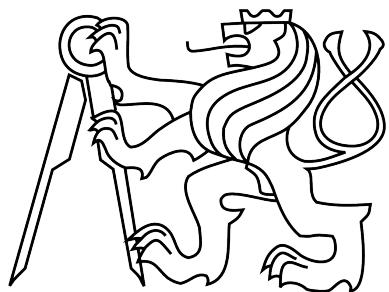


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Modelování a základní řízení pro
distribuovaný magnetický manipulátor

Praha, 2012

Autor: Tomáš Komárek

Autor: Tomáš Komárek
Kybernetika a robotika

Vedoucí: Ing. Jiří Zemánek
Katedra řídicí techniky, Fakulta elektrotechnická,
České vysoké učení technické v Praze

Oponent: Ing. Michal Dvořák
Katedra řídicí techniky, Fakulta elektrotechnická,
České vysoké učení technické v Praze

Rok: 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne

Tomáš Komárek

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Jiřímu Zemánekovi a dále Ing. Petru Kočárníkovi, Ph.D. a Mgr. Tomáši Ledvinkovi, Ph.D. za jejich cenné rady a čas, který mi ochotně věnovali při řešení dané problematiky.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá modelováním a základním řízením magnetické platformy určené k distribuované planární manipulaci. Platforma se skládá ze čtvercového pole cívek, rezistivní dotykové vrstvy umístěné nad maticí cívek a ocelové kuličky pohybující se po povrchu rezistivní fólie v důsledku silového působení pole. Cílem je vytvořit zjednodušený matematický model platformy uvažující pouze jednu cívku a jednorozměrný pohyb kuličky. Takto zjednodušený model je sestaven na základě experimentální identifikace, ale zároveň také odvozen z fyzikální podstaty. Závěr práce je věnován základnímu řízení polohy kuličky pomocí vytvořeného matematického modelu.

Abstract

This bachelor thesis deals with modeling and basic control of a magnetic platform for distributed planar manipulation. The platform consists of a rectangular array of electromagnetic coils, a resistive touch sensor layer located on top of the array and a steel ball that moves on the flat resistive foil controlled by the magnetic force field. The goal is to create a simplified mathematical model of the platform taking into account only one coil and one-dimensional motion of the ball. This way a restricted model can be formulated by using experimental identification as well as derivation from physical laws. The last part is dedicated to basic position control of the ball using created mathematical model.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Tomáš Komárek

Studijní program: Kybernetika a robotika
Obor: Systémy a řízení

Název tématu: **Modelování a základní řízení pro distribuovaný magnetický manipulátor**

Pokyny pro vypracování:

Vytvořte matematický model pro účely návrhu řízení magnetické platformy pro planární manipulaci. Na základě modelu navrhnete jednoduchý regulátor polohy železné kuličky v rovině. Platforma se skládá z matic elektromagnetů, u kterých lze řídit polaritu a velikost protékajícího proudu. Vytvořené magnetické pole silově působí na kovovou kuličku, která se jeho vlivem pohybuje v rovině nad elektromagnety.

1. Sestavte zjednodušený matematický model pro výpočet magnetické síly v rovině manipulace. Zanedbejte okrajové efekty na hranách platformy a počítejte s buzením pouze jediné cívky. Model sestavte pomocí metod experimentální identifikace dynamických systémů, ale pokuste se jej odvodit i z fyzikální podstaty.
2. Navrhněte pozorovatel stavů kuličky, který bude pracovat s naměřenými daty z rezistivního dotykového senzoru.
3. Vyzkoušejte řízení polohy kuličky pro případ pohybu v jednom směru mezi dvěma cívками. Řízení případně rozšiřte na manipulaci v rovině mezi čtveřicí cívek.

Seznam odborné literatury:

- [1] Halliday, Resnick, Walker. Fyzika.
- [2] M. P. J. Fromherz a W. B. Jackson, Force allocation in a large-scale distributed active surface, Control Systems Technology, IEEE Transactions on, roč. 11, čís. 5, s. 641-655, 2003.
- [3] K. F. Böhringer, H. Choset, a H. Choset, Distributed manipulation. Kluwer, 2000.

Vedoucí: Ing. Jiří Zemánek

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2012/2013

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.
děkan



V Praze dne 19. 4. 2012

Obsah

1	Úvod	1
2	Popis magnetické platformy	3
3	Teoretický rozbor	6
3.1	Mechanická část	7
3.1.1	Metoda uvolňování	7
3.1.2	Lagrangeovy rovnice II. druhu	8
3.2	Magnetická část	9
3.2.1	Magnetická síla	10
3.2.1.1	Magnetický dipólový moment kuličky	10
3.2.1.2	Magnetické pole	11
3.2.1.3	Pohybová rovnice bez tlumení	12
3.2.2	Tlumení	13
3.2.2.1	Pohybová rovnice s tlumením	14
3.3	Výsledky teoretické části	14
4	Experimentální identifikace	16
4.1	Zpracování naměřených signálů	17
4.2	Lineární pružina s tlumením	19
4.3	Nelineární pružina	23
4.4	Výsledky experimentální části	27
5	Základní řízení	28
5.1	Návrh pozorovatele	29
5.2	Stop at Top	32
5.3	Switching control	34
5.4	Bang-Bang regulátor	36

6 Závěr	38
Literatura	40
A Obsah přiloženého CD	I

Kapitola 1

Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvořit matematický model distribuovaného magnetického manipulátoru a následně na základě tohoto modelu vyzkoušet jednoduché řízení.

Distribuovaný magnetický manipulátor je nově zkonstruovaná magnetická platforma na Katedře řídicí techniky za účelem ověření pokročilých řídicích algoritmů pro distribuovanou planární manipulaci. Platforma se skládá ze čtvercového pole cívek, rezistivní dotykové fólie a ocelové kuličky. Dotykový senzor je umístěn nad maticí cívek, a tvoří tak rovinu pro ocelovou kuličku, která se pohybuje po jeho povrchu. Dotyková vrstva zatím slouží jako jediný zpětnovazební senzor určující polohu kuličky. Platforma umožňuje měnit polaritu a velikost vstupního napětí cívek. (Podrobnějšímu popisu se věnuje nadcházející kapitola.)

Napěťovým buzením jednotlivých cívek manipulátoru dochází v důsledku procházejícího proudu k vytváření magnetického pole. Toto pole silově působí na kuličku z feromagnetického materiálu a je příčinou jejího rovinného pohybu.

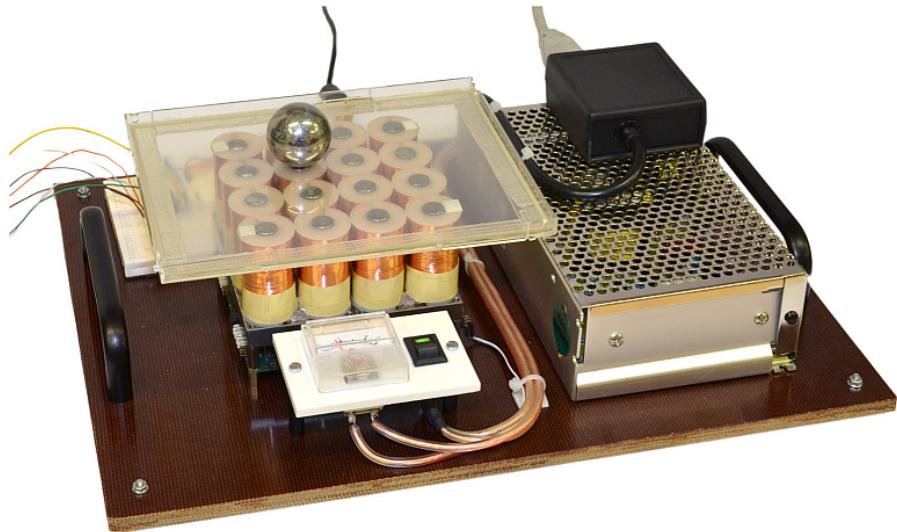
Tato práce se kvůli zjednodušení omezuje pouze na řízení, při němž je zapnutá nejvyšše jedna cívka a jednodimenzionální pohyb kuličky, která je přitahována sepnutou cívkou. Dále se pak zanedbávají okrajové efekty na hranách platformy a využívá se pouze kladná polarita budícího napětí.

Takto zjednodušený model se budeme snažit sestavit pomocí experimentální identifikace systému, ale zároveň v teoretické části této práce se jej pokusíme odvodit ze samotné fyzikální podstaty. Následujícím krokem bude navržení pozorovatele stavů kuličky

pracujícího s naměřenými daty o poloze kuličky z rezistivní dotykové vrstvy. Na závěr zkusíme s využitím pozorovatele navrhnout jednoduchý regulátor polohy.

Kapitola 2

Popis magnetické platformy



Obrázek 2.1: Distribuovaný magnetický manipulátor

Distribuovaný magnetický manipulátor představuje novou experimentální platformu pro účely ověřování a vývoje pokročilých řídících algoritmů pro distribuovanou planární manipulaci pomocí pole aktuátorů.

Momentální konfigurace zaznamenána na obrázku 2.1 je tvořena čtyřmi moduly o rozměrech 50×50 mm a výšce 75 mm. Jednotlivé moduly obsahují čtveriční cívek s jádry z magneticky měkké oceli. Indukčnost cívek je $L = 394$ mH, odpor vinutí $R_c = 146 \Omega$ a vzdálenost mezi jádry $l = 25$ mm. Tyto elektromagnety respektive aktuátory platformy jsou napájeny vstupním napětím $U_0 = 24$ V. Výkon elektromagnetů je řízen pomocí

pulsně šířkové modulace, neboli PWM¹.

Každý z těchto modulů tvoří samostatnou jednotku s vlastním 32 bitovým mikrokontrolérem ARM Cortex-M3 (LPC1311) běžícím na taktovací frekvenci 72 MHz. Přepínání cívek a řízení polarity proudu zajišťuje čtverice H-můstků. K monitorování proudu v cívce pro zpětnovazební účely je v každém můstku zařazen proudový bočník s odporem hodnoty $R_s = 0.02 \Omega$. Měření úbytku napětí na tomto odporu je realizováno přes operační zesilovač se zesílením $A = 200$. Modul komunikuje s okolím pomocí RS-485 sběrnice. Nakonec pro účely budoucího rozšíření (například o magnetometr, senzor teploty apod.) modul disponuje interní I2C sběrnicí.

Měření polohy kuličky zajišťuje rezistivní dotyková vrstva umístěná nad maticí elektromagnetů. Tento způsob měření má hned několik výhod. Jedná se především o levné řešení, které poskytuje teoreticky neomezené prostorové rozlišení a vysokou rychlosť vzorkování. Oba parametry jsou limitovány hlavně schopností A/D převodníku². Vzorkovací frekvence dotykové vrstvy byla v průběhu experimentů nastavena na $f_s = 100 \text{ Hz}$. Mezi nevýhody tohoto řešení patří nemožnost měřit více objektů zároveň a závislost na vyvinutém tlaku na povrch senzoru. Především závislost na tlaku představuje významný problém u této platformy, kvůli kterému by stálo za zvážení použití i jiného způsobu měření polohy. Vyvíjený tlak kuličky na dotykovou vrstvu totiž není konstantní, ale závisí na více parametrech jako je hmotnost kuličky, její materiálové vlastnosti, aktuální vzdálenost od středu jádra a proud protékající cívkou.

Experimenty v této práci byly prováděny s ocelovou kuličkou o poloměru $r = 15 \text{ mm}$ a hmotnosti $m = 110 \text{ g}$. Relativní permeabilita oceli je zhruba $\mu_r = 8000$. Jelikož platí, že $\mu_r \gg 1$, jedná se o feromagnetický materiál.

¹Pulse Width Modulation

²Analogově Digitální převodník

Parametr	Hodnota	Jednotka
Indukčnost cívek	$L = 394$	[mH]
Odpor vinutí	$R_c = 146$	[Ω]
Vzdálenost mezi jádry	$l = 25$	[mm]
Vstupní napětí cívek	$U_0 = 24$	[V]
Poloměr kuličky	$r = 15$	[mm]
Hmotnost kuličky	$m = 110$	[g]
Frekvence vzorkování	$f_s = 100$	[Hz]
Relativní permeabilita oceli	$\mu_r = 8000$	[1]

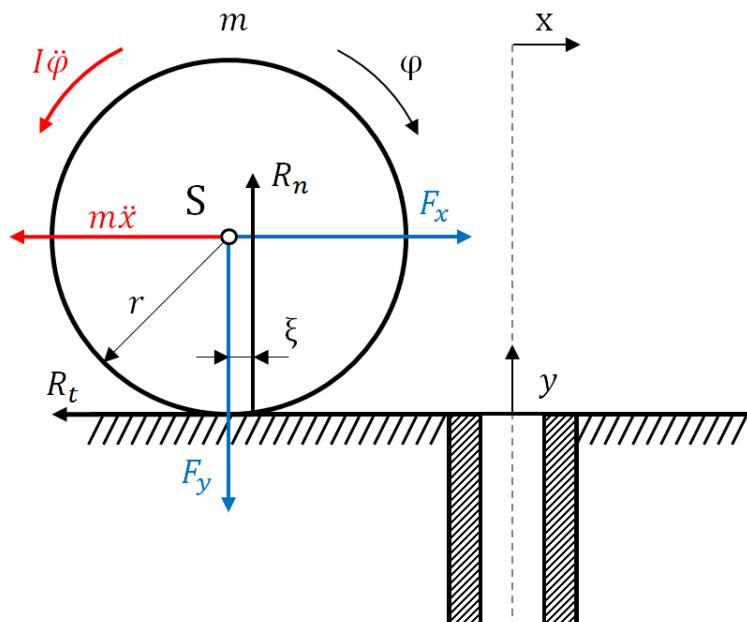
Tabulka 2.1: Některé důležité parametry systému

Tabulka 2.1 poskytuje přehled zmíněných parametrů systému. Firmware platformy se v průběhu vypracovávání práce nacházel ve fázi vývoje. Nicméně k významnému omezování nedocházelo. Pouze ne všechny funkcionality platformy byly plně dostupné. Jedenalo se například o měření proudu tekoucího cívkou a řízení polarity vstupního napětí. Uvedený problém s nekonstantním přítlakem kuličky na dotykovou vrstvu byl pouze korigován střední hodnotou offsetu.

Kapitola 3

Teoretický rozbor

Tato kapitola si klade za cíl odvodit zjednodušený matematický model platformy z fyzikální podstaty. Připomeňme, že za zjednodušený model považujeme jednorozměrný systém s jedinou cívkou, která svým silovým působením přitahuje kuličku směrem k jádru. Viz obrázek 3.1. Odvození je rozděleno na mechanickou a magnetickou část.



Obrázek 3.1: Zjednodušený model platformy

3.1 Mechanická část

Zde se budeme zabývat hledáním pohybové rovnice pro jednorozměrný pohyb kuličky. Předpokládáme, že vnější magnetická síla působí v jejím hmotném středu a dochází pouze k valivému pohybu, tzn. že kulička neprokluzuje.

3.1.1 Metoda uvolňování

Situaci zachycenou na obrázku 3.1 můžeme popsat soustavou rovnic:

$$F_x - R_t - m\ddot{x} = 0, \quad (3.1)$$

$$R_n - F_y = 0, \quad (3.2)$$

$$R_t r - R_n \xi - J\ddot{\varphi} = 0. \quad (3.3)$$

Rovnice (3.1) až (3.3) popisují rovnováhu sil a momentů v řezu kuličky při jejím pohybu ve směru osy x. Síly F_x , F_y [N] jsou složky vnější síly působící v hmotném středu S a R_n , R_t [N] jsou složky reakce mezi kuličkou a rovinou. Setrvačná síla $-m\ddot{x}$ [N] a setrvačný moment síly $-J\ddot{\varphi}$ [N·m] vyplývají z d'Alembertova principu¹. ξ [m] je rameno valivého odporu, m [kg] hmotnost, J [kg·m²] moment setrvačnosti a r [m] poloměr kuličky.

Aby docházelo k valivému pohybu kuličky, musí být splněna podmínka valení^[3]

$$|R_t| < f \cdot R_n, \quad (3.4)$$

kde f [1] je součinitel smykového tření. V opačném případě bude docházet k prokluzu.

Za předpokladu dokonalého valení bez prokluzování má kulička pouze jeden stupeň volnosti. Pokud zvolíme osu x jako výchozí souřadnici polohy hmotného středu, úhel natočení kuličky φ [rad] dopočítáme z kinematické podmínky $x = r\varphi$, respektive jeho zrychlení $\ddot{\varphi}$ [rad·s⁻²] z

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi}. \quad (3.5)$$

¹ „Přičtou-li se ke vtištěným silám (vnější síly i reaktivní síly vazeb) síly setrvačné, budou síly mechanického systému v rovnováze.“^[3]

Výsledná pohybová rovnice po dosazení vztahů (3.1), (3.2) do (3.3) a s využitím zmíněné podmínky (3.5) tedy zní

$$\underbrace{\left(m + \frac{J}{r^2} \right)}_{m_{\text{eff}}} \ddot{x} = F_x - \frac{\xi}{r} \operatorname{sgn}(\dot{x}) F_y. \quad (3.6)$$

Přidaná funkce $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ zajišťuje změnu polohy ramene valivého odporu ξ při změně směru pohybu. m_{eff} [kg] představuje tzv. efektivní hmotnost. V našem případě, kde moment setrvačnosti kuličky je

$$J = \frac{2}{5} mr^2, \quad (3.7)$$

efektivní hmotnost m_{eff} tvoří $\frac{7}{5}$ hmotnosti původní, tj.

$$m_{\text{eff}} = m + \frac{J}{r^2} = m + \frac{\frac{2}{5} mr^2}{r^2} = \frac{7}{5} m. \quad (3.8)$$

3.1.2 Lagrangeovy rovnice II. druhu

K rovnicím pro valivý pohyb kuličky se dá dojít i za pomocí Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q^*. \quad (3.9)$$

Za zobecněnou souřadnici polohy a rychlosti jsme zvolili osu x a její první derivaci. Q^* [N] reprezentuje vnější zobecněnou nekonzervativní sílu. Lagrangeovu funkci \mathcal{L} vyjadřující rozdíl celkové kinetické a potenciální energie systému definujeme jako

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 - \text{konst.} \quad (3.10)$$

První dva členy funkce \mathcal{L} vyjadřují kinetickou energii translačního a rotačního pohybu. Třetí člen je konstanta, která zastupuje neměnnou potenciální energii při vodorovném pohybu.

Kinetickou část Lagrangeovy funkce si můžeme snadnou úpravou vyjádřit pomocí efektivní hmotnosti

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(m + \frac{J}{r^2} \right)}_{m_{\text{eff}}} \dot{x}^2 - \text{konst.} = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} \dot{x}^2 - \text{konst.} \quad (3.11)$$

Virtuální práce vykonaná vnějšími nekonzervativními silami při infinitezimálním posunu zobecněných souřadnic je

$$Q^* \partial x = F_x \partial x - F_y \xi \partial \varphi = F_x \partial x - F_y \xi \frac{\partial x}{r} . \quad (3.12)$$

Z toho pro zobecněnou sílu vyplývá, že

$$Q^* = F_x - \frac{\xi}{r} F_y . \quad (3.13)$$

Po dosazení (3.10) a (3.13) do (3.9) a následné derivaci, obdržíme pohybovou rovnici shodnou s předchozí (3.6).

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_{\text{eff}} \dot{x} , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m_{\text{eff}} \ddot{x} , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 , \quad (3.14)$$

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = F_x - \frac{\xi}{r} \operatorname{sgn}(\dot{x}) F_y . \quad (3.15)$$

3.2 Magnetická část

V této části hledáme vnější působící sílu do odvozené pohybové rovnice kuličky (3.15) z předchozí sekce.

Předně je třeba uvést, že elektromagnetické pole představuje komplexní fyzikální pole, které má neznámé hodnoty v každém bodě. Úplný popis tohoto pole poskytuje soustava Maxwellových rovnic. Nás ale nezajímají hodnoty pole v jednotlivých bodech, a proto abychom se vyhnuli řešení Maxwellových rovnic, zavedeme v prvotním přiblížení řadu zjednodušení:

- zanedbáme vliv přítomnosti kuličky na magnetické pole buzené cívkou,
- zanedbáme konečné rozměry cívky a nahradíme ji ideálním nekonečně tenkým a dlouhým tyčovým magnetem,
- zanedbáme nelinearitu magnetizační charakteristiky materiálu kuličky a prohlásíme ji za dokonale magneticky měkkou.

3.2.1 Magnetická síla

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) . \quad (3.16)$$

Vztah (3.16) určuje sílu \mathbf{F} [N] působící na magnetický dipól, který je charakterizován magnetickým dipólovým momentem \mathbf{m} [$\text{A}\cdot\text{m}^2$], jenž se nachází v magnetickém poli s indukčností \mathbf{B} [T].

3.2.1.1 Magnetický dipólový moment kuličky

Jako magnetický dipól lze chápat libovolný objekt vytvářející kolem sebe magnetické pole. Jedná se například o běžný permanentní magnet, proudovou smyčku, elektron obíhající jádro² apod. Praktický význam dipólu slouží k popisu hmotných těles, protože základní částicí struktury všech látek je atom, jenž je vždy také magnetickým dipólem.

Feromagnetické látky tvoří tzv. domény, v nichž jsou magnetické dipoly shodně orientovány. Avšak bez vnějšího magnetického pole jsou tyto domény vůči sobě orientovány zcela náhodně a výsledná magnetizace \mathbf{M}_0 [$\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$] definována jako součet elementárních dipólových momentů \mathbf{m}_i děleno celkovým objemem látky V [m^3]

$$\mathbf{M}_0 = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (3.17)$$

je nulová.

Předchozí výraz (3.17) lze také zapsat jako definici výsledného dipólového momentu tělesa (v našem případě kuličky)

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}_0 V . \quad (3.18)$$

Speciálně pro měkká magnetika pak platí, že magnetizace tělesa \mathbf{M}_0 je lineárně závislá na intenzitě magnetického pole uvnitř tohoto tělesa \mathbf{H}_m [$\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$]

$$\mathbf{M}_0 = \chi_m \mathbf{H}_m , \quad (3.19)$$

kde χ_m [1] je magnetická susceptibilita materiálu.

²dokonalá proudová smyčka

V tomto prostředí můžeme vyjádřit magnetickou indukci uvnitř tělesa \mathbf{B}_m jako

$$\mathbf{B}_m = \mu \mathbf{H}_m = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_m = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}_m, \quad (3.20)$$

přičemž μ [$\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$] je permeabilita materiálu, μ_0 [$\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$] permeabilita vakua a μ_r [1] relativní permeabilita.

Pro magneticky homogenní a izotropní kouli vloženou do vnějšího magnetického pole \mathbf{B} se dá odvodit [4, str. 253], že magnetická indukce uvnitř koule je rovna

$$\mathbf{B}_m = 3 \frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m} \mathbf{B}. \quad (3.21)$$

S využitím vztahů (3.18), (3.19), (3.20) a (3.21) můžeme dipólový moment kuličky zapsat v podobě

$$\mathbf{m} = \frac{3V}{\mu_0} \frac{\chi_m}{3 + \chi_m} \mathbf{B}. \quad (3.22)$$

Uvážíme-li dále, že $\mu_r \rightarrow \infty$, takže i $\chi_m \rightarrow \infty$, protože $\mu_r = 1 + \chi_m$, pak se dipólový moment kuličky zjednoduší na výsledný tvar

$$\mathbf{m} = k_m \mathbf{B}, \quad k_m = \frac{3V}{\mu_0}. \quad (3.23)$$

3.2.1.2 Magnetické pole

Silové účinky magnetického pole na pohybující se náboj popřípadě magnetický dipól vyjadřuje magnetická indukce \mathbf{B} [T]. Pro kvantitativní popis magnetického pole je dále zavedena veličina magnetického indukčního toku Φ [Wb] libovolnou orientovanou plochou σ [m^2] jako

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.24)$$

kde $d\mathbf{S}$ je element plochy.

V případě ideálního nekonečně dlouhého a tenkého tyčového magnetu lze v jistém přiblžení na jeho konci uvažovat monopólový charakter s tokem

$$\Phi = 4\pi |\mathbf{r}|^2 |\mathbf{B}|, \quad (3.25)$$

přičemž $|\mathbf{r}|$ [m] je vzdálenost od pólu.

Závislost magnetické indukce na vzdálenosti od pólu z předchozího vztahu (3.25) pak můžeme zapsat takto

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (3.26)$$

Magnetický tok tenkým jádrem cívky je přibližně

$$\Phi = LI, \quad (3.27)$$

kde L [H] je indukčnost cívky a I [A] proud jí protékající.^[4]

S využitím vztahů (3.26) a (3.27) má výsledná magnetická indukčnost v závislosti na vzdálenosti od cívky a proudu v ní tvar

$$\mathbf{B}(I, \mathbf{r}) = \frac{LI}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (3.28)$$

3.2.1.3 Pohybová rovnice bez tlumení

Zanedbáme-li valivý odpor v odvozené pohybové rovnici kuličky (3.15) z důvodu, že $\xi \rightarrow 0$; a zároveň nebudeme uvažovat žádnou další příčinu tlumení pohybu, dostaneme dosazením (3.23) do (3.16) a následně (3.15) základní pohybovou rovnici bez tlumení

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = k_m \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{B}|^2. \quad (3.29)$$

Ze znalosti (3.28) a významem polohového vektoru $\mathbf{r} = (x, y)$, kde složka x je horizontální vzdálenost středu kuličky od cívky a y vertikální³, můžeme předchozí rovnici (3.29) rozepsat do tvaru

$$\ddot{x} = k_0 I^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x^2 + r^2)^2}, \quad k_0 = \frac{k_m L^2}{16\pi^2 m_{\text{eff}}}. \quad (3.30)$$

³V našem případě poloměr kuličky r .

3.2.2 Tlumení

Ve vodivém tělese pohybujícím se v magnetickém poli se indukují vířivé proudy (někdy též Foucaultovy), jejichž existence se projevuje tlumením tohoto pohybu v důsledku Lenzova zákona⁴.^[4]

Je zřejmé, že tento jev bude mít vliv na pohybující se kuličku, respektive její magnetický dipólový moment \mathbf{m} . Jedním ze způsobů, jak lze tento proces odhadnout,^[1] je skrze relaxační rovnici⁵ ve tvaru

$$\tau \frac{d}{dt} \mathbf{m} + \mathbf{m} = k_m \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

kde τ [s] je časová konstanta.

Z rozměrové analýzy dostáváme, až na bezrozměrný koeficient úměrnosti, že

$$\tau \sim r^2 \mu \gamma, \quad (3.32)$$

přičemž r [m] je poloměr kuličky, μ [$H \cdot m^{-1}$] = [$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$] permeabilita a γ [$S \cdot m^{-1}$] = [$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$] měrná elektrická vodivost materiálu.

Diferenciální rovnici (3.31) lze řešit iterací, kde v prvním kroku uvažujeme $\tau \rightarrow 0$, z čehož dostaneme $\mathbf{m} = k_m \mathbf{B}$. Tento odhad zpátky dosadíme za \mathbf{m} do výrazu $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$ v rovnici (3.31) a dostaneme

$$\mathbf{m} = k_m \left(\mathbf{B} - \tau \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right). \quad (3.33)$$

V magnetickém poli působí na magnetický dipól kromě magnetické síly (3.16) i silový moment \mathbf{M} [$N \cdot m$] daný vztahem

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

Tento moment se snaží natočit magnetický dipól do směru rovnoběžného s polem ($\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$) kvůli principu minimální potenciální energie. Ta je pro magnetické pole dána vztahem $E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ [J] a nabývá nejnižší hodnoty právě tehdy, když $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$. Poznamenejme jen, že záporně vzatý gradient této energie dává magnetickou sílu (3.16).

⁴ „Indukované pole působí proti změně, která ho vyvolala.“^[4]

⁵Diferenciální rovnice 1. řádu jako u rozpadu radioaktivních izotopů nebo RC obvodu.

Substitucí (3.33) do (3.34) s využitím postupně: převodového vztahu⁶ $\dot{\mathbf{B}} = \dot{\varphi} \times \mathbf{B}$, vektorové identity pro trojity vektorový součin⁷ $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, kinematické podmínky $\dot{x} = r\dot{\varphi}$ a $M = Fr \sin \alpha$, dostáváme pro směr magnetické indukce kolmý na osu otáčení kuličky výslednou tlumící sílu

$$F_t = -k_m \frac{\tau}{r^2} |\mathbf{B}|^2 \frac{dx}{dt} . \quad (3.35)$$

3.2.2.1 Pohybová rovnice s tlumením

Rozšířením pohybové rovnice (3.29) z předchozí sekce tlumící sílou (3.35) dostaneme

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = k_m \left(\frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{B}|^2 - \frac{\tau}{r^2} |\mathbf{B}|^2 \frac{dx}{dt} \right) . \quad (3.36)$$

Po rozepsání magnetické indukce \mathbf{B} podle (3.28) pak

$$\ddot{x} = k_0 I^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x^2 + r^2)^2} - \frac{\tau}{r^2} \frac{1}{(x^2 + r^2)} \frac{dx}{dt} \right), \quad k_0 = \frac{k_m L^2}{16\pi^2 m_{\text{eff}}} . \quad (3.37)$$

3.3 Výsledky teoretické části

Tato kapitola se zabývala odvozováním zjednodušeného matematického modelu magnetické platformy z fyzikální podstaty. Výsledná pohybová rovnice s uvážením všech odporů nakonec vyšla

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = k_m \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{B}|^2 - k_m \frac{\tau}{r^2} |\mathbf{B}|^2 \dot{x} - \frac{\xi}{r} \text{sgn}(\dot{x}) \left(mg + k_m \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{y=r} |\mathbf{B}|^2 \right) . \quad (3.38)$$

Provedeme-li experiment, ve kterém umístíme kuličku do vzdálenosti 4 cm od budící cívky, jež následně zapneme na plný výkon; obdržíme kmitající průběh kuličky kolem středu jádra. Tento průběh je zaznamenán vlevo na obrázku 3.2, kde je dále za pomocí numerické derivace vypočten průběh rychlosti a zrychlení. (Podrobnějšímu popisu zpracování naměřeného signálu se věnuje sekce v nadcházející kapitole.)

⁶Podobně jako $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\varphi} \times \mathbf{r}$ pro obvodovou rychlosť.

⁷Známé též jako pravidlo „bác míminus cáb“.

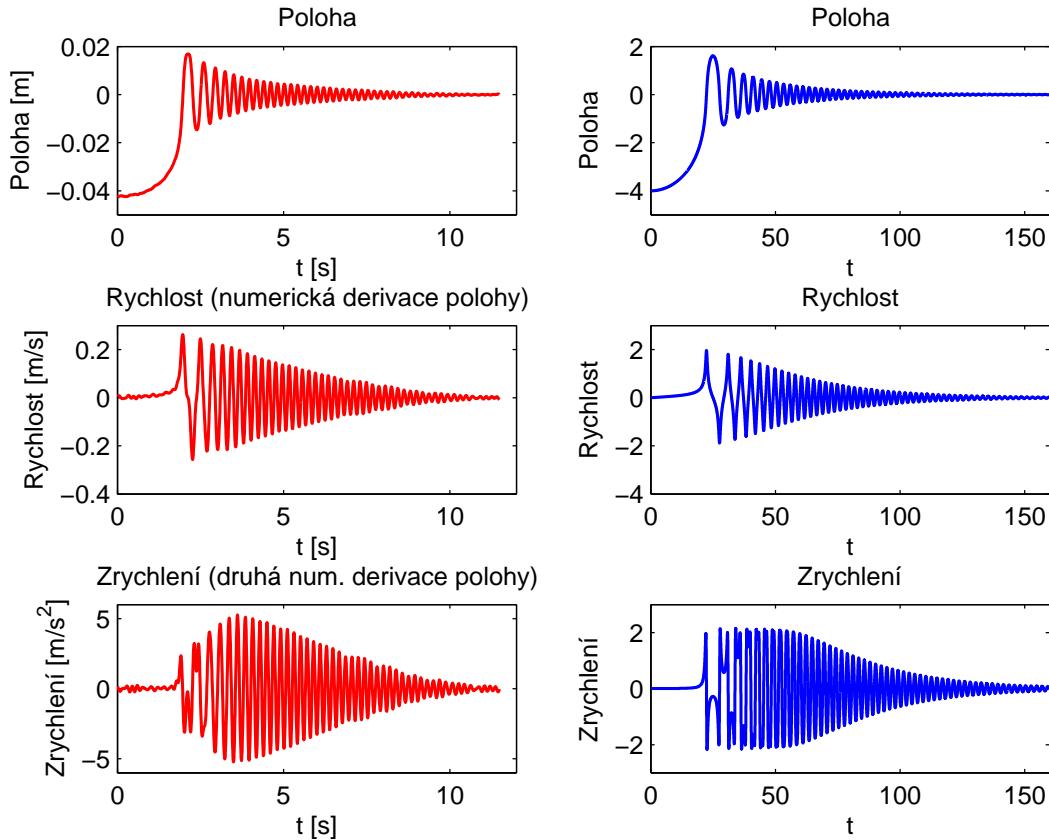
Grafy v pravé části obrázku 3.2 zobrazují řešení diferenciální rovnice

$$\ddot{x} = \frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{7}{100} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \frac{dx}{dt} \quad (3.39)$$

s počátečními podmínkami

$$x(t_0) = -4, \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (3.40)$$

a slouží ke kvalitativnímu porovnání s naměřenými průběhy (vlevo) jako důkaz relevance odvozené pohybové rovnice. Jedná se však pouze o ukázku průběhu, jelikož jednotky byly z důvodu zjednodušení numerické simulace normovány a koeficient $\frac{7}{100}$ odhadnut.



Obrázek 3.2: Porovnaní naměřených průběhu z experimentu (vlevo) s řešením diferenciální pohybové rovnice (3.39) (vpravo)

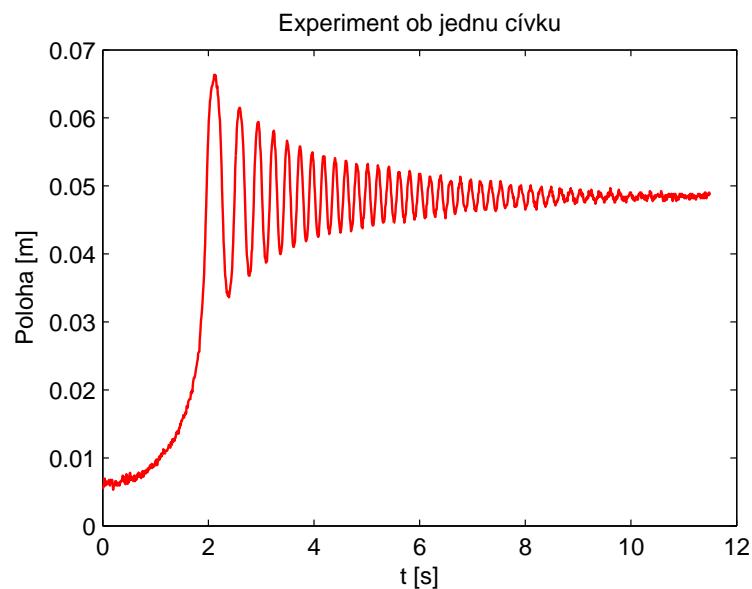
Jako jedním z dalších kroků by bylo vhodné proměřit $|\mathbf{B}|^2$ podél trajektorie středu kuličky. Měření případně rozšířit o závislost na protékajícím proudu nebo zkusit zjistit, jak velký vliv má přítomnost kuličky na magnetický indukční tok Φ při konstantním proudu v závislosti na její poloze.

Kapitola 4

Experimentální identifikace

V této kapitole se pokusíme sestavit zjednodušený model magnetické platformy bez teoretických znalostí z předchozí kapitoly, pouze na základě experimentální identifikace.

Za výchozí experiment budeme považovat už zmíněný pokus, ve kterém je kulička přitahována na vzdálenost dvou cívek. Pro zajištění shodných počátečních podmínek při opakování experimentu je kulička nejprve na krátký časový úsek přitažena cívkou v místě startovní pozice. Následně je na maximální výkon sepnuta ob jednu vzdálená cívka. V tom samém okamžiku začíná měření polohy. Obrázek 4.1 zaznamenává typický průběh naměřených dat při tomto experimentu.



Obrázek 4.1: Experiment ob jednu cívku s maximálním výkonem

4.1 Zpracování naměřených signálů

Z obrázku 4.1 je patrné, že naměřený signál obsahuje rušení na vyšších frekvencích. Tento šum má značně nepříznivý vliv na výpočet numerické derivace. Ta je pro identifikaci nezbytná kvůli určení výsledné působící síly ze zrychlení, což je druhá derivace polohy.

V první řadě se tedy budeme snažit o rekonstrukci původního signálu s nízkofrekvenční složkou, která má odeznívající charakter (nejedná se o harmonický signál s konstantní periodou), odstraněním šumu na vyšších frekvencích.

Za tímto účelem jsme navrhli dolní propust tvořenou číslicovým filtrem s konečnou impulsní odezvou, neboli FIR filtrem¹. Návrhové požadavky byly:

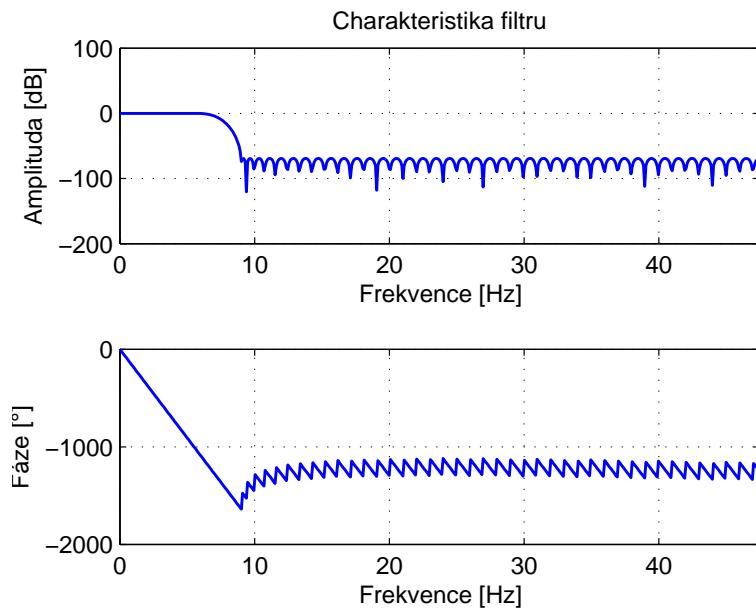
- hranice propustného pásma $f_p = 6 \text{ Hz}$ (odečteno ze dvou nejbližších překmitů),
- hranice nepropustného pásma f_n několik jednotek Hz nad propustným pásmem,
- minimální zvlnění v propustném pásmu,
- útlum v nepropustném pásmu alespoň -60 dB .

Filtr jsme navrhovali funkcí² `remez` využívající Remezův algoritmus. Tato funkce navrhuje filtry s lineární fázovou charakteristikou v propustném pásmu a tedy konstantním skupinovým zpožděním. To znamená, že všechny netlumené složky signálu se dostanou na výstup se stejným zpožděním.

Požadavkům vyhovoval filtr se 102 koeficienty, nepropustným pásmem $f_n = 9 \text{ Hz}$, zvlněním v propustném pásmu $\pm 0.06 \text{ dB}$ a útlumem zhruba -70 dB v nepropustném pásmu. Viz frekvenční charakteristika navrženého filtru na obrázku 4.2.

¹Finite Impulse Response

²Tato a další uvedené funkce byly použity v prostředí MATLAB.



Obrázek 4.2: Frekvenční charakteristika navrženého filtru

Za povšimnutí stojí lineární část fázové charakteristiky, která souvisí se symetrickou impulsní odezvou filtru a zajišťuje konstantní skupinové zpoždění. Kompenzaci tohoto zpoždění provedeme posunem výstupního signálu o polovinu délky filtru (v našem případě o 51 vzorků) směrem zpátky.^[5]

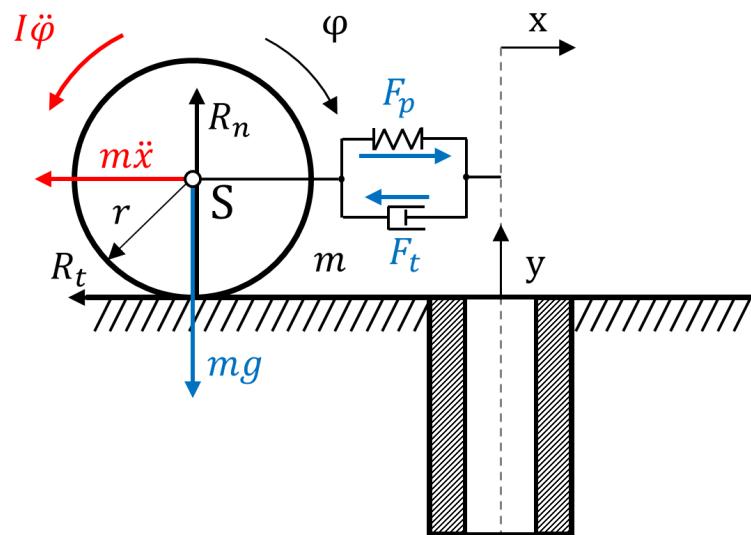
Další vhodnou úpravou je úrovňové posunutí signálu tak, aby kmital kolem nulové hodnoty. Toto provedeme zjištěním stejnosměrné složky kmitající části signálu a následně jejím odečtením od celkového signálu. K detekci počátku kmitající části jsme využili funkci `findpeaks`. Oscilující část jsme transformovali diskrétní Fourierovou transformací `fft`, ve spektru vynulovali první složku a signál zpět převedli do časové oblasti inverzní transformací `ifft`. Z rozdílu původního a takto upraveného signálu jsme určili stejnosměrnou složku.

Funkcí `findpeaks` jsme dále detekovali všechna lokání maxima, ze kterých jsme následně určili průběh útlumu (rozdíl amplitud) a průběh periody (rozdíl časové vzdálenosti maxim).

Filtrovaný signál byl nakonec dvakrát numericky derivován, přesněji diferencován funkcí `diff`, a vydelen vzorkovací periodou pro zjištění průběhu rychlosti a zrychlení.

4.2 Lineární pružina s tlumením

Kmitající část naměřeného průběhu připomíná známý systém tlumeného harmonického oscilátoru. Zkusíme tedy zjednodušený model popsat jako soustavu - kulička, pružina a tlumič. Přístup je patrný z obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Soustava kulička, pružina a tlumič

Zachycenou situaci na předchozím obrázku 4.3 můžeme popsat soustavou následujících rovnic:

$$-m\ddot{x} - R_t + F_p - F_t = 0, \quad (4.1)$$

$$-mg + R_n = 0, \quad (4.2)$$

$$R_t r - J\ddot{\varphi} = 0. \quad (4.3)$$

Rovnice (4.1) až (4.3) vyjadřují rovnováhu sil a momentů působících na kuličku při jejím pohybu ve směru osy x. F_p [N] je složka síly nehmotné lineární pružiny dané předpisem $F_p(x) = -kx$, kde k [$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$] je tuhost pružiny. Složka F_t [N] zastupuje sílu viskózního tlumiče s předpisem $F_t(\dot{x}) = b\dot{x}$ a koeficientem tlumení b [$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$]. Ostatní veličiny mají stejný význam jako u rovnic (3.1) až (3.3), a proto zde nebudou opakováně popsány.

Dosazením (4.3) do (4.1), rozepsáním sil podle předpisů a využitím kinematické podmínky $\ddot{x} = r\ddot{\varphi}$ (předpokládáme valivý pohyb) dostaneme rovnici harmonického oscilátoru

$$\underbrace{\left(m + \frac{J}{r^2} \right)}_{m_{\text{eff}}} \ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (4.4)$$

neboli

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_{\text{eff}}} \dot{x} + \frac{k}{m_{\text{eff}}} x = 0. \quad (4.5)$$

Neznámé koeficienty b a k identifikujeme z naměřených průběhů. Avšak využijeme-li k identifikaci klasické vztahy pro výpočet poměrného tlumení z překmitu a přirozené frekvence z doby ustálení a tlumení, tak se řešení takto identifikované soustavy nebude shodovat se skutečným průběhem (frekvenčně se budou rozcházet). Důvodem je proměnná frekvence kmitajícího systému (nejedná se o harmonický signál).

Nicméně pro pozdější konkrétní účel řízení je výhodné mít shodu alespoň po dobu prvních dvou oscilací. Proto odvodíme vztahy pro identifikaci vycházející pouze z rozdílu amplitud prvního a druhého překmitu $\Delta x = x_0 - x_1$ [m] a jejich časového rozestupu T [s].

Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty ve tvaru

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad (4.6)$$

kde α [s^{-1}] je součinitel tlumení a ω_n [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$] přirozená úhlová frekvence netlumených oscilací. Obecné řešení rovnice (4.6) lze pro kvaziperiodický průběh zapsat jako

$$x = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (4.7)$$

přičemž A a B jsou integrační konstanty a ω [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$] je úhlová frekvence tlumených oscilací. Časovou derivací obecného řešení (4.7) dostaneme

$$\dot{x} = -\alpha e^{-\alpha t} (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t). \quad (4.8)$$

Potom pro počáteční podmínky v čase $t_0 = 0$, kde $x = x_0$ a $\dot{x} = 0$, můžeme jejich dosazením do rovnic (4.7), (4.8) psát, že

$$A = x_0, \quad B = 0. \quad (4.9)$$

Pak výsledné řešení zní

$$x = x_0 e^{\alpha t} \cos \omega t . \quad (4.10)$$

Rozdíl amplitud prvních dvou překmitů Δx s časovým odstupem T můžeme pomocí řešení (4.10) vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{t_0} - x_{(t_0+T)} = x_0 e^{-\alpha t_0} \underbrace{\cos \omega t_0}_{=1} - x_0 e^{-\alpha(t_0+T)} \underbrace{\cos \omega(t_0+T)}_{=1} \\ &= x_0 (e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha(t_0+T)}) = x_0 \underbrace{e^{-\alpha t_0}}_{=1} (1 - e^{-\alpha T}) = x_0 (1 - e^{-\alpha T}) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Z toho pro součinitel tlumení vychází

$$\alpha = \frac{1}{T} \ln \frac{x_0}{x_0 - \Delta x} . \quad (4.12)$$

Řešení charakteristického polynomu k rovnici (4.6) má za předpokladu kvaziperiodického průběhu ($\omega_n > \alpha$) tvar

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = -\alpha \pm j \underbrace{\sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}}_{=\omega} . \quad (4.13)$$

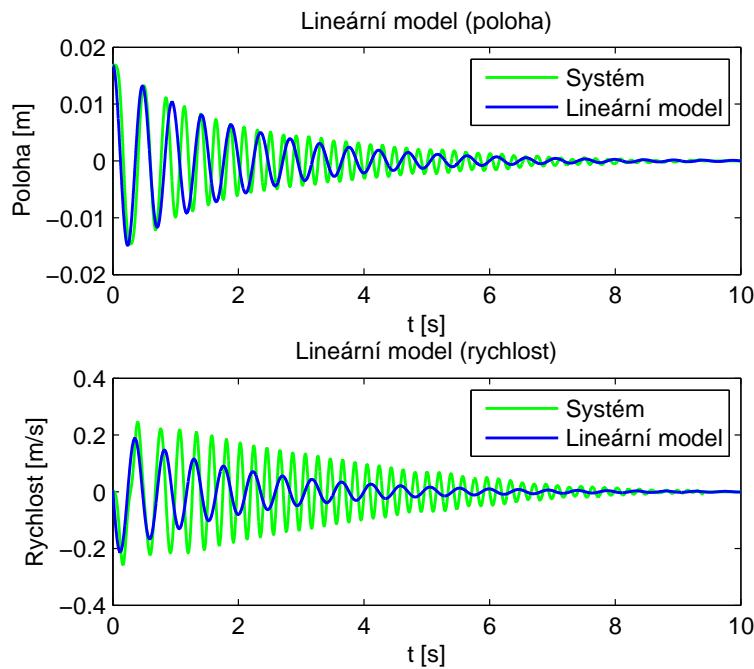
Proto pro ω_n můžeme psát

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (4.14)$$

Porovnáním rovnic (4.5) a (4.6) dostaneme výsledné vztahy pro identifikaci z prvních dvou překmitů

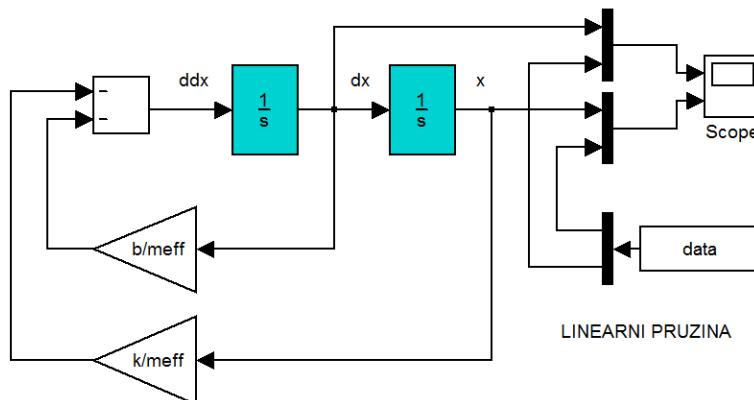
$$b = \frac{2m_{\text{eff}}}{T} \ln \frac{x_0}{x_0 - \Delta x} , \quad k = \frac{4\pi^2 m_{\text{eff}}}{T^2} + \frac{b^2}{4m_{\text{eff}}} . \quad (4.15)$$

Simulaci takto identifikovaného systému ($b = 0.1588 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, $k = 27.5633 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$) můžeme vidět na obrázku 4.4. Počáteční podmínky byly zvoleny v místě prvního překmitu.



Obrázek 4.4: Model lineární pružiny s tlumením (simulace)

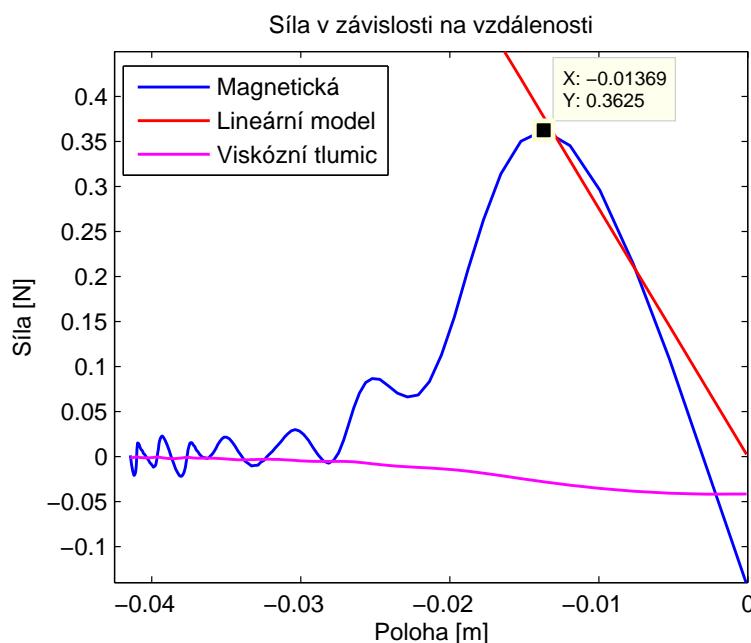
Z grafů na obrázku 4.4 je patrné, že model pružiny s tlumením vystihuje chování reálného systému pouze po dobu prvních dvou oscilací. Pak už se model za systémem opožděuje. Nicméně průběh polohy, co se týče amplitudy, zhruba odpovídá po celou dobu simulace, což se o rychlosti říci nedá. Doba ustálení je shodná pro model i reálný systém. Na obrázku 4.5 je simulinkové schéma zapojení.



Obrázek 4.5: Model lineární pružiny (simulinkové schéma)

4.3 Nelineární pružina

Berme, že model lineární pružiny přibližně vystihuje chování reálného systému. Toto však platí pouze pro počáteční podmínky v jistém blízkém okolí cívky (nulté hodnoty). Síla lineární pružiny je totiž přímo úměrná libovolně velké výchylce, kdežto magnetická síla od určité vzdálenosti slabne. Tato skutečnost je patrná z obrázku 4.6, kde je na základě zpracovaných dat z experimentu vykreslena působící síla v závislosti na vzdálenosti kuličky od cívky. Podle obrázku 4.1 se jedná o časový úsek 0 až 2 s.



Obrázek 4.6: Působící síla v závislosti na vzdálenosti od cívky

Poznámka: Za povšimnutí stojí fakt, že v místě nad cívku je velikost síly záporná. Jedná se ale o tzv. výslednou sílu, která je součtem dvou navzájem opačný sil „přitahující“ a tlumící³. Nad cívku se pak projeví pouze síla tlumící působící proti směru pohybu. Bohužel musíme konstatovat, že model viskózního tlumiče (úměrného rychlosti) s identifikovaným koeficientem tlumení b její velikost v tomto místě nevystihuje. □

Máme tedy lineární pružinu s předpisem $F_p = -kx$, která odpovídá chování reálného systému do vzdálenosti $x_{\text{ext}} = (1.37 \pm 0.09) \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Hodnota $0.09 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ je polovina průměru vzdálenosti od dvou okolních naměřených bodů. Nyní se pokusíme najít takovou funkci \mathcal{F}_p , jež by vystihovala průběh síly i pro oblast $x < x_{\text{ext}}$.

³Tyto síly od sebe nedokážeme oddělit.

Vycházejme z funkce f ve tvaru

$$f(x) = \frac{c}{x^n + \frac{d}{x}} ; \quad n \in \mathbb{N} ; \quad c, d \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad c \neq 0, d > 0. \quad (4.16)$$

Tato funkce má v blízkém okolí nuly lineární charakter (zanedbáme první člen ve jmenovateli), pak nabýde svého maxima/minima a konverguje k nule rychlostí n -té mocniny (zanedbáme naopak druhý člen jmenovatele).

Poznámka: Funkce f je pro sudá n v bodě $-d^{\frac{1}{n+1}}$ nespojitá⁴. Řešením je přidání funkce $\text{sgn}(x)$ k prvnímu členu jmenovatele, tj. $f(x) = \frac{c}{\text{sgn}(x)x^n + \frac{d}{x}}$, čímž zajistíme její lichost. \square

Nyní funkci f normalizujeme na f^* ve smyslu, že hodnota jejího globálního maxima bude rovna 1, a to právě v bodě x_e , neboť

$$\max f^* = f^*(x_e) = 1 ; \quad x_e \in \mathcal{D}(f^*). \quad (4.17)$$

Za tímto účelem funkci f derivujeme a její derivaci položíme rovnu nule.

$$\frac{df}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \implies x = x_e = \sqrt[n+1]{\frac{d}{n}}. \quad (4.18)$$

Tím jsme obdrželi bod x_e , ve kterém f nabývá hodnoty svého maxima⁵, a to právě

$$\max f = f(x_e) = \frac{cn}{d(n+1)} \sqrt[n+1]{\frac{d}{n}}. \quad (4.19)$$

Normalizovanou funkci f^* pak získáme jako

$$f^* = \frac{f}{\max f} = \frac{(n+1)x_e^n}{x^n + \frac{nx_e^{n+1}}{x}}. \quad (4.20)$$

Čímž jsme se zbavili koeficientů c, d a získali normalizovanou funkci f^* s hodnotou maxima $\max f^* = 1$ v bodě x_e .

Tedy průběh funkce f^* , kde $x \in \langle -x_e, x_e \rangle$, má přibližně lineární charakter (zanedbáme první člen ve jmenovateli)

$$f^* \approx \frac{n+1}{n} \frac{1}{x_e} x. \quad (4.21)$$

Pro $n \gg 1$, pak můžeme psát

$$f^* \approx \frac{1}{x_e} x, \quad \text{protože } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1. \quad (4.22)$$

⁴Což lze vidět ze tvaru $f(x) = \frac{cx}{x^{n+1} + d}$.

⁵Funkce f^* bude mít maximum ve stejném bodě.

Požadujeme-li, aby funkce \mathcal{F}_p měla v této oblasti stejnou směrnici jako $F_p = -kx$, zavedeme k f^* opravný koeficient ε takto

$$F_p = -kx \stackrel{!}{=} \varepsilon f^* = \varepsilon \frac{1}{x_e} x = \mathcal{F}_p, \quad \text{kde } \varepsilon = -x_e k. \quad (4.23)$$

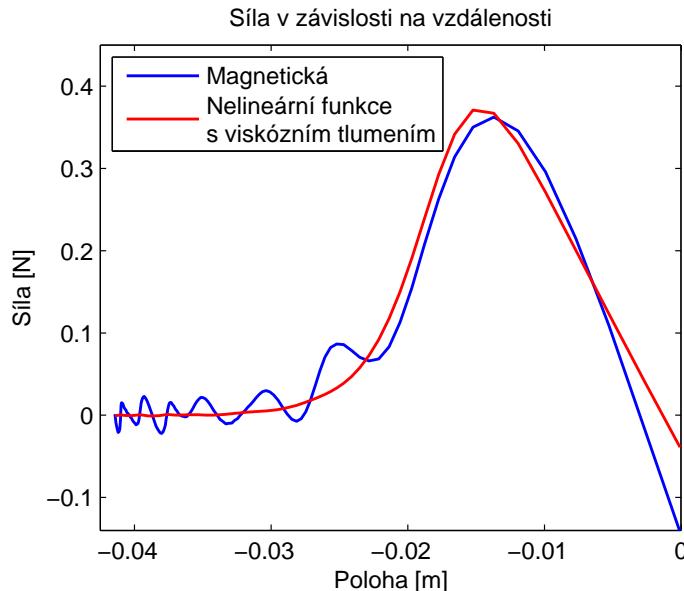
Novou funkci tuhosti pružiny proto definujeme jako

$$\mathcal{F}_p(x) = -x_e k f^*(x). \quad (4.24)$$

Za x_e jsme zvolili střední hodnotu naměřené vzdálenosti $x_{\text{ext}} = 1.37 \cdot 10^{-2}$ m. Následně jsme postupnou iterací n a porovnáváním výsledného průběhu síly stanovili stupeň mocniny $n = 8$. Jelikož se jedná o sudé číslo, byla přidána funkce $\text{sgn}(x)$ k mocninnému členu ve jmenovateli⁶. Na závěr jsme podle simulace ladili vzdálenost x_e v rozmezí $\pm 0.09 \cdot 10^{-2}$ m. Největší shodě s naměřeným průběhem polohy odpovídala hodnota $x_e = 1.45 \cdot 10^{-2}$ m. Rozepsáním (4.24) pro $n = 8$ jsme dostali

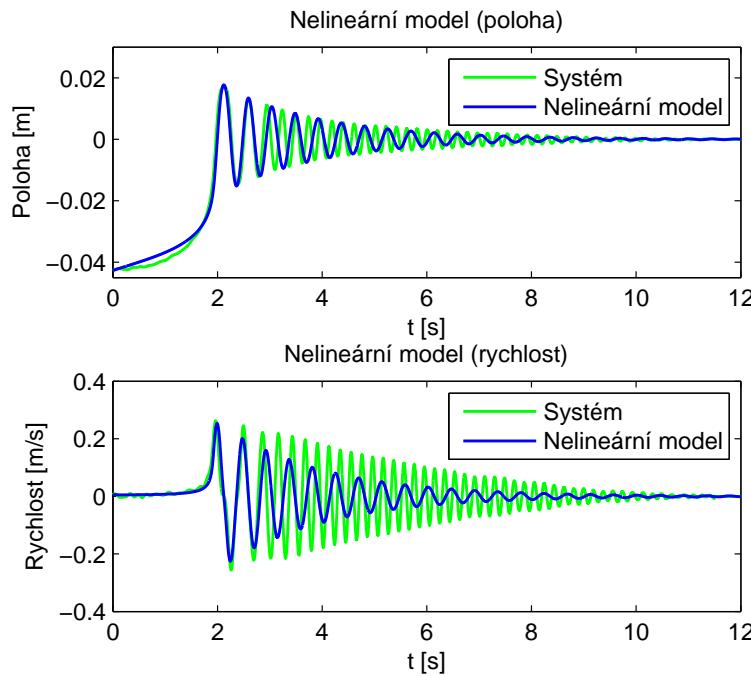
$$\mathcal{F}_p(x) = -kx_e \frac{9x_e^8 x}{\text{sgn}(x)x^9 + 8x_e^9}, \quad (4.25)$$

kde $x_e = 1.45 \cdot 10^{-2}$ m. Graf této nelineární funkce $\mathcal{F}_p(x)$ s přičtením $F_t(\dot{x})$ (viskózního tlumiče) je znázorněn na obrázku 4.7. Simulace pro počáteční podmínky shodné s experimentem je pak k vidění na obr. 4.8.



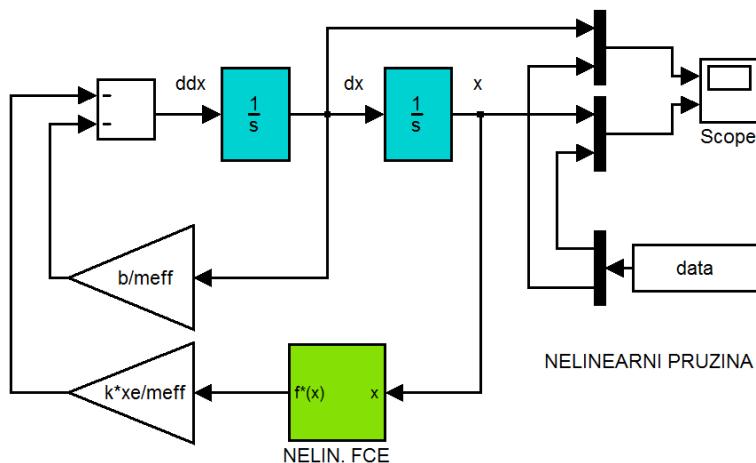
Obrázek 4.7: Graf nelineární funkce pružiny

⁶Viz předchozí poznámka o nespojitém bodě.



Obrázek 4.8: Model nelineární pružiny s tlumením (simulace)

Podle výsledků simulace model s nelineární pružinou \mathcal{F}_p velice věrohodně vystihuje chování reálného systému pro vzdálenosti větší než x_{ext} . Důsledkem je mimo jiné vylepšení průběhu polohy a rychlosti v místech prvních dvou oscilací, kde se kulička po krátkou dobu nachází za hodnotou x_{ext} . Od této hodnoty totiž silové účinky pole značně slábnou, což model s lineární pružinou přímo úměrnou výchylce není schopen postihnout. Na obrázku 4.9 je simulinkové schéma teď už nelineárního modelu.



Obrázek 4.9: Model nelineární pružiny (simulinkové schéma)

4.4 Výsledky experimentální části

Cílem této kapitoly bylo vytvořit zjednodušený matematický model platformy na základě experimentální identifikace.

Systém jsme identifikovali jako soustavu - kulička, pružina a tlumič s pohybovou rovnicí

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = \mathcal{F}_p(x) - F_t(\dot{x}), \quad (4.26)$$

neboli

$$m_{\text{eff}} \ddot{x} = -kx_e f^*(x) - b\dot{x}, \quad (4.27)$$

kde f^* je nelineární funkce daná předpisem (4.20). Parametr k (tuhost pružiny) a b (koefficient tlumení) jsme identifikovali z naměřených dat podle odvozených vztahů (4.15). Kritickou vzdálenost x_e , od které silové účinky pole začínají značně slábnout, jsme pak určili z grafu průběhu síly v závislosti na vzdálenosti kuličky od cívky. Viz obrázek 4.6.

Porovnání takto identifikovaného modelu a reálného systému pro výchozí experiment (ob jednu cívku s maximálním výkonem) je na obrázku 4.8. Výsledky dopadly obdobně i pro různé počáteční podmínky (startovní pozice kuličky). Což znamená, že model věrohodně vystihoval skutečnost pouze po dobu prvních dvou oscilací. Analogie s pružinou tedy platí jenom do určité míry a neodpovídá reálné fyzikální podstatě systému.

Identifikace byla dále provedena na experimentech s 58%, 60%, 65%, 70%, 75% a 80% výkonem⁷ cívky. Snahou bylo nalézt závislost parametrů k , b a x_e na vstupním výkonu, a získat tak proporcionální model. U všech třech parametrů se objevil zhruba lineární charakter. Avšak závislost modelu na přesnosti x_e je kruciální a poměrně malá odchylka (v rádu 10^{-4} m) má značný vliv na průběh simulace. Důvodem je výskyt parametru x_e ve vysokých mocninách funkce f^* . Možným řešením by bylo provést větší počet experimentů s menším krokem.

⁷Procenta odpovídají střídě PWM modulace.

Kapitola 5

Základní řízení

Úkolem závěrečné kapitoly je vyzkoušet základní řízení polohy kuličky s využitím sestavených matematických modelů z předchozích kapitol. Poznamenejme, že model vycházející z fyzikální podstaty (3.38) ještě nebyl v průběhu zpracovávání této části dostupný.

Vycházejme tedy z pohybové rovnice lineárního modelu (4.5)

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_{\text{eff}}} \dot{x} + \frac{k}{m_{\text{eff}}} x = 0. \quad (5.1)$$

Zavedením stavových proměnných x_1, x_2 pro polohu a rychlosť

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad (5.2)$$

dostaneme s využitím faktu, že $\dot{x}_1 = x_2$, stavovou rovnici druhého řádu ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m_{\text{eff}}} & \frac{-b}{m_{\text{eff}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-k}{m_{\text{eff}}} & \frac{-b}{m_{\text{eff}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} (u - 1), \quad u \in \{0, 1\}. \quad (5.3)$$

Přičemž matici \mathbf{A} nazýváme stavovou maticí a vektor \mathbf{x}^T vektorem stavových proměnných. Vstup $u(t)$ nabývá hodnot 0, 1 a reprezentuje vypnutí, respektive zapnutí cívky. Pro hodnotu vstupu $u = 1$ se jedná o lineární časově invariantní (LTI¹) systém odeznívající na počáteční podmínky $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$. V opačném případě, kdy $u = 0$, se systém chová podle Newtonova prvního pohybového zákona. Kulička tedy setrvává v klidu nebo v rovnoměrně přímočarém pohybu, protože pro ni platí $\dot{x}_2 = 0 \wedge \dot{x}_1 = x_2$.

¹Linear Time-Invariant

Je-li výstupem systému poloha, můžeme psát výstupní rovnici jako

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}, \quad (5.4)$$

kde za $y(t)$ označujeme výstup systému a matici C nazýváme výstupní maticí.

Vlastní čísla stavové matice A pro případ $u = 1$ a maximální výkon cívky vycházejí podle rovnice (4.13) takto

$$\lambda_{1,2} = -0.5156 \pm 13.3885j. \quad (5.5)$$

Jedná se tedy o asymptoticky (vnitřně) stabilní systém v Hurwitzově smyslu, jelikož jeho póly leží pouze v levé komplexní polorovině.^[2] Toto pro vstup $u = 0$ už obecně neplatí, protože systém je na mezi stability.

Připomeňme, že lineární model (4.5) je limitním případem nelineárního (4.27) pro pohyb kuličky v blízkém okolí cívky. Velikost okolí souvisí s aktuálním výkonem cívky, respektive protékajícím proudem. Tuto závislost v aktuátoru, ale bohužel neznáme. Podle (3.30) se dá ovšem předpokládat, že bude kvadratická. V případě maximálního výkonu jsme velikost okolí identifikovali jako $x_e = 1.45 \cdot 10^{-2}$ m.

5.1 Návrh pozorovatele

Model je však pouze approximací skutečného systému (soustavy). Obecně za předpokladu shodných počátečních podmínek a omezeného času platí

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &\approx \mathbf{x}(t), \\ \hat{y}(t) &\approx y(t) \quad \text{pro } t > 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde $\hat{\mathbf{x}}(t)$, $\hat{y}(t)$ značí odhad vnitřních stavů a výstupu modelu, zatímco $\mathbf{x}(t)$, $y(t)$ jsou skutečné stavy a výstup soustavy.

Model v našem případě přibližně odpovídá skutečnosti pouze po dobu prvních dvou oscilací, pak se jeho odhad výstupu $\hat{y}(t)$ rozchází se skutečností $y(t)$. Viz obrázek 4.8.

Avšak zavedením zpětné vazby do modelu z výstupu soustavy $y(t)$ se můžeme pokusit jeho odhad vylepšit. Vytvoříme tzv. pozorovatele soustavy

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t),\end{aligned}\tag{5.7}$$

přičemž $\mathbf{L}^T \in \mathbb{R}^2$ je vektor zesílení a vstup uvažujeme² $u = 1$. Rozepsáním stavové rovnice podle výstupní dostaneme

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{LC})}_{\mathbf{A}_{\text{poz}}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Ly}(t),\tag{5.8}$$

kde \mathbf{A}_{poz} je stavová matice pozorovatele. Volbou \mathbf{L} tedy měníme vlastní čísla matice \mathbf{A}_{poz} , a tím pádem i konvergenci a rychlosť odhadování. Jelikož se jedná o úplně pozorovatelný systém (matice pozorovatelnosti

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{5.9}$$

má plnou hodnot), můžeme póly pozorovatele volit libovolně. K výpočtu výsledného vektoru zesílení \mathbf{L}^T podle požadovaných pólů c_1, c_2 lze využít modifikovaného Ackermannova vzorce^[2] pro pozorovatele

$$\mathbf{L} = p_{\text{poz}}(\mathbf{A}) \mathbf{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T.\tag{5.10}$$

$p_{\text{poz}}(\mathbf{A})$ je dosazení stavové matice \mathbf{A} do požadovaného polynomu p_{poz} , tj.

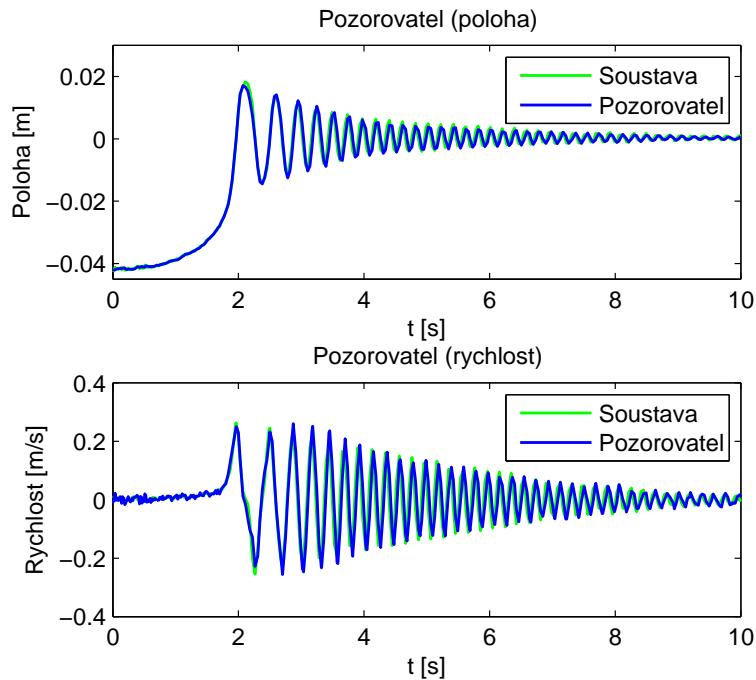
$$p_{\text{poz}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - (c_1 + c_2)\mathbf{A} + c_1 c_2 \mathbf{I}\tag{5.11}$$

s tím, že \mathbf{I} je jednotková matice.

Póly pozorovatele $c_{1,2}$ jsme volili jako násobky zvlášť reálné a imaginární části vlastních čísel $\lambda_{1,2}$. Čím rychlejšího pozorovatele jsme zvolili (póly umístili dál do levé komplexní pololoroviny), tím rychleji konvergoval odhad $\hat{y}(t)$ k skutečnému výstupu $y(t)$. Zároveň ale docházelo k přenášení většího vlivu šumu měření na odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(t)$. Jako optimální polohu pólů jsme pak na základě opakování zkoušení a porovnávání výsledků zvolili

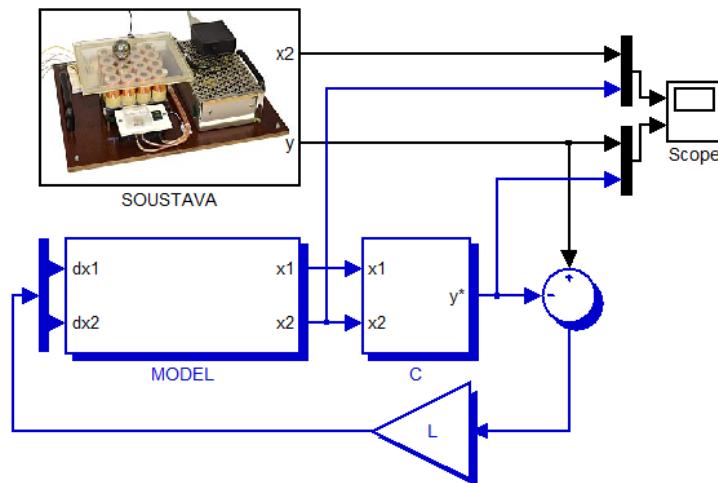
$$c_{1,2} = 30 \cdot \Re(\lambda_{1,2}) + 1.2 \cdot \Im(\lambda_{1,2})j.\tag{5.12}$$

²Pouze z důvodu zjednodušení rovnic (5.7) a (5.8), jinak platí i pro $u = 0$.



Obrázek 5.1: Pozorovatel soustavy (průběh simulace)

Výsledek simulace takto navrženého pozorovatele lze vidět na obrázku 5.1. Z grafu je patrné, že pozorovatel znatelně vylepšil odhad průběhu polohy i rychlosti. Zároveň už také nedochází k tak významnému zpoždování odhadů. Simulace byla provedena na předem naměřených avšak nefiltrovaných datech. Důvodem je možnost jednoduchého porovnání rychlostí. Simulinkové zapojení pozorovatele je na obr. 5.2. Bloček s názvem MODEL ukrývá model s nelineární pružinou 4.9.

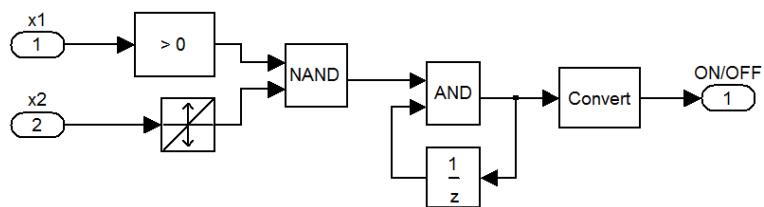


Obrázek 5.2: Zapojení pozorovatele soustavy (simulinkové schéma)

5.2 Stop at Top

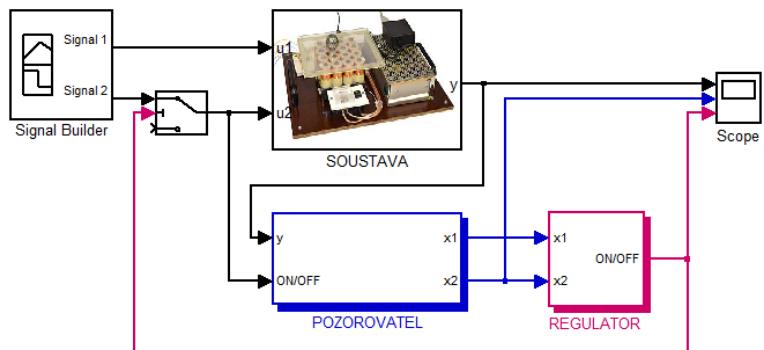
Hlavní funkcí pozorovatele je takzvaná rekonstrukce stavů neboli poskytování informací o stavech soustavy, jenž jinak nejsme schopni měřit. Konkrétně v našem případě se jedná o odhad okamžité rychlosti kuličky (stav x_2). Tento odhad využijeme v úkolu s názvem Stop at Top, jehož cílem je zastavit kuličku na vrcholu prvního překmitu.

Kulička se v místě překmitu nachází v maximu své polohy, tudíž její derivace, tzn. rychlosť, je rovna nule. Tohoto faktu využívá jednoduchý řídicí algoritmus znázornený na obrázku 5.3.



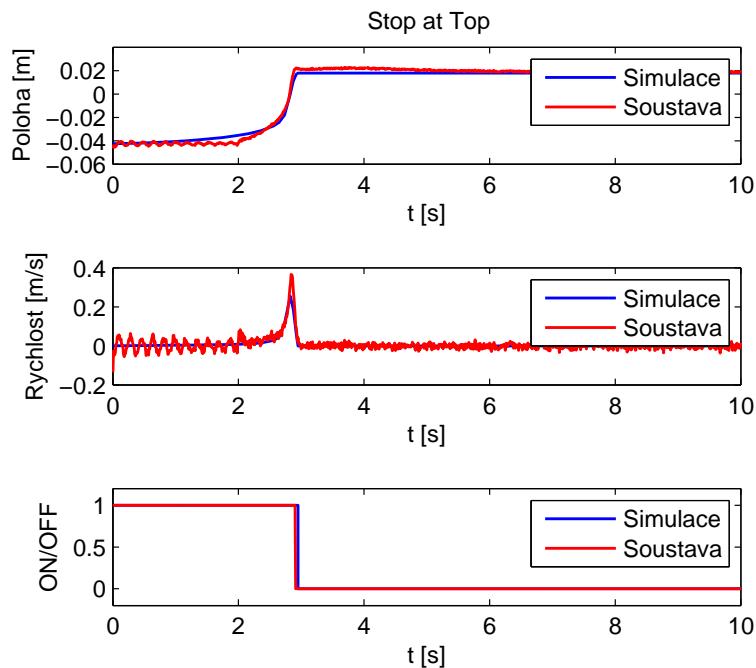
Obrázek 5.3: Stop at Top řídicí algoritmus (simulinkové schéma)

Vstupem jsou stavy x_1 , x_2 a výstupem řídící signál ON/OFF ($u = 1 \vee u = 0$). Jakmile se kulička nachází za cívkou ($x_1 > 0$) a zároveň dochází k průchodu její rychlostí nulovou hodnotou, je výstupní signál regulátoru roven logické nule a cívka je vypnuta. Zpožďovací člen **DELAY** ve smyčce s logickým prvkem **AND** zabraňuje opětovnému sepnutí cívky (například v důsledku vyskytujícího se šumu v odhadu rychlosti). Tento rozhodovací algoritmus je umístěn v bločku s názvem **REGULATOR**, jenž je zapojen k soustavě a pozorovateli podle obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Stop at Top zapojení systému (simulinkové schéma)

Signal Builder obsahuje dva signály. První puls slouží k přitažení kuličky do startovní pozice (ob jednu cívku vzhledem k řídicí) a druhý signál je jednotkový skok pro řídicí cívku, který má náběžnou hranu v krátkém čase po spádové hraně pulsu. Obrázek 5.5 pak porovnává výsledky simulace se skutečným experimentem provedeným na soustavě s pozorovatelem a regulátorem podle předchozího zapojení 5.4.



Obrázek 5.5: Stop at Top porovnání experimentu se simulací

Z obrázku 5.5 je patrné, že řídicí obvod 5.3 byl úspěšný a kuličku v místě překmitu zastavil. Okamžik s nulovou rychlostí je totiž velice krátký kvůli zrychlení, které nabývá v tomto bodě naopak své nejvyšší hodnoty co do velikosti. Mimo jiné také simulace modelu v této úloze velice dobře odpovídá skutečnému chování soustavy, což je důsledkem identifikace právě podle prvních dvou oscilací.

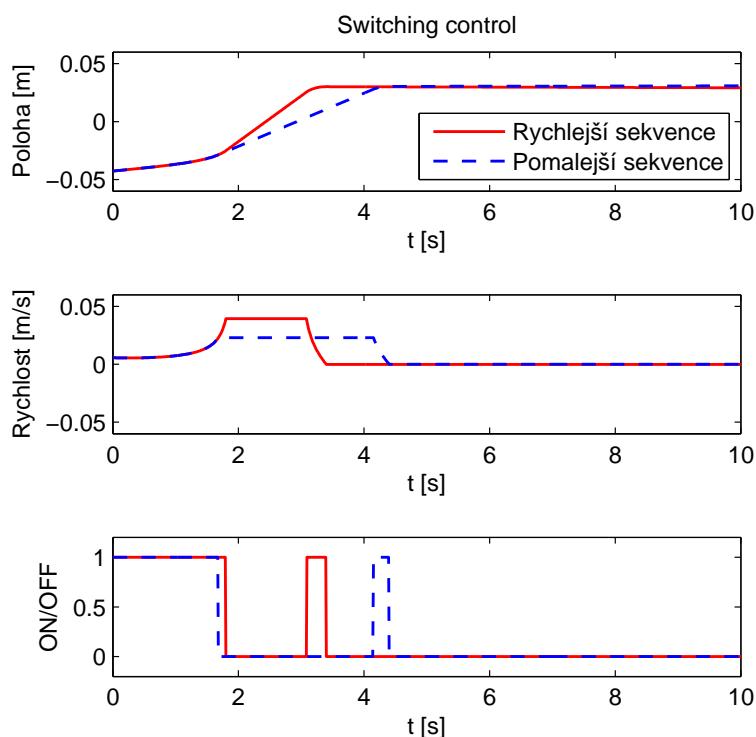
Poznámka: Při porovnání průběhů 5.5 a 4.1 si můžeme všimnout, že k prvním překmitům dochází v rozdílných časech. Důvodem je extrémní citlivost systému na počáteční podmínky. V tomto experimentu byla kulička umístěna o milimetr dál než v prvním, což zapříčinilo zpoždění překmitu o zhruba 1 s. Z tohoto důvodu se například dopředné řízení typu input shaping³ jeví jako nevhodné pro tuto úlohu. □

³tvarování vstupního signálu

5.3 Switching control

Řízení, při němž dochází pouze k přepínání mezi mezními hodnotami systému, se obecně nazývá **switching control**⁴. Častokrát se jedná o časově optimální řešení. Například potřebujeme-li přemístit auto z místa A do místa B, je evidentně nejrychlejší maximálně sešlápnout plyn a od určitého místa (switching point) naopak přejít k prudkému brzdění, jež při správně určeném bodu přepnutí zastaví auto v požadovaném místě B.

Obdobný způsob řízení by se dal využít i v případě kuličky s cívkou. Simulace na obrázku 5.6 slouží jako demonstrace tohoto přístupu. Cílem bylo dostat kuličku z místa $x_A = -0.04 \text{ m}$ do místa $x_B = 0.03 \text{ m}$ za pomoci spínání pouze jediné cívky tak, aby v místě x_B měla kulička pokud možno nulovou rychlosť.



Obrázek 5.6: Switching control demonstrativní simulace

V simulaci 5.6 jsou předvedeny dvě řídicí sekvence pomalejší a rychlejší. Obě nejdříve rozpohybovaly kuličku do určité rychlosti, následně vypnutím cívky nechaly kuličku se trvávat v rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud nepřekonala nulovou hodnotu polohy.

⁴spínané řízení

Od určitého místa $x > 0$ ji pak opětovným sepnutím cívky začaly brzdit do doby, než její rychlosť neklesla k nule, což muselo nastat právě v požadovaném místě x_B . Rychlejší sekvence tedy v úseku před cívkou rozpohybovala kuličku do větší rychlosti. Nicméně i toto muselo být voleno s ohledem na cílovou vzdálenost x_B , protože jinak by se nepodařilo kuličku ubrzdit včas.

Jde tedy o vhodné vystihnoutí minimálně dvou přepínacích bodů (pro vypnutí a sepnutí cívky⁵) tak, aby celkový čas potřebný k překonání úseku z x_A do x_B byl co nejkratší. Uvážíme-li dále, že práce vykonaná cívkou k urychlení kuličky se musí rovnat práci vynaložené na brzdění, pak stačí určit pouze jeden optimální bod.

V dalším možném kroku by tedy bylo zajímavé navrhnout řídicí algoritmus, který by úlohu řešil pro libovolnou⁶ nenulovou⁷ vzdálenost od cívky. Kdyby se jednalo o vzdálenost $x_B < 0$, tak by šlo využít jednoho překmitu. Kvůli vysoké závislosti na počátečních podmínkách (viz předchozí poznámka) by algoritmus zřejmě musel vycházet ze stavů x_1 , x_2 a ne z dopředu naplánovaných časových intervalů, jak tomu bylo v případě demonstrativní simulace.

S využitím dvou cívek, jedné jako urychlující a druhé jako brzdící, by dokonce bylo možné rozvrhnout řízení tak, aby v každém okamžiku docházelo k urychlování, nebo brzdění kuličky. Oproti předchozímu případu bychom tedy už nemuseli čekat, až kulička rovnoměrným pohybem překoná nulovou hodnotu polohy, abychom teprve byli schopni začít brzdit.

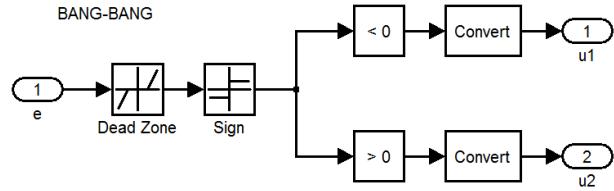
⁵Počáteční a koncový bod je jasně daný.

⁶Samozřejmě s ohledem na dosah silových účinků pole.

⁷S uvážením síly valivého odporu například z rovnice (3.6) by bylo možné od této podmínky upustit.

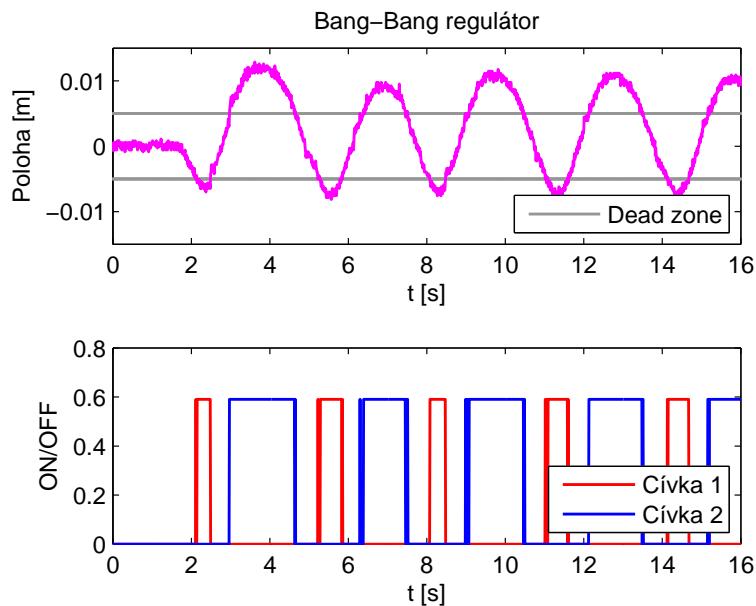
5.4 Bang-Bang regulátor

Na závěr jsme vytvořili jednoduchý řídicí algoritmus Bang-Bang regulátoru, jehož cílem bylo udržet kuličku mezi dvěma cívkami. Viz obrázek 5.7.



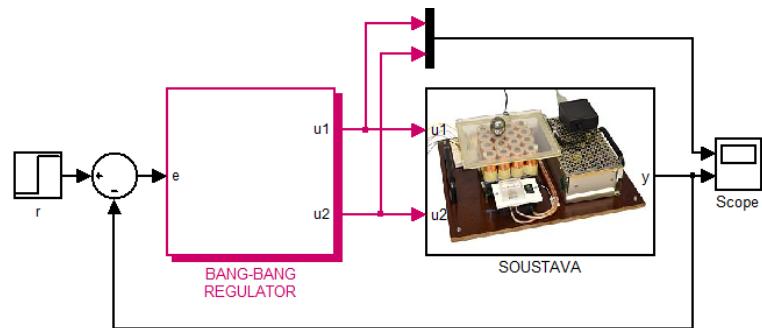
Obrázek 5.7: Bang-Bang regulátor řídicí algoritmus

Ke spínání cívek docházelo podle velikosti a znaménka regulační odchylky e . Pokud se kulička nacházela v pásmu necitlivosti (**Dead zone**) byly obě cívky vypnuty. Jelikož akční zásahy nebyly úměrné velikosti odchylky e , tak tato regulace vedla k oscilacím. Viz obrázek 5.8. Frekvence těchto oscilací byla nepřímo úměrně ovlivňována velikostí pásma necitlivosti.



Obrázek 5.8: Bang-Bang regulátor průběh polohy

Výkon cívek byl nastaven na 60%. Porucha v čase 2 s vytlačila kuličku z pásmá necitlivosti. Pravděpodobným důvodem delších spínacích intervalů cívky č. 2 je mírné naklonění platformy ve prospěch cívky č. 1. Schéma simulinkového zapojení regulátoru je na obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: Bang-Bang regulátor (simulinkové schéma)

Kapitola 6

Závěr

Připomeňme, že cílem práce bylo vytvořit zjednodušený matematický model distribuovaného magnetického manipulátoru, který uvažuje buzení pouze jedinou cívkou a jednorozměrný pohyb kuličky. Následně na základě tohoto modelu vyzkoušet jednoduché řízení polohy kuličky.

V teoretické části práce jsme zjednodušený model platformy odvodili ze samotné fyzikální podstaty systému. I přes řadu zavedených zjednodušení se výsledné průběhy řešení odvozené pohybové rovnice kvalitativně podobaly naměřeným hodnotám z experimentu.

V následující části práce jsme vytvořili další model platformy čistě na základě experimentální identifikace. Systém jsme identifikovali jako soustavu - kulička, pružina a tlumič. Lineární pružina byla následně nahrazena nelineární, která lépe vystihovala chování systému pro větší vzdálenosti od cívky. Tento nelineární model odpovídal skutečnosti po dobu prvních dvou oscilací kmitající kuličky kolem cívky, pak se průběhy odhadů začínaly zpožďovat.

V závěrečné části práce jsme navrhli pozorovatele stavů kuličky pro model odvozený z experimentální identifikace. Pozorovatel významně vylepšil průběhy odhadů, jež nyní odpovídaly skutečnosti po celou dobu simulace s minimálním zpožděním. Dále jsme navrhli způsob, jakým by bylo možné řídit polohu kuličky na základě spínání pouze jediné cívky. Tento způsob byl demonstrován v ukázkové simulaci pomocí identifikovaného modelu. Jelikož se nám v úloze s názvem Stop at Top podařilo kuličku zastavit v místě jejího největšího zrychlení, domníváme se, že navrhovaný způsob řízení by mohl fungovat pro libovolný bod v prstencovém okolí cívky. V úplném závěru jsme pak vytvořili jed-

noduchý řídicí algoritmus Bang-Bang regulátoru, jehož cílem bylo udržet kuličku mezi dvěma cívkami.

Jako jedním z dalších kroků by tedy bylo vhodné identifikovat parametry modelu odvozeného v teoretickém rozboru, případně zvážit některá z jeho zjednodušení a zavést další nonlinearity. Tento model by totiž v budoucnu umožňoval proporcionální řízení místo spínaného. Nezávisle na tomto by bylo možné vytvořit řídicí algoritmus spínaného řízení pro již fungující model z experimentální identifikace podle zmíněného návrhu v kapitole 5 Základní řízení.

Literatura

- [1] FÖLL, H. Electronic Materials [online; 04-04-2012].
http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/elmat_en/index.html.
- [2] FRANKLIN, G. a POWELL, J. a EMAMI-NAEINI, A.
Feedback control of dynamic systems. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [3] NOŽIČKA, J. *Mechanika a termodynamika.* Vydavatelství ČVUT, 1991.
- [4] SEDLÁK, B. a ŠTOLL, I. *Elektrīna a magnetismus.* ACADEMIA, 2002.
- [5] VÍCH, R. a SMÉKAL, Z. *Číslcové filtry.* ACADEMIA, 2001.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

- Tato práce ve formátu PDF.
- Matlab:
 - lineární model,
 - nelineární model,
 - model s pozorovatelem,
 - model s valivým odporem,
 - Bang-Bang regulátor,
 - Stop at Top regulátor,
 - Switching control simulace.