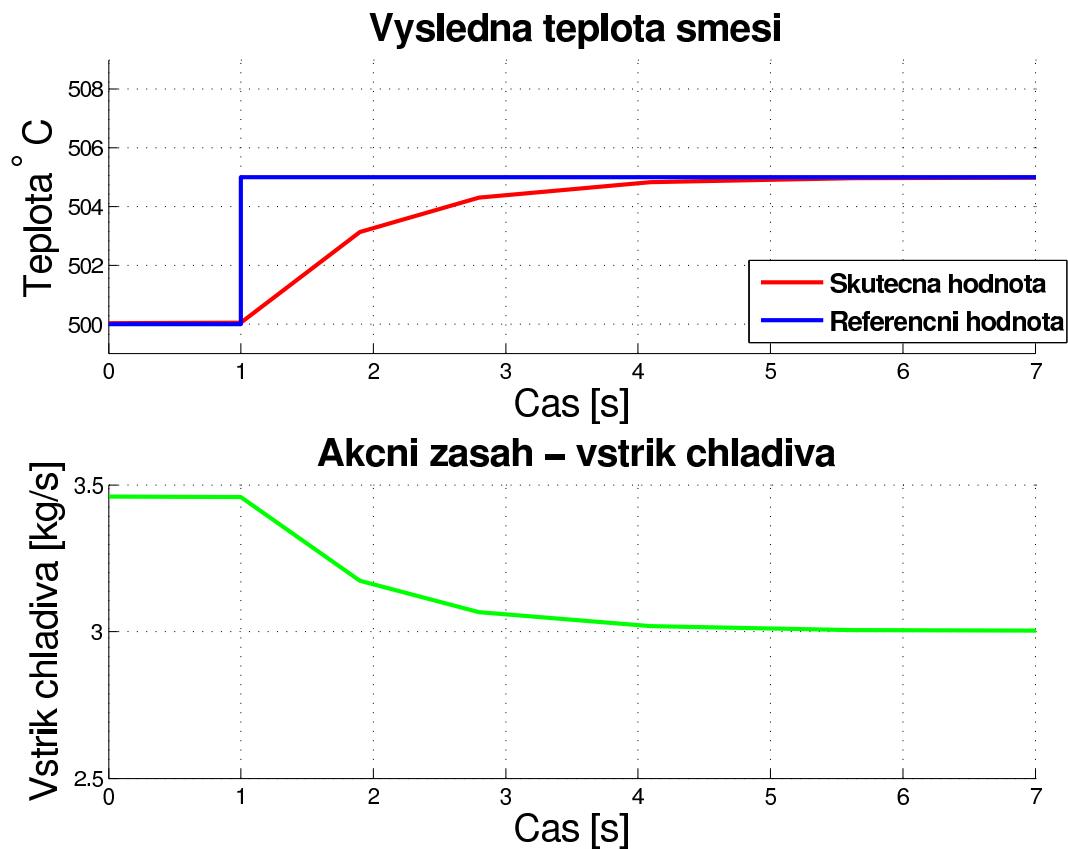
Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s regulátorem ( $G_{OL,PI}(s) = -G_{OL}(s)R(s)$ ) je na obrázku 4.8. Odezva na skok v je pro uzavřenou smyčku pro případ s  $PI$  regulátorem ( $G_{CL,PI}(s) = \frac{-G_{OL,PI}(s)}{1-G_{OL,PI}(s)}$ ) zobrazena na obrázku 4.9. Dílčí nepřesnost, které jsme se vědomě dopustili, je nahrazení průtokové charakteristiky ventilu lineární approximací.



Obrázek 4.7: Odezva soustavy v uzavřené smyčce s proporcionálním regulátorem s přenosem  $R(s) = 1$



Obrázek 4.8: Frekvenční charakteristiky otevřené smyčky s *PI* regulátorem



Obrázek 4.9: Odezva soustavy v uzavřené smyčce s *PI* regulátorem na skok

### 4.2.2 Vstupy a výstupy

Výstupem, který chceme stabilizovat, je teplota páry vycházející z posledního z elementů modelované soustavy přehříváků.

Vstupy do systému jsou hmotnostní průtok páry vstupující do soustavy přehříváku, množství paliva přiváděného do kotle a referenční teplota páry, kterou by pára měla mít při výstupu z přehříváku. Veličina přímo ovlivnitelná regulátorem je pouze vstupní hodnota teploty páry. Jedná se tedy o systém se třemi vstupy a jedním výstupem, viz tabulka 4.1.

Typ proměnné	MV	DV	CV
Jméno proměnné	Temperature reference	Steam flow, Fuel	Steam temperature

Tabulka 4.1: Tabulka vstupů a výstupů

### 4.2.3 Identifikace

Jelikož se jedná o nelineární systém, je třeba ho linearizovat v blízkosti nějakého pracovního bodu. Tento bod je parametrisován bezrozměrným signálem  $\sigma(t)$ , který nabývá hodnot v intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$  a má význam výkonové hladiny elektrárny. Zvolený přenos bude mít na stanovené výkonové hladině tvar (4.4), pro každý ze vstupů.

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s\tau)^4} \quad (4.4)$$

Na základě tohoto předpokladu byla sestavena proměnná struktura lineárního modelu ve tvaru (4.5), která je v kanonické pozorovatelné formě vzhledem k výstupu. Index  $n_u$  značí počet vstupů systému, počet výstupů je jedna.

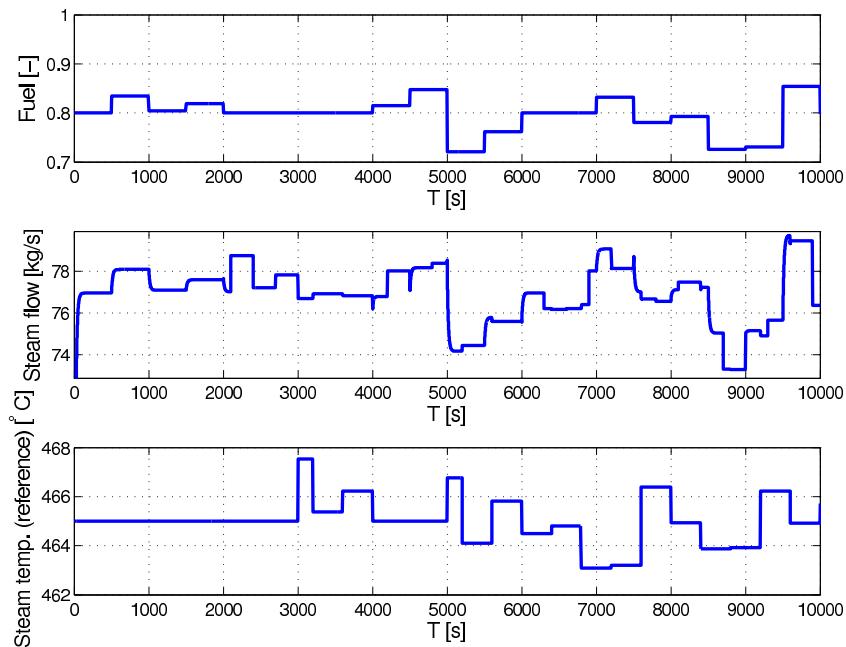
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\sigma(t)) &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{\tau(\sigma(t))} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{\tau^2(\sigma(t))} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\tau^3(\sigma(t))} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^4(\sigma(t))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \frac{K_1(\sigma(t))}{\tau^4(\sigma(t))} & \dots & \frac{K_{n_u}(\sigma(t))}{\tau^4(\sigma(t))} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(\sigma(t)) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Identifikace proběhla pomocí funkce `pem()` Matlabu na různých výkonových hladinách elektrárny, parametrizovaných signálem  $\sigma(t)$ . Tato funkce umožňuje odhadovat zvolené parametry funkce (v našem případě časovou konstantu  $\tau$  a zesílení jednotlivých vstupů  $K_i$ ) tak, že fituje – metodou minimalizující chybu predikce – zvolený soubor dat do modelu definovaného pomocí datové struktury `idgrey` definované pro náš případ pomocí matic uvedených v (4.5).

Během tohoto procesu byly ukládány parametry  $\tau$  a  $K_i$  a průběhy hodnot kterých nabývaly byly proloženy polynomy, jejichž koeficienty byly zaznamenány.

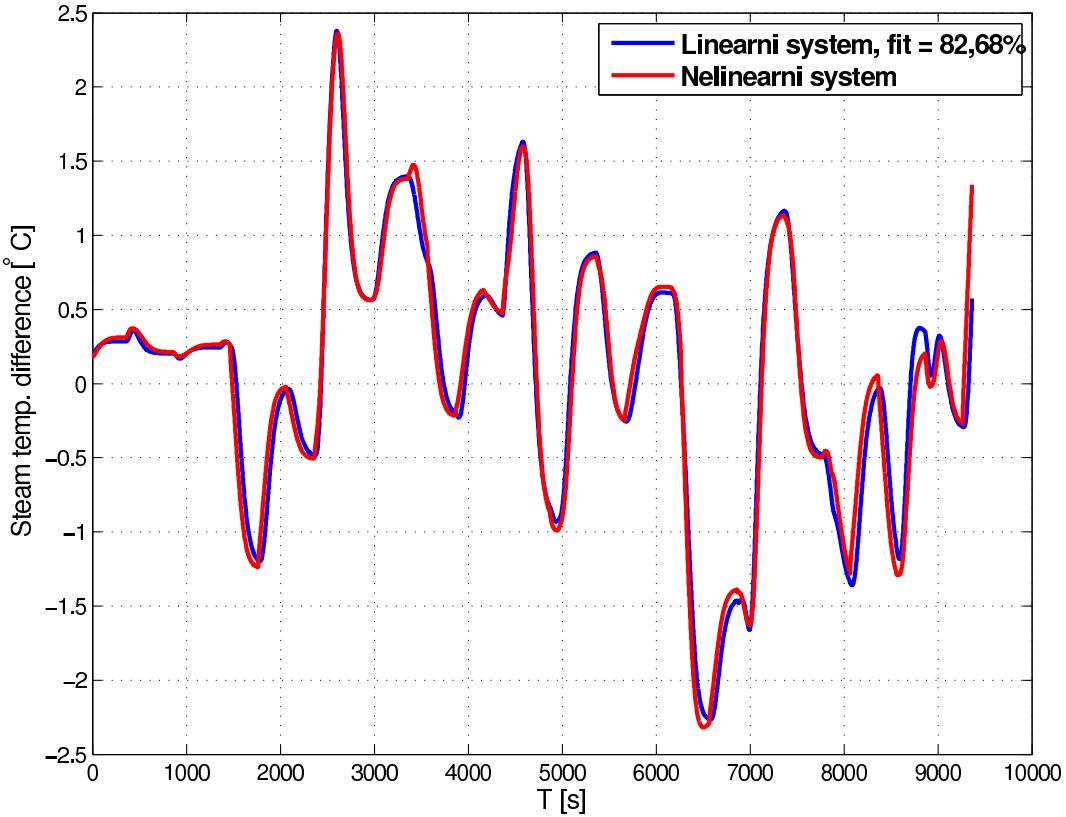
#### 4.2.4 Výsledky identifikace

Pro vybuzení soustavy jsme použili při identifikaci signál na obrázku 4.10. Odezva systému je zobrazena na obrázku 4.11, společně s odezvou linearizovaného systému, pro jednu konkrétní výkonovou hladinu  $\sigma(t)$ . Je zde také uvedena procentuální shoda odezvy obou systémů na vstupní signál. Všechny hodnoty při srovnání odezvy jsou uvedeny v přírůstcích od střední hodnoty.



Obrázek 4.10: Vstupní signál při identifikaci

Stejný proces jsme provedli pro 50 úrovní výkonu mezi  $\langle 0, 55; 1 \rangle$ , což odpovídá výkonu  $(55 \div 100)$  MW. Vývoj parametrů, kterými jsou zesílení jednotlivých kanálů  $K_i$  a časová konstanta linearizovaného systému  $\tau$ , je uveden v grafech 4.12, 4.14, 4.13 a 4.15. Z grafů je možné pozorovat, že parametry se s parametrizačním sig-



Obrázek 4.11: Shoda odezvy nelineárního a linearizovaného modelu

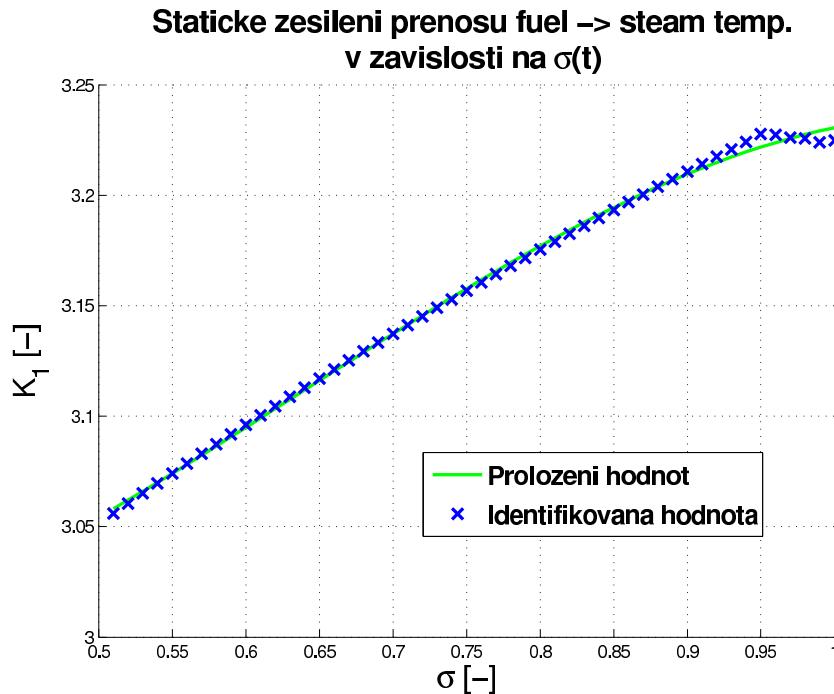
náletem  $\sigma(t)$  mění po jednoduché trajektorii, kterou je možné snadno approximovat polynomiální závislostí. V grafu zobrazujícího vývoj časové konstanty je možné pozorovat zrychlování dynamiky systému v závislosti na rostoucí hodnotě signálu  $\sigma(t)$  (který, jak bylo řečeno výše, má význam výkonové hladiny elektrárny).

Na obrázku 4.16 jsou zobrazeny přechodové charakteristiky přenosů jednotlivých kanálů. Z nejdélšího času ustálení můžeme přibližně určit vhodnou délku predikčního horizontu – v tomto případě jsme zvolili 40 kroků za předpokladu vzorkovací periody 10 s.

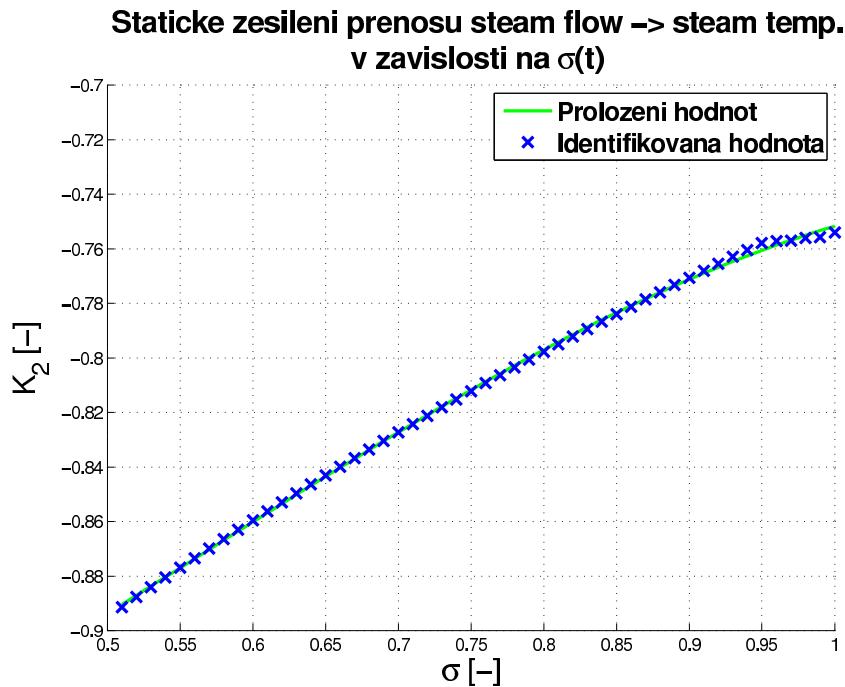
## 4.2.5 LPV MPC

### Návrh

Na základě výše uvedené teorie byl pro model přehříváku navržen prediktivní regulátor bez omezení, který zohledňuje fakt, že parametry systému se mění s paramet-



Obrázek 4.12: Statické zesílení v kanálu Fuel

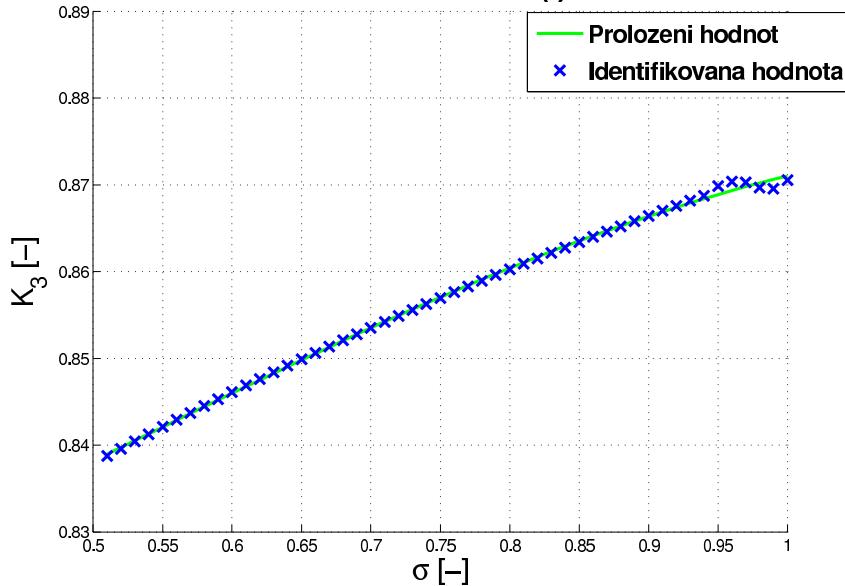


Obrázek 4.13: Statické zesílení v kanálu Steam flow

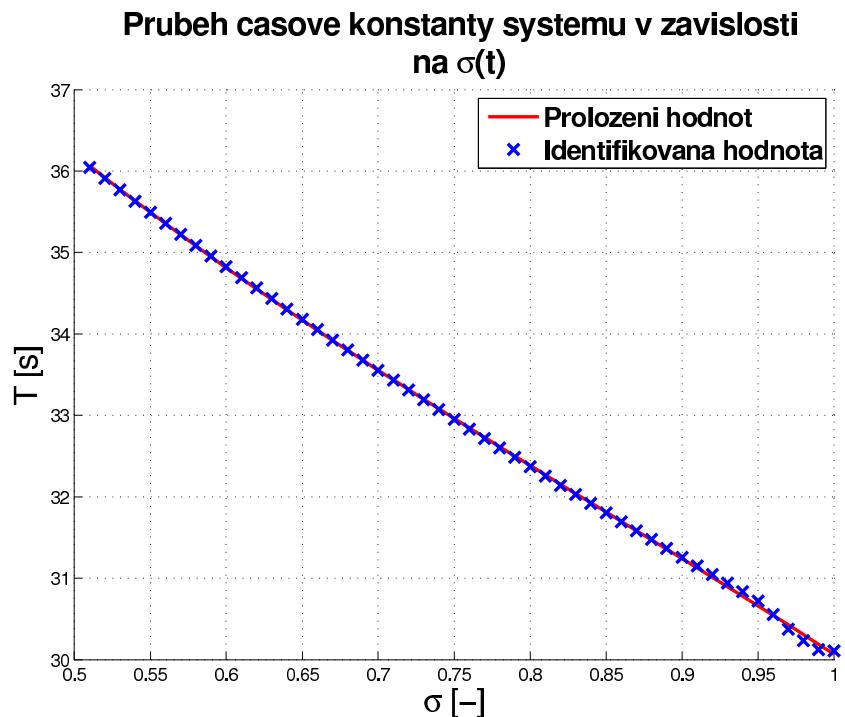
rizačním signálem  $\sigma(t)$ . Zvolené kritérium má tvar

$$J(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_k^{k+T_p-1}) = \sum_{i=k}^{k+T_p-1} ((\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i))^T \mathbf{Q}_i (\mathbf{y}(i) - \mathbf{y}_{ref}(i)) + (\Delta \mathbf{u}(i))^T \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{u}(i)) ,$$

**Staticke zesileni prenosu temp. reference → steam temp.  
v zavislosti na  $\sigma(t)$**



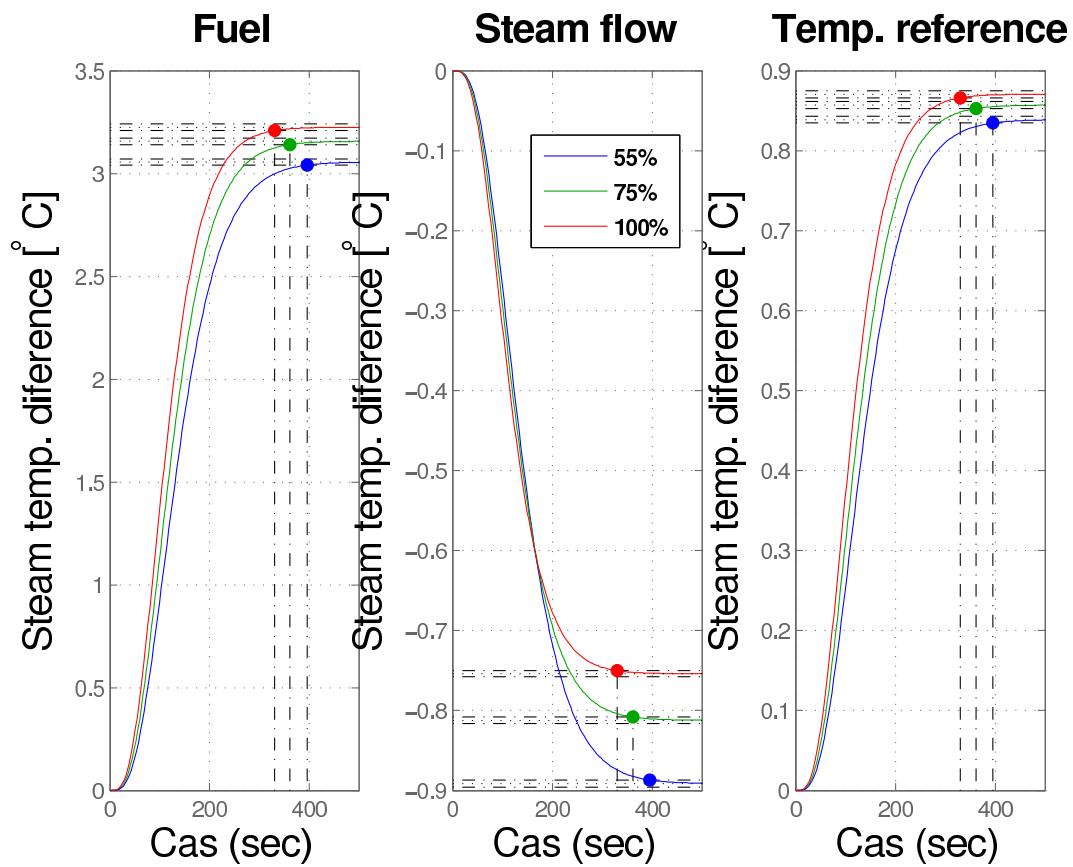
Obrázek 4.14: Statické zesílení v kanálu Temperature reference



Obrázek 4.15: Průběh časové konstanty

s tím, že platí

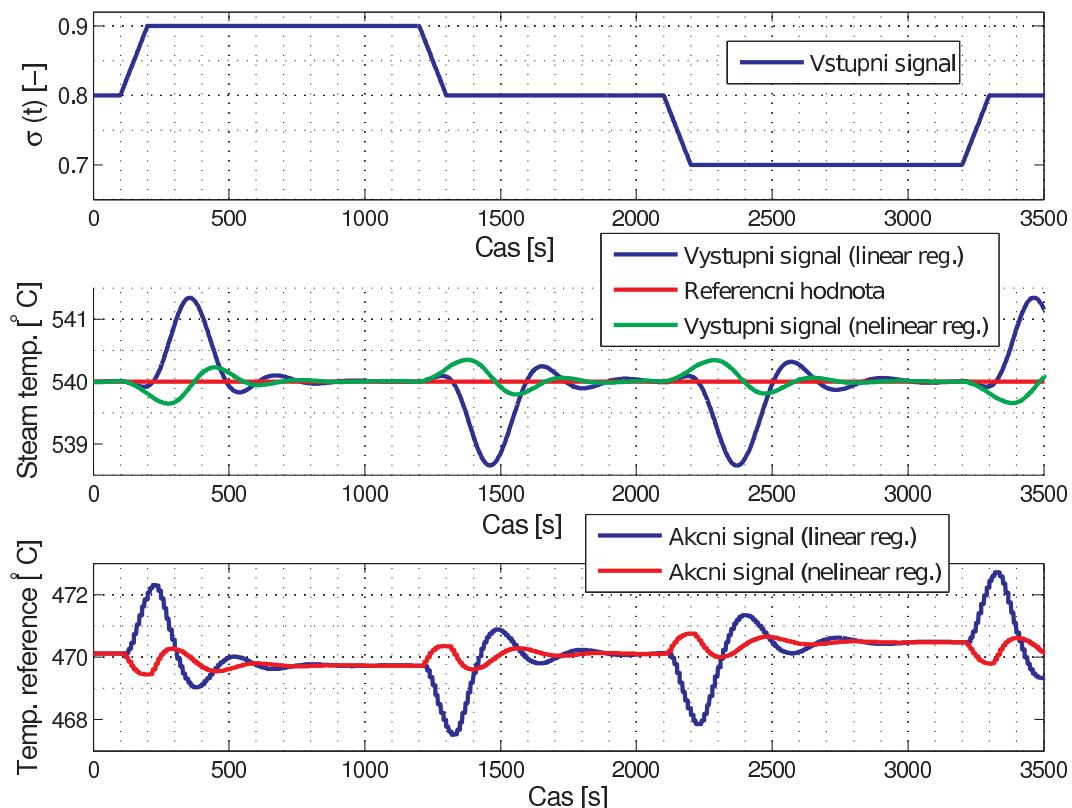
$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}(i+1) &= \mathbf{A}'(\sigma(t))\delta \mathbf{x}(i) + \mathbf{B}'(\sigma(t))\delta \mathbf{u}(i), \\ \mathbf{y}(i) &= \mathbf{C}'(\sigma(t))\delta \mathbf{x}(i) + \mathbf{D}'(\sigma(t))\delta \mathbf{u}(i) + \mathbf{y}_p(t).\end{aligned}$$



Obrázek 4.16: Odezva linearizovaného systému na jednotkový skok pro různé  $\sigma(t)$

## Testování

Po návrhu jsme přikročili k testování regulovaného systému. Obrázek 4.17 zobrazuje porovnání odezvy nelineárního systému regulovaného pomocí prediktivního regulátoru s modelem linearizovaným v jednom bodě (který je roven výkonové hladině  $\sigma(t) = 0,8$ ; v grafech označen jako linear reg.) a modelem získaným linearizací podél trajektorie (v grafech označen jako nonlinear reg.). Vstupní signálem pro tento experiment je rampa se sklonem 3 MW/min, která simuluje přechod z jedné výkonové hladiny elektrárny na druhou. Je vidět, že překmit v teplotě je výrazně nižší v případě použití prediktivního regulátoru s modelem linearizovaným podél trajektorie než při použití prediktivního regulátoru s jedním fixním modelem.

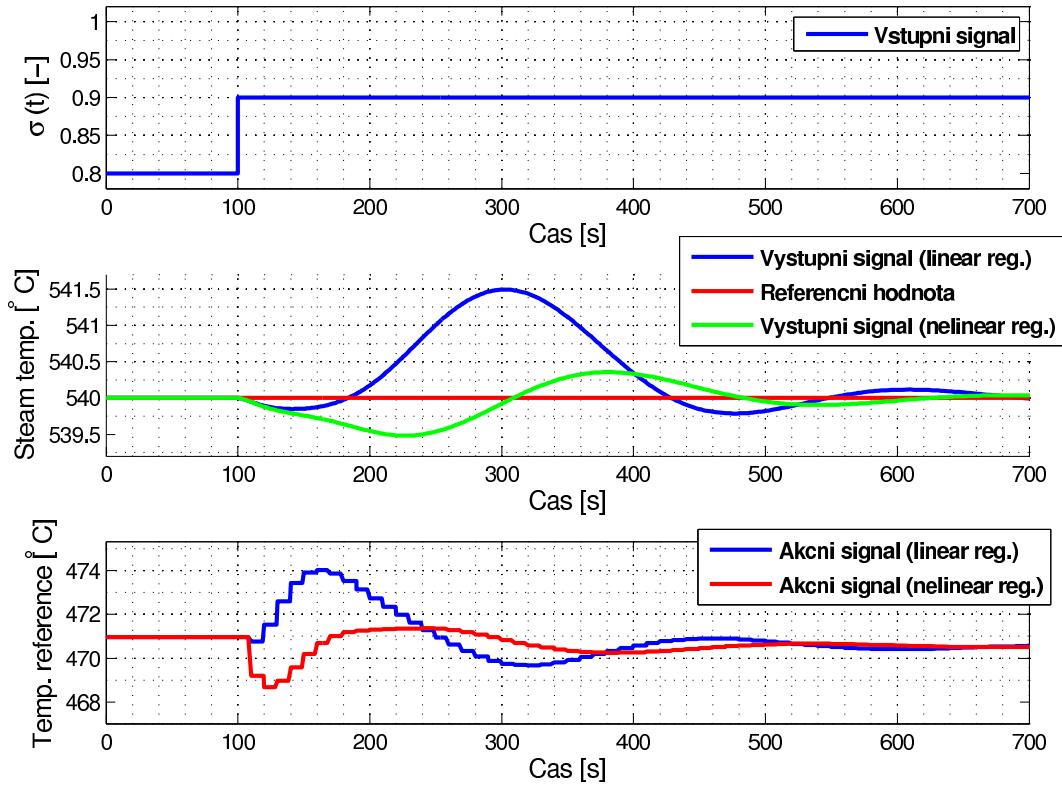


Obrázek 4.17: Odezva nelineárního systému na rampu v  $\sigma(t)$  pro různé regulátory

Na obrázku 4.18 je zachycena odezva na skok v kanálu Fuel.

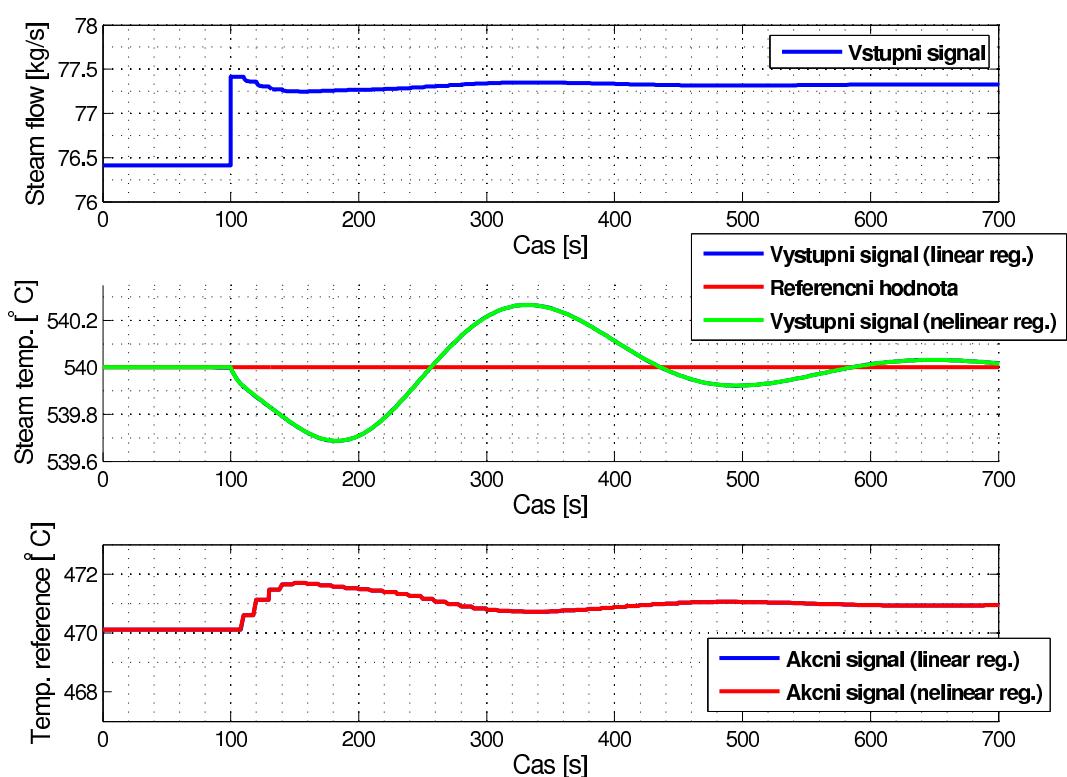
Obrázek 4.19 zachycuje odezvu systému na skok v kanálu Steam Flow. Vstupní signál nemá narozdíl od předchozích „hladký“ charakter, jelikož je ovlivňován akčním zásahem generovým MPC. Signály z řízení nelineárního systému pomocí obou regulátorů splývají.

Na obrázku 4.20 je zobrazen průběh výstupního signálu nelineárního systému pro

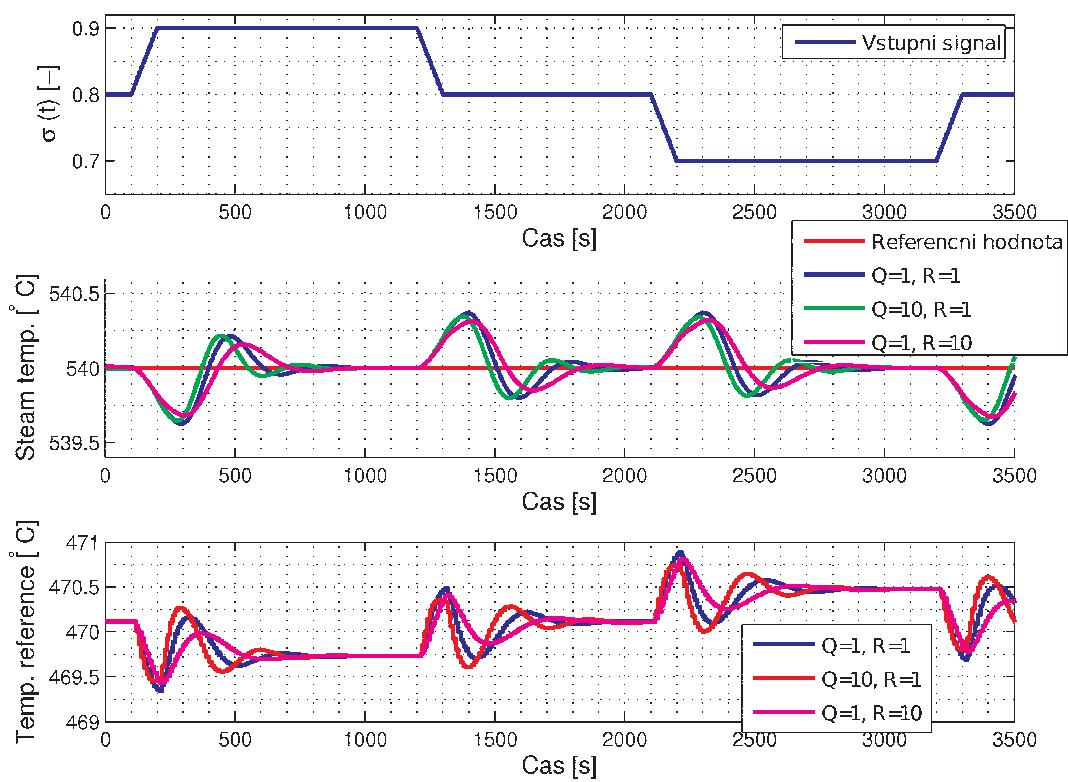


Obrázek 4.18: Odezva nelineárního systému na skok v kanálu Fuel pro různé regulátory

různé hodnoty váhových matic  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  MPC regulátoru. Hodnoty uvedené v obrázku jsou skaláry, jimiž je násobena odpovídající matice „cen“. Z průběhů je patrné, že pro nejvyšší „cenu“ řízení dojde k nejopatrnějšímu akčnímu zásahu ze zobrazených, ale doba ustálení je srovnatelná díky menšímu překmitu než v ostatních případech.



Obrázek 4.19: Odezva nelineárního systému na skok v kanálu Steam flow pro různé regulátory



Obrázek 4.20: Odczva nelineárního systému na rampu pro různé  $Q$  a  $R$

#### 4.2.6 Srovnání numerické náročnosti a kvality řízení

Návrh nelineárního modelu přehříváku, který je předmětem řízení v této práci, je založen na metodě konečných prvků. Pomocí diferenciálních rovnic jsou modelovány přestupy tepla mezi „horkou“ párou a stěnou, dále prostup stěnou a přestup mezi stěnou a „studenou“ párou. Jelikož počet elementů zapojených v sérii je v tomto konkrétním případě 20, znamenalo by to při plně nelineárním řízení vypočtení  $60 \times 60$  diferenciálních rovnic pro určení citlivostní funkce stavu vůči počátečnímu stavu,  $60 \times 3$  rovnic pro určení citlivostní funkce stavu systému na vstup v počátku,  $1 \times 60$  rovnic pro získání citlivostní funkce výstupu na stav systému v počátku a  $1 \times 3$  rovnic pro získání citlivostní funkce výstupu na vstup systému v počátku. Tento výpočet by se pak opakoval pro každý krok predikčního horizontu. Další výpočetní zátěž představuje iterativní proces hledání optimální řídicí posloupnosti pro tento nelineární problém.

Protože citlivostní funkce jsou vypočítávány jiným způsobem, který následně umožňuje použití lineárního prediktivního regulátoru, odpadá většina výše zmiňovaných výpočetních úkolů a výrazně se tedy snižuje mnoстví procesorového času nutné k výpočtu akčního zásahu.

Jelikož se v implementovaném případě jedná o řízení nelineárního systému, kde citlivostní funkce systému jsou approximovány na základě linearizace podél parametrizované trajektorie, je s přihlédnutím k výsledkům simulací s prediktivním regulátorem s LPV modelem možné učinit závěr, že kvalita regulace je lepší, než v případě řízení s MPC s lineárním modelem pro jednu výkonovou hladinu. Výsledky regulace budou v ideálním případě shodné s plně nelineárním řízením (návrh tohoto typu řízení nebyl implementován z důvodu jeho značné složitosti, který by vydal na samostatnou práci), ovšem s výrazným snížením výpočetní záteže.

# Kapitola 5

## Závěr

V předcházejících kapitolách jsme ve stručnosti uvedli současný stav okolo široké problematiky řízení lineárních i nelineárních systémů pomocí prediktivní regulace s konečným horizontem. Dále byly představeny citlivostní funkce, které vyjadřují vliv přírůstku stavu a vstupu na počátku na koncovou hodnotu stavu a výstupu systému. Pomocí nich byl ukázán způsob, jak určit predikci stavu systému, což je dílký výsledek využitelný v prediktivním regulátoru.

V další kapitole byla navržena metoda, pomocí níž lze při jistých podmínkách vypočítat hodnotu citlivostních matic bez použití numerického řešení diferenciálních rovnic s tím, že byla použita jejich approximace závislá na parametrizačního signálu. Takovýto koncept se dá využít například v případě řízení soustav s proměnnými parametry, které se mění s nezávislým parametrizačním signálem.

Výše uvedené poznatky byly ověřeny na nelineárním modelu přehříváku tepelné elektrárny. Z provedených simulací vyplývá, že řízení s tímto typem regulátoru je funkční a splňuje dané požadavky.

Veškeré simulace byly provedeny v programovém balíku Matlab & Simulink.

## **Příloha A**

### **Obsah přiloženého CD**

V adresáři /tex je text této práce, vygenerované a nakreslené obrázky.

V adresáři /matlab pak zdrojový kód použitých skriptů, simulační schémata, uložená data, apod.

# Literatura

- [1] Zoran Gajic, *Linear dynamic systems and signals*, Prentice Hall, 2003.
- [2] Vladimír Havlena, *Nelineární model ekonomizéru a přehříváku*, HPL report, Praha, 2000.
- [3] <http://cs.wikipedia.org/>, stav k 11.5. 2008.
- [4] <http://en.wikipedia.org/>, stav k 11.5. 2008.
- [5] Vladimír Havlena, Jan Štecha, *Moderní teorie řízení*, Ediční středisko ČVUT, 1999.
- [6] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Jaroslav Pekař, *Robust model predictive control*, Ph.D. thesis, ČVUT, 2005.
- [8] Frank Allgöwer, Rolf Findeisen, *An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control*, 21st Benelux Meeting on Systems Control, Veldhoven, 2002.
- [9] Kenneth R. Muske, Thomas A. Badgwell, *Disturbance modeling for offset-free linear model predictive control*, Elsevier Science Ltd., 2002.
- [10] Jan Štecha, Vladimír Havlena, *Teorie dynamických systémů*, Ediční středisko ČVUT, 1999.
- [11] Jan Štecha, *Optimální rozhodování a řízení*, Ediční středisko ČVUT, 1999.