

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



## DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Explicitní řešení úlohy prediktivní regulace**

Černošice, 2008

Autor: Jiří Řehoř





## Poděkování

Především bych rád poděkoval Ing. Jaroslavu Pekařovi, Ph.D. za všestrannou pomoc a cenné rady, které mi poskytoval během četných konzultací. Dále děkuji prof. Ing. Vladislavu Havlenovi, CSc. za jeho komentáře a připomínky k této diplomové práci. V neposlední řadě děkuji své rodině za podporu při studiu.





# Abstrakt

Prakticky každá řízená soustava obsahuje nějaká omezení. Prediktivní regulace (MPC) je moderní metoda řízení, která dokáže přirozeně zahrnout tato omezení do úvahy a na základě definovaného kritéria optimality zprostředkovat optimální řídicí zásah. Hlavní nevýhoda tohoto přístupu je výpočetně náročná optimalizace, která se řeší v průběhu řízení pro každý akční zásah. Tento nedostatek částečně odstraňuje explicitní formulace MPC. V této diplomové práci formulujeme explicitní prediktivní regulátor pro lineární časově invariantní systémy s polyedrickým omezením a kvadratickou ztrátovou funkcí. Na několika ukázkových příkladech předvedeme základní vlastnosti těchto regulátorů a na závěr provedem návrh pro reálný laboratorní model.

# Abstract

In many practical applications constraints on system states and inputs have to be considered. Model Predictive Control (MPC) is a popular method which can naturally deal with constraints and provides optimal control inputs based on a declared objective function. The main drawback of this approach is a need for a real-time optimization. This can be avoided using explicit formulation of MPC. In this thesis we examine explicit MPC method for a class of Linear-Time-Invariant systems with polyedric constraints and quadratic objective function. The appropriate solution of this case is obtained via multiparametric quadratic programming. Several examples were made to present various MPC properties. A simple controller for a real plant was also found.





Katedra řídicí techniky

Školní rok: 2006/2007

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

**Student:** Jiří Řehoř

**Obor:** Technická kybernetika

**Název tématu:** Explicitní řešení úlohy prediktivní regulace

### Zásady pro vypracování:

Prediktivní regulace (MPC) je moderní metoda řízení, která nachází stále větší uplatnění v průmyslové praxi. Mezi hlavní výhody MPC vůči klasickým metodám (PID) patří přirozená možnost vložení omezení na jednotlivé veličiny v regulačním obvodu při zachování optimality řízení. Nevýhodou je potřeba řešení optimalizační úlohy on-line. Tuto nevýhodu částečně odstraňuje nalezení explicitního řešení off-line.

1. Seznamte se s lineárním prediktivním řízením.
2. Zformulujte explicitní řešení MPC.
3. Implementujte potřebné algoritmy v Matlabu.
4. Porovnejte řízení explicitním MPC pro simulovaný a reálný laboratorní model.

### Seznam odborné literatury:

- [1] Maciejowski, J.M.: *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall 2002.
- [2] Camacho, E.F.; Bordons, C.: *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 1999.
- [3] Rossiter, J.A.: *Model-Based Predictive Control*. CRC Press USA, 2003.
- [4] Morari, M.: *Lecture Notes: "Course on Model Predictive Control"*. ETH, Zurich.

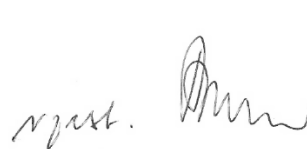
**Vedoucí diplomové práce:** prof. Ing. Vladimír Havlena, CSc.

**Termín zadání diplomové práce:** zimní semestr 2006/2007

**Termín odevzdání diplomové práce:** leden 2008



prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.  
děkan



# Obsah

<b>Seznam obrázků</b>	<b>xi</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
1.1 Definice problému a struktura dokumentu . . . . .	2
1.2 Význam použitých symbolů . . . . .	2
1.3 Seznam zkratk . . . . .	3
<b>2 Úvod do prediktivního řízení</b>	<b>5</b>
2.1 Model dynamického systému . . . . .	5
2.2 Kvadraticky optimální řízení bez omezení . . . . .	6
2.2.1 Klouzavý horizont . . . . .	8
2.2.2 Nekonečný horizont optimalizace . . . . .	9
2.3 Kvadraticky optimální řízení s omezením . . . . .	10
2.3.1 Kvadratické programování . . . . .	10
2.3.2 Prediktivní regulátor . . . . .	11
2.3.3 Nekonečný horizont predikce . . . . .	14
2.4 Stabilita prediktivního regulátoru . . . . .	16
2.5 Modifikace prediktivního regulátoru . . . . .	18
2.5.1 Sledování konstantní reference . . . . .	19
2.5.2 Robustní sledování konstantní reference . . . . .	21
2.5.3 Měkká omezení . . . . .	24
<b>3 Explicitní řešení úlohy prediktivní regulace</b>	<b>27</b>
3.1 Multiparametrické kvadratické programování . . . . .	28
3.1.1 Odvození . . . . .	29
3.1.2 Geometrické prohledávání . . . . .	30
3.2 Explicitní MPC . . . . .	31

3.2.1	Využití explicitního řešení . . . . .	33
3.3	Složitost explicitního řešení . . . . .	33
3.3.1	Redukce on-line složitosti . . . . .	34
3.3.2	Suboptimální řešení . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Návrh řízení pro reálnou soustavu</b>	<b>39</b>
4.1	Popis modelu kulička na tyči . . . . .	39
4.1.1	Fyzikální model . . . . .	39
4.1.1.1	Mechanika kuličky a tyče . . . . .	40
4.1.1.2	Náklon . . . . .	42
4.1.2	Linearizace . . . . .	42
4.2	Identifikace . . . . .	43
4.3	Explicitní prediktivní regulátor . . . . .	46
4.3.1	Formulace . . . . .	47
4.3.2	Zhodnocení . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Obsah přiloženého CD</b>	<b>I</b>

# Seznam obrázků

2.1	Pozorovatel stavu. . . . .	6
2.2	Řízení metodou klouzavého horizontu. . . . .	9
2.3	Geometrické řešení kvadratického programu. . . . .	11
2.4	Příklad 1: Klouzavý horizont. . . . .	15
2.5	Příklad 2: Stabilita a oblast splnitelných poč. podmínek. . . . .	18
2.6	Sledování reference pro $R_d = 1$ a různé váhy $q_y$ . . . . .	21
2.7	Asymptotické sledování konstantní reference. . . . .	25
3.1	Geometrické prohledávání. . . . .	31
3.2	Explicitní MPC pro dvojitý integrátor. . . . .	32
3.3	Rozdělení do kritických regionů. . . . .	36
3.4	Závislost kvality řízení na počáteční poloze. . . . .	37
4.1	Laboratorní model CE106 - kulička na tyči. . . . .	40
4.2	Schemtaický model CE106. . . . .	41
4.3	Vliv hystereze na hodnotu náklonu. . . . .	44
4.4	Srovnání měřeného a simulovaného náklonu. . . . .	44
4.5	Přechodové charakteristiky. . . . .	45
4.6	Odezva na jednotkový skok. . . . .	47
4.7	Průběh řízení na reálném modelu. . . . .	49
4.8	Průběh řízení na reálném modelu. Druhá realizace. . . . .	50



# Kapitola 1

## Úvod

Prediktivní regulace patří již řadu let mezi oblíbené řídicí metody v průmyslových aplikacích. Motivací pro její nasazení je především kritériem definovaná optimalita chování a schopnost respektovat zadaná omezení. Obojí má velký ekonomický význam. Na rozdíl od „klasického přístupu,“ kam řadíme například návrh PID regulátoru pomocí frekvenčních metod, zde nahlížíme na problematiku řízení jako na optimalizační úlohu.

S rozvojem výpočetní techniky lze prediktivní regulátory levně a efektivně využít pro širší spektrum aplikací. Příkladem může být řízení spalovacího motoru či DC-DC měniče [1]. Limitujícím faktorem tradičního prediktivního regulátoru je výpočetně náročná optimalizace, která se řeší v průběhu řízení pro každý akční zásah. Tento nedostatek částečně řeší explicitní prediktivní regulátor, který formulovala v roce 1999 skupina okolo prof. Morariho [5]. Pomocí multiparametrického programování předvedli postup, jak pro lineární časově invariantní systémy s omezením navrhnout kvadraticky optimální regulátor a získat explicitní zákon řízení. Nezbytná optimalizace se v tomto případě napočítá předem a v průběhu řízení se pouze aplikuje získaný nalezený zákon řízení. Takto lze řídit i mnohem rychlejší systémy. Intenzivní výzkum v této oblasti přinesl řešení pro další tvary kritéria a dynamických systémů [7].

Nevýhodou explicitního řešení prediktivní regulace je prudký nárůst složitosti s počtem omezení. Díky tomu se jeho požití hodí především pro jednodušší systémy. Svou podstatou pak nabízí jednoduchý způsob implementace, který odpovídá modernímu pojetí návrhu („Model-Based Design“). S využitím počítače navrhne regulátor pro modelovanou soustavu a vypočteme explicitní zákon řízení. Ten pak snadno implementujeme do mikroprocesorového obvodu či embedded zařízení. Další využití skýtá samotný explicitní zákon řízení, který může posloužit k analýze chování prediktivního regulátoru a vytváří tak nový pohled do této problematiky.

## 1.1 Definice problému a struktura dokumentu

Hlavním cílem této diplomové práce je předvést čtenáři explicitní tvar prediktivního regulátoru. V závěru práce rovněž aplikujeme získané poznatky na návrhu řízení pro zvolený model. Zabývat se budeme pouze nejběžnějším tvarem prediktivního regulátoru (dále budeme využívat též známou anglickou zkratku MPC - Model Predictive Control) s kvadratickým kritériem optimality a omezením ve tvaru konvexního polyedru. Systém uvažujeme lineární s časově invariantními parametry (LTI) popsany soustavou lineárních diferenciálních rovnic (diskrétní stavový popis).

V následující kapitole nazvané „Úvod do prediktivního řízení“ nejprve formulujeme některé základní vztahy, týkající se kvadraticky optimálního řízení. Mezi ně patří především známá Riccatiho rovnice, řízení pomocí klouzavého horizontu a diskuze nad stabilitou MPC. S tím souvisí i pojmy oblast řešitelnosti a pozitivně invariantní množina, které rovněž popíšeme. Veškeré poznatky jsou samozřejmě platné i pro explicitní řešení MPC (výsledné regulátory jsou ekvivalentní, jde pouze o jiný způsob výpočtu).

Třetí kapitola již definuje explicitní řešení MPC. V první části předvedeme postup pro výpočet multiparametrického kvadratického programu. Dále si ukážeme, jak s jeho pomocí formulovat prediktivní regulátor a zmíníme některé vlastnosti, které lze takto vyčíst ze získaného explicitního zákona řízení. V závěru kapitoly zevrubně rozebereme největší problém explicitního tvaru MPC, kterým je kombinatorický nárůst složitosti. Zmíníme se o metodách, jak složitost redukovat či omezit za použití suboptimálního regulátoru.

Konečně čtvrtá kapitola shrnuje výsledky předchozích částí ve formulaci explicitního prediktivního regulátoru pro laboratorní model CE 106 - kulička na tyči. Systém podrobně popíšeme a provedeme identifikační experiment. Na jeho základě sestrojíme lineární model a navrhne explicitní MPC pro sledování po částech konstantní reference. Na závěr porovnáme simulované a naměřené průběhy.

## 1.2 Význam použitých symbolů

V této diplomové práci dodržujeme následující značení



$\mathbf{A}, \mathbf{G}$	matice
$\mathbf{x}$	vektory - vždy sloupcové
$\mathbf{u}_{t,N}$	posloupnost $u_t, \dots, u_{t+N}$ (řazená do vektoru)
$\mathbf{I}_n$	jednotková matice rozměru $\mathcal{R}^{n \times n}$
$\mathbf{1}_n$	jednotkový vektor $\mathbf{1}_n = [1, \dots, 1]^T$ dimenze $\mathcal{R}^n$
$a, A$	skalár
$\otimes$	Kroneckerův symbol
$\mathbf{A} \succ 0$	pozitivně definitní matice
$\mathbf{A} \succeq 0$	pozitivně semidefinitní matice
$\mathcal{P}, \mathcal{R}$	kaligrafickým písmem značíme množiny (polyedry)
$\mathcal{V} = \Pi_{\mathcal{R}^n}(\mathcal{P})$	symbol $\Pi_{\mathcal{R}^n}$ označuje projekci do prostoru $\mathcal{R}^n$
$\hat{d}$	stříškou označujeme odhady
$\mathbf{u}_{t,N}^*$	hvězdičkou označujeme optimální hodnotu

### 1.3 Seznam zkratk

Pro snažší orientaci přikládáme seznam použitých zkratk. Jejich význam bude náležitě objasněn v textu. Zkratky často vychází ze zavedených anglických výrazů.

MPC	prediktivní regulátor (regulace)
LQR	kvadraticky optimální regulátor pro lineární systémy (ustálené řešení).
MAS	maximální pozitivně invariantní množina řešitelnosti
QP	kvadratické programování
mp-QP	multiparametrické kvadratické programování



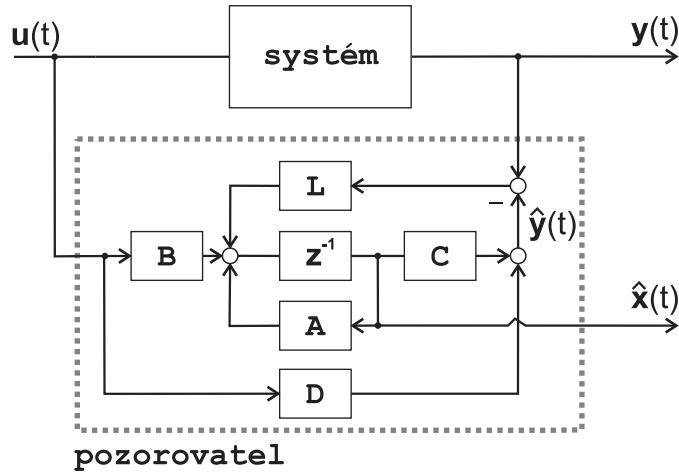
# Kapitola 2

## Úvod do prediktivního řízení

Prediktivní regulátor, jak již název napovídá, využívá předpokládaného budoucího chování systému ke stanovení vhodného řídicího zásahu. Ten určujeme na základě řešení optimalizační úlohy na konečném časovém horizontu predikce (obvykle hovoříme o počtu kroků predikce, jelikož předpokládáme diskrétní popis). Cílem optimalizace je minimalizovat zadané kritérium optimality (ztrátovou funkci), které je sestaveno tak, aby patřičně penalizovalo nežádoucí chování. Tím může být například použití velkých akčních zásahů, odchylka od požadované reference či od ustáleného stavu. Fakt, že pracujeme nad predikovaným vývojem systému, nám přirozeně umožňuje zahrnout omezení. Schopnost respektovat omezení patří k hlavní výhodám prediktivního řízení. Zároveň činí tuto úlohu obtížnou a řešení je třeba hledat „hrubou silou“ pomocí matematického programování. Obtížnost úlohy závisí především na tvaru omezení. Tato diplomová práce se téměř výhradně zabývá konkrétním typem optimalizační úlohy a to kvadraticky optimálním řízením lineárních systémů s konvexním omezením ve tvaru polyedru. Kvadratické kritérium proto, že lze relativně snadno řešit a má i názornou fyzikální interpretaci - množství energie. Jak uvidíme později, tato úloha vede na kvadratické (matematické) programování, pro které existuje řada algoritmů.

### 2.1 Model dynamického systému

Základní součástí prediktivního regulátoru je matematický model reálné soustavy. S jeho pomocí jsme schopni predikovat chování systému a zvolit vhodný řídicí zásah. Pro naše účely budeme vždy uvažovat lineární dynamický systém s časově invariantními parametry



Obrázek 2.1: Pozorovatel stavu.

popsaný diskretní stavovou rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$  a  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ .

Počáteční podmínkou tohoto modelu je celý stavový vektor  $\mathbf{x}(t_0)$ . Ten obvykle neměříme, ale pokud je systém pozorovatelný (matice pozorovatelnosti má plnou hodnotu), můžeme stav odhadnout pozorovatelem stavu. Na obrázku obr. 2.1 je schématicky znázorněn identický pozorovatel stavu se stavovou injekcí  $\mathbf{L}$ , která působí na dynamiku chyby odhadu podle

$$\mathbf{e}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t).$$

Stříškou  $\hat{\mathbf{x}}$  označujeme odhad skutečné hodnoty  $\mathbf{x}$ . Ve stochastické formulaci (2.1) lze pro Gaussovské šумы nalézt optimální hodnotu matice  $\mathbf{L}$ , minimalizující střední kvadratickou chybu lineárního odhadu  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . V tomto případě hovoříme o filtraci a optimální pozorovatel se nazývá Kalmanův filtr [20].

## 2.2 Kvadraticky optimální řízení bez omezení

Pojem optimálního řízení dynamického systému je těsně spjat s prací ruského matematika L. Pontryagina (princip maxima 1956) a Bellmanovým principem optimality (1952). V našem konkrétním případě se budeme zabývat nalezením takové optimální posloupnosti

akčních zásahů  $\mathbf{u}^*(t), \dots, \mathbf{u}^*(t + N - 1)$ , která bude minimalizovat zvolené kvadratické kritérium při respektování dynamiky systému 2.1.

Abychom odlišili skutečné a predikované hodnoty, budeme používat dvojí značení. Výrazem  $\mathbf{x}(t + k|t)$  rozumíme predikovanou hodnotu stavu  $\mathbf{x}$  v čase  $t + k$  na základě dat (stavu) v čase  $t$ . Zároveň zavedeme zjednodušené značení pomocí spodního indexu

$$\mathbf{x}(t + k|t) = \mathbf{x}_{t+k}. \quad (2.2)$$

Zřejmě platí  $\mathbf{x}(t|t) = \mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t)$ . Nyní již formulujeme kvadratické kritérium pro konečný horizont délky  $N$

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t, \dots, \mathbf{u}_{t+N-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=t}^{t+N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{t+N}^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_{t+N}, \quad (2.3a)$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t), \quad (2.3c)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0, \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_N^T \succeq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succ 0. \quad (2.3d)$$

Matice  $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_N \in \mathcal{R}^{n \times n}$  a  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{m \times m}$  nazýváme váhové a společně s horizontem predikce  $N$  tvoří základní ladící parametry. Nalezení optimálního řízení, které by minimalizovalo zadané kvadratické kritérium představuje dynamickou optimalizaci a má v tomto případě analytické řešení.

Substitucí

$$\mathbf{x}_{t+k} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(t) + \sum_{i=t}^{t+k-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1-i}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}_{t,N} = [\mathbf{u}_t^T, \dots, \mathbf{u}_{t+N-1}^T]^T \quad (2.5)$$

vyjádříme predikovaný vývoj stavu ve tvaru

$$[\mathbf{x}_t^T, \mathbf{x}_{t+1}^T, \dots, \mathbf{x}_{t+N}^T]^T = \mathbf{V} \mathbf{x}(t) + \mathbf{T} \mathbf{u}_{t,N} \quad (2.6)$$

a kritérium (2.3) přepíšeme do maticového tvaru

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{t,N}^T \mathbf{H} \mathbf{u}_{t,N} + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{u}_{t,N} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Y} \mathbf{x}(t), \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^{(m \cdot N) \times (m \cdot N)}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{R}^{n \times (m \cdot N)}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ .

Označme symbolem  $\otimes$  operaci Kroneckerova násobení matic a  $\mathbf{I}_j \in \mathcal{R}^{j \times j}$  jednotkovou matici příslušné dimenze. Potom platí

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R} + \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{T}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{T}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_N \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Minimalizací kvadratické formy (2.7) dostáváme optimální řídicí sekvenci

$$\mathbf{u}_{t,N}^*(\mathbf{x}(t)) = \arg \min_{\mathbf{u}_t^N} \{J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N})\} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}^T \mathbf{x}(t) \quad (2.9)$$

a optimální hodnotu kritéria

$$J^*(\mathbf{x}(t)) = \min_{\mathbf{u}_{t,N}} \{J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N})\} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}) \mathbf{x}(t), \quad (2.10)$$

kde inverze  $\mathbf{H}^{-1}$  existuje díky předpokladu v 2.3d.

Pokud bychom aplikovali jednotlivé akční zásahy z vektoru  $\mathbf{u}_{t,N}^*$ , řídili bychom systém po prvním kroku v otevřené smyčce. Takový postup je nerobustní a neumožňuje reagovat na poruchy. Pro zajištění zpětné vazby je třeba v každém kroku změřit aktuální stav  $\mathbf{x}(t+i)$  a přepočítat řízení (2.9) na zkráceném horizontu  $N-i$ . Alternativní postup nabízí Bellmanův princip optimality [2]. Problém vnoříme do třídy analogických problémů (princip invariantního vnoření) a vyřešíme pro všechny počáteční stavy  $\mathbf{x}(t)$ . V důsledku aditivity ztrátové funkce definované podle (2.3b) obdržíme optimální řízení ve tvaru

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.11)$$

kde  $\mathbf{K}(t)$  je tzv. Kalmanovo zesílení

$$\mathbf{K}(t) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A} \quad (2.12)$$

a  $\mathbf{P}(t+1)$  odpovídající řešení diferenční Riccatiho rovnice

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t+1) \mathbf{A} \quad (2.13)$$

s koncovou podmínkou  $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}_N$ . Optimální hodnotu kritéria v čase  $t$  lze snadno vyčíslit ze vztahu

$$J^*(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t).$$

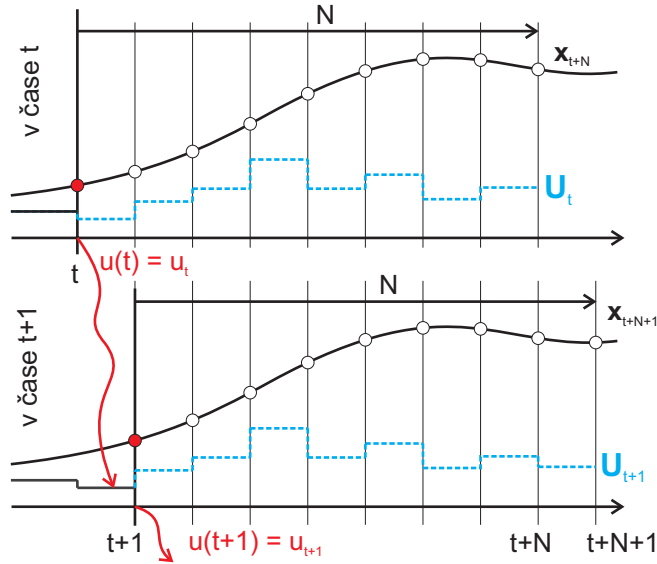
### 2.2.1 Klouzavý horizont

Oba předchozí postupy uvažují řízení jen na konečném horizontu. Abychom získali zákon řízení pro nekonečný horizont<sup>1</sup>, lze použít metodu „klouzavého horizontu“. Princip metody je jednoduchý. V kroku  $t$  optimalizujeme  $\mathbf{u}_{t,N}$  na horizontu predikce délky  $N$  a aplikujeme pouze první řídicí zásah

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{I}_m \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \mathbf{u}_{t,N}^*$$

---

<sup>1</sup>Nejdená se o nekonečný horizont predikce!



Obrázek 2.2: Řízení metodou klouzavého horizontu.

Po změření nového stavu  $\mathbf{x}(t+1)$  celý postup opakujeme s  $\mathbf{u}_{t+1,N}$ , viz.obrázek obr. 2.2. Takto zajistíme zpětnovazební charakter řízení. V případě, kdy neuvažujeme omezení, dokážeme vypočítat optimální zákon řízení i na nekonečném horizontu 2.2.2. Tento postup však bude nezbytný u řízení s omezením.

## 2.2.2 Nekonečný horizont optimalizace

Rovnice (2.11) představuje zpětnovazební stavový regulátor s proměnným zesílením  $\mathbf{K}(t)$ . Často nás zajímá ustálené řešení Riccatiho rovnice, kdy  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}$  a  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}$  jsou konstantní matice. Uvažujme kvadratické kritérium (2.3) na horizontu  $N \rightarrow \infty$  a předpokládejme, že platí: dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  stabilizovatelná, dvojice<sup>2</sup>  $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{1/2})$  pozorovatelná. Potom existuje limitní pozitivně definitní symetrické řešení diferenční Riccatiho rovnice, které je zároveň jediným pozitivně definitním symetrickým řešením následující algebraické Riccatiho rovnici (ARE) [18, strana 52]

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (2.14)$$

Příslušné ustálené zesílení bude

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (2.15)$$

<sup>2</sup> $\mathbf{Q}^{1/2}$  značí Choleskiho faktorizaci

Uzavřením zpětnovazební smyčky  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  získáme časově invariantní LQ regulátor (LQR), který navíc stabilizuje soustavu pro libovolné symetrické  $\mathbf{Q} \succeq 0$ ,  $\mathbf{R} \succ 0$ .

## 2.3 Kvadraticky optimální řízení s omezením

Mějme opět kvadratické kritérium (2.3) na konečném horizontu délky  $N$ , ale tentokrát přidejme omezení na trajektorii stavů  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$  a akčních zásahů  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$ .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_t, \dots, \mathbf{u}_{t+N-1}} & \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=t}^{t+N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{t+N}^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_{t+N}, \right\} \\ \text{za podm.} & \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \\ & \quad \mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t), \\ & \quad \mathbf{x}_k \in \mathcal{X}, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, k = t, \dots, t+N-1 \end{aligned}$$

Tento optimalizační problém již není analyticky řešitelný a na řadu přichází numerická optimalizace. Získaný optimální zákon řízení již není lineární funkcí stavu a analýza regulované soustavy je o to složitější. V našem případě se omezíme pouze na problémy vedoucí na tzv. kvadratické programování.

### 2.3.1 Kvadratické programování

Kvadratické programování náleží do třídy konvexní optimalizace. Výhodou konvexní optimalizace je fakt, že nalezené lokální minimum je zároveň jediným globálním minimem [10, strana 153]. Nejprve definujme několik pojmů.

**Definice 2.1 (Konvexní množina, konvexní funkce):** Množina  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^s$  je konvexní, jestliže pro všechna  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathcal{S}$  a  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí:  $\lambda \mathbf{z}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{z}_2 \in \mathcal{S}$ .

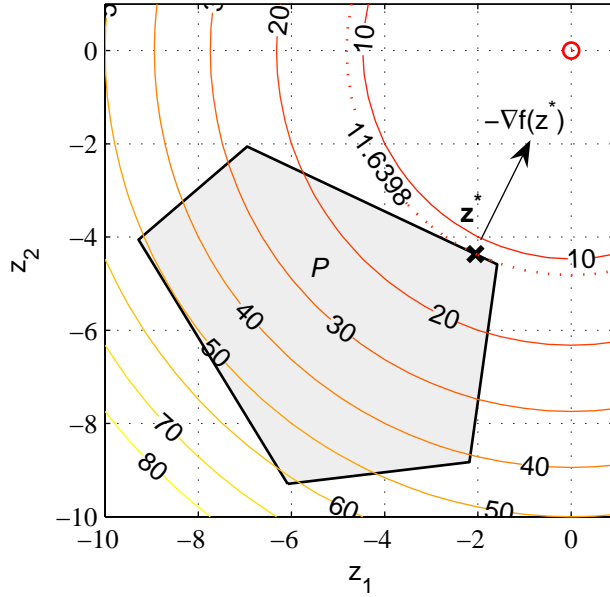
Funkce  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$  je konvexní, jestliže  $\mathcal{S}$  je konvexní a pro všechna  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathcal{S}$ ,  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  platí:  $f(\lambda \mathbf{z}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{z}_2) \leq \lambda f(\mathbf{z}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{z}_2)$ . ▶

**Definice 2.2 (Polyedr, polytop):** Konvexní polyedr (dále jen polyedr) je množina tvořená průnikem konečně mnoha polorovin. Polyedr lze vždy vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{R}^s : \mathbf{A} \mathbf{z} \leq \mathbf{b}\}.$$

Je-li polyedr ohraničený, nazýváme jej **mnohostěn**. ▶





Obrázek 2.3: Geometrické řešení kvadratického programu.

Kvadratický program (dále QP) vvažujeme v následujícím tvaru

$$\min_{\mathbf{z}} \left\{ f(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{H} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{f} + \beta \mid \mathbf{A} \mathbf{z} \leq \mathbf{b} \right\},$$

kde  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T \in \mathcal{R}^{s \times s}$ ,  $\mathbf{H} \succeq 0$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^s$ ,  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{q \times s}$  a  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^q$ .

Omezení vytváří konvexní množinu (polyedr) a díky požadavku  $\mathbf{H} \succeq 0$  bude i kvadratická funkce konvexní. Řešení této úlohy vede na konvexní optimalizaci, pro kterou existuje řada algoritmů. Bude-li navíc jádro kvadratické formy  $\mathbf{H}$  pozitivně definitní, pak řešení (pokud existuje) bude jedinečné. Podrobněji se podmínkám optimality QP budeme věnovat v kapitole 3.1.

Jednoduchý kvadratický program pro kritérium  $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$ ,  $\mathbf{z} \in \mathcal{R}^2$  s omezením  $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$  je znázorněn na obr. 2.3.

### 2.3.2 Prediktivní regulátor

Nyní formulujeme QP pro úlohu optimálního řízení. Uvažujme následující tvar<sup>3</sup> omezení dynamického systému (2.1)

$$\mathbf{E}_c \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_k \leq \mathbf{m}_c. \quad (2.16)$$

<sup>3</sup>Zvolili jsme trochu obecnější formu, než  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$  a  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$ .

Z důvodů, které objasníme později, přidáme speciální omezení na koncový stav  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N$ . Pro úplnost přepíšeme celé kritérium

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t, \dots, \mathbf{u}_{t+N-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=t}^{t+N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N, \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k, \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t), \quad (2.17c)$$

$$\mathbf{E}_c \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_k \leq \mathbf{m}_c, \quad k = t \dots t + N - 1, \quad (2.17d)$$

$$\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N \subset \mathcal{R}^n, \quad (2.17e)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0, \mathbf{Q}_N = \mathbf{Q}_N^T \succeq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succ 0. \quad (2.17f)$$

Jako v předchozím případě převedeme kritérium (2.17) do maticového tvaru. Nechť

$$\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{M}_N \mathbf{x} \leq \mathbf{m}_N\}. \quad (2.18)$$

Substitucí za  $\mathbf{x}$  podle (2.4) dostáváme

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{t,N}^T \mathbf{H} \mathbf{u}_{t,N} + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{u}_{t,N} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Y} \mathbf{x}(t), \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{u}_{t,N} \leq \mathbf{w} + \mathbf{E} \mathbf{x}(t), \quad (2.19b)$$

kde matice  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{Y}$  určíme podle (2.8) a pro  $\mathbf{G} \in \mathcal{R}^{q \times mN}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^q$  a  $\mathbf{E} \in \mathcal{R}^{q \times n}$  platí

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{G}_c + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_c \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_N \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_c \\ \vdots \\ \mathbf{m}_c \\ \mathbf{m}_N \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_c \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\mathbf{M}_N \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{V} \end{bmatrix}.$$

Na kritérium (2.19) se lze dívat jako na kvadratický program, kde vektor optimalizačních proměnných odpovídá vektoru akčních zásahů  $\mathbf{u}_{t,N}$  a stav  $\mathbf{x}(t)$  představuje parametr daného QP. Jelikož předpokládáme  $\mathbf{H} \succ 0$ , bude řešení  $\mathbf{u}_{t,N}^*$  minimalizující kritérium (2.19) jedinečné a určené pouze aktuální stavem tj.

$$\mathbf{u}_{t,N}^*(\mathbf{x}(t)) = \arg \min_{\mathbf{u}_{t,N}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}_{t,N}^T \mathbf{H} \mathbf{u}_{t,N} + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{u}_{t,N} \mid \mathbf{G} \mathbf{u}_{t,N} \leq \mathbf{w} + \mathbf{E} \mathbf{x}(t) \right\}. \quad (2.21)$$

V kapitole 3 podrobněji rozebereme vliv změny  $\mathbf{x}(t)$  na hodnotu optimálního argumentu  $\mathbf{u}_{t,N}^*$ . Zde se zaměříme pouze na řešitelnost QP. Pro některé hodnoty  $\mathbf{x}(t)$  totiž nemusí existovat žádné řešení  $\mathbf{u}_{t,N}^*$ , které by splňovalo zadaná omezení. Zavedme si nový pojem.

**Definice 2.3 (Množina řešitelnosti):** Označme symbolem  $\mathcal{X}_t^f$  množinu všech stavů  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ , pro které je daný QP řešitelný, tj. pro všechna  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}_t^f$  existuje  $\mathbf{u}_{t,N}$ , splňující nerovnost  $\mathbf{G}\mathbf{u}_{t,N} \leq \mathbf{W} + \mathbf{E}\mathbf{x}(t)$ .  $\blacktriangleright$

Množinu  $\mathcal{X}_t^f$  získáme projekcí rozšířeného polyedru

$$\mathcal{P} = \left\{ (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N}) \in \mathcal{R}^{n+N \cdot m} \mid [-\mathbf{E} \ \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}_{t,N} \end{bmatrix} \leq \mathbf{W} \right\} \quad (2.22)$$

do prostoru stavů  $\mathcal{R}^n$

$$\mathcal{X}_t^f = \Pi_{\mathcal{R}^n}(\mathcal{P}) \quad (2.23)$$

Abychom získali řízení na nekonečném horizontu (opět se nejedná o horizont predikce) a zároveň zajistili zpětnovazební charakter řízení, zavádíme metodu klouzavého horizontu 2.2.1. Právě tento postup rozumíme pod pojmem „prediktivní řízení“ (MPC). Hlavní výhodou MPC je schopnost respektovat zadaná omezení. Nevýhodou u relativně rychlých systémů je výpočetně náročná optimalizace (2.21), která se řeší typicky *on-line*. Jiný způsob spočívá ve formulaci QP pomocí multiparametrického programování, jak bude ukázáno v kapitole 3.

**Příklad 2.1 (Dvojitý integrátor):** Uvažujme jednoduchý systém

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

s omezením

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad -15 \leq y(t) \leq 15, \quad (2.25)$$

řízený pomocí MPC regulátoru. Pro váhové matice  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I}_2$  a  $\mathbf{R} = 0, 1$  nalezneme hodnotu kritéria, odpovídající regulaci ze stavu  $\mathbf{x}(t_0) = [4, 5; 5]^T$  do počátku pro různé délky horizontu predikce  $N = 2, \dots, 10$ .

*Řešení:* Matice kritéria a omezení pro nejkratší horizont  $N = 2$  budou

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4,6 & 1,75 \\ 1,75 & 1,35 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5,5 & 2 \\ 2 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 15 \\ 15 \\ 1 \\ 1 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na obrázku 2.4 zleva jsou zobrazeny některé průběhy výstupů a akčních zásahů. Zde si můžeme všimnout, jak MPC zajistí splnění omezujících podmínek. Na obrázku vpravo vidíme závislost „kvality řízení“ v uzavřené zpětné vazbě (pro zvolený počáteční stav  $\mathbf{x}(t_0)$ ) na délce predikčního horizontu. Kvalita řízení byla vypočtena z 25 kroků simulace podle následujícího vztahu

$$J_{cl25}^*(\mathbf{x}(t_0)) = \sum_{i=0}^{25} \mathbf{x}^T(t_0+i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t_0+i) + (\mathbf{u}^*(t_0+i))^T \mathbf{R} \mathbf{u}^*(t_0+i), \quad (2.26)$$

kde  $\mathbf{u}^*(t_0+i) = [\mathbf{I}_m, 0, \dots, 0] \mathbf{u}_{t_0+i}^N(\mathbf{x}(t_0+i))$ .

### 2.3.3 Nekonečný horizont predikce

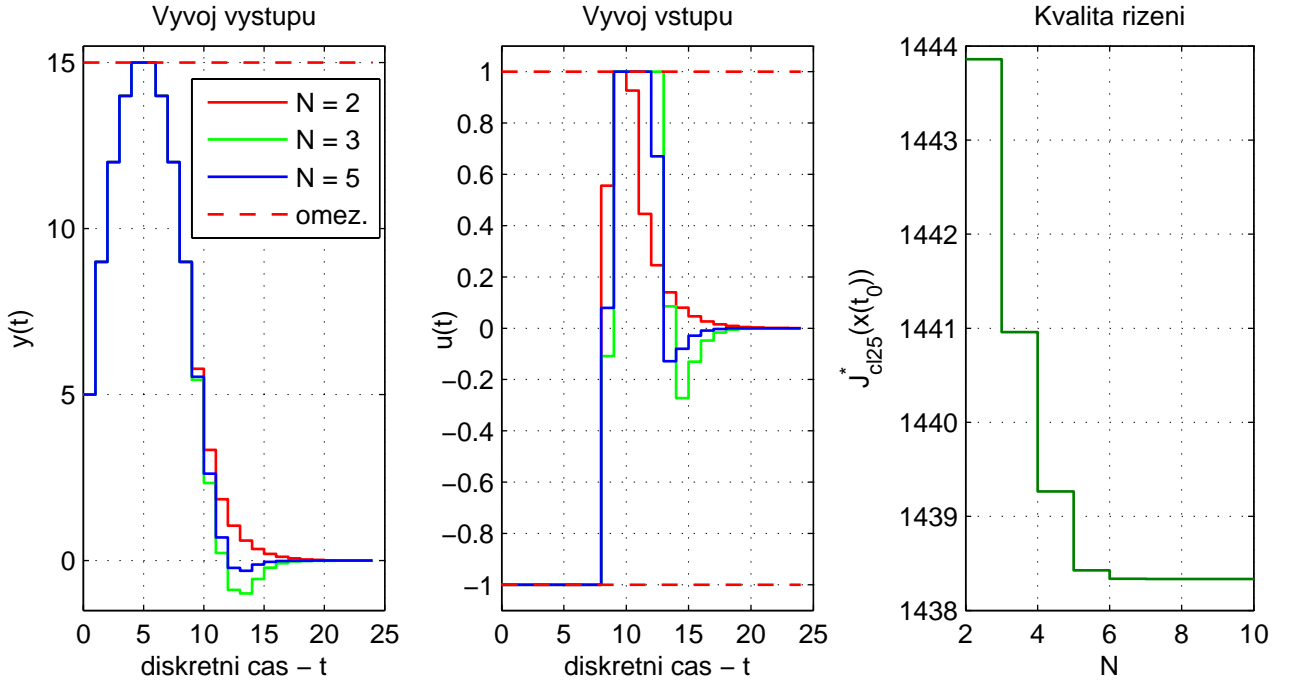
Jak vidíme z předcházejícího příkladu, délka horizontu ovlivňuje výslednou hodnotu kritéria a tedy i kvalitu řízení. Současně nemáme díky metodě klouzavého horizontu jistotu, že úloha QP bude vždy řešitelná (viz příklad 2.2). Pomoci si můžeme následující formulací. Uvažujme kvadratické kritérium na nekonečném horizontu predikce a rozdělme jej na dvě části.

$$J(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_\infty) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k] + \Psi_N^\infty. \quad (2.27)$$

V první části, na konečném horizontu  $0, \dots, N-1$ , hledáme řešení pomocí QP (tj. včetně omezení). Zbytek představuje hodnotu kritéria na nekonečném horizontu predikce ( $k = N, \dots, \infty$ ) a určíme ji pro kvadratický problém bez omezení. Z odstavce o LQ řízení snadno zjistíme, že

$$\Psi_N^\infty = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{P} \mathbf{x}_N, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \mathbf{x}_k, \text{ pro } k \geq N, \quad (2.29)$$



Obrázek 2.4: Příklad 1: Klouzavý horizont.

kde  $\mathbf{P}$  je řešení algebraické Riccatiho rovnice (2.14) a  $\mathbf{K}$  příslušné zesílení (2.15). Pokud zajistíme, aby pro všechna  $k \geq N$  byla splněna všechna omezení, potom získáme regulátor s nekonečným horizontem predikce volbou  $\mathbf{Q}_N = \mathbf{P}$ . Abychom mohli předchozí podmínky snadno vyjádřit zavedeme si nový pojem.

**Definice 2.4: Pozitivně invariantní přípustná množina**  $\Omega$  pro daný zákon řízení  $\mathbf{u}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  je taková oblast ve stavovém prostoru, kde platí

1.  $\mathbf{x}_k \in \Omega \Rightarrow \mathbf{x}_{k+i} \in \Omega$  pro  $\forall i > 0$ ,
2.  $\mathbf{x}_k \in \Omega \Rightarrow -\mathbf{G}_c \mathbf{u}_k + \mathbf{E}_c \mathbf{x}_k \leq \mathbf{m}_c$  pro  $\forall i \geq 0$ , ▶

První bod v předchozí definici říká, že jakmile stav vstoupí do množiny  $\Omega$ , potom zde při daném řízení již zůstane. Druhý bod zase zajišťuje, že v této množině (při daném řízení) budou splněny všechny omezující podmínky.

Dosadíme-li za  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  LQR řízení  $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k$  podle (2.15), budeme tuto množinu označovat symbolem  $\mathcal{X}_{LQR}$ . Bude-li stav  $\mathbf{x}_N$  v předchozí formulaci nekonečného horizontu predikce v této množině  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{LQR}$ , potom máme zaručeno splnění omezujících podmínek při zachování LQ optimálního řízení pro všechna  $k \geq N$ . V [6] je uveden postup, jak

s pomocí multiparametrického programování<sup>4</sup> a analýzy dosažitelnosti nalézt pro ohraničenou oblast  $\mathcal{X}_0$  dostatečně dlouhý horizont predikce  $N_\infty$  tak, aby podmínka  $\mathbf{x}_{N_\infty} \in \mathcal{X}_{LQR}$  platila pro všechny počáteční stavy  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}_0$ . Jiný způsob vede na suboptimální řešení a bude zmíněn v následující části.

## 2.4 Stabilita prediktivního regulátoru

Řízení metodou klouzavého horizontu implicitně nezaručuje stabilitu soustavy. Ta je spolu s dalšími vlastnostmi MPC regulátoru určena především tvarem omezení, volbou váhových matic a délkou predikčního horizontu. Obvykle chceme zajistit stabilitu pro všechny počáteční podmínky  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{X}_{t_0}^f$  při libovolné volbě matic  $\mathbf{Q} \succeq 0$  a  $\mathbf{R} \succ 0$ . Toho docílíme přidáním dodatečných omezení na koncový stav  $\mathbf{x}_N$ , váhu  $\mathbf{Q}_N$  a vhodnou délkou predikčního horizontu  $N$ .

Abychom mohli mluvit o stabilitě MPC, musí vždy existovat řešení  $\mathbf{u}_{t,N}$ , které splňuje uvažovaná omezení. Tedy stav  $\mathbf{x}(t)$  musí ležet v množině řešitelnosti  $\mathcal{X}_t^f$  pro všechna  $t$ . Pokud bude  $N < \infty$ , nemáme při řízení metodou klouzavého horizontu garantováno splnění omezujících podmínek pro všechny budoucí kroky [22] a množina  $\mathcal{X}_{t_0}^f$  nalezená podle (2.23) zaručuje splnitelnost pouze pro první krok QP.

Nejběžnější způsob stabilizace MPC využívá právě souvislosti s nekonečným horizontem predikce. V [28] je dokázána stabilita MPC pro  $N \rightarrow \infty$ . Jak jsme ukázali v předchozí podkapitole, nekonečný horizont predikce lze nahradit konečným horizontem s vhodně zvolenou koncovou vahou  $\mathbf{Q}_N = \mathbf{P}$ . Podmínkou je, aby stav na konci predikčního horizontu ležel v množině  $\mathcal{X}_{LQR}$ . Abychom tento požadavek zajistili pro zvolenou délku  $N$ , přidáme do kritéria omezující podmínku na koncový stav

$$\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{LQR}. \quad (2.30)$$

Je zřejmé, že pokud bude tato podmínka aktivní, ovlivní hodnotu kritéria. Navíc tak obvykle omezíme množinu řešitelnosti QP. Nejjednoduší, ale současně nejrestriktivnější volbou bude

$$\mathcal{X}_N = \mathcal{X}_{LQR} = 0. \quad (2.31)$$

Naopak nejvýhodnější volba uvažuje  $\mathcal{X}_N = \mathcal{X}_{LQR} = \mathcal{X}_{MAS}$ , kde  $\mathcal{X}_{MAS}$  je maximální pozitivně invariantní přípustná množina. Návod na její sestavení udává např. [13]. Článek

---

<sup>4</sup>Viz kapitola 3.

rovněž ukazuje, že pro lineární časově invariantní dynamický systém s polyedrickým omezením (2.16) bude i  $\mathcal{X}_{MAS}$  ve tvaru polyedru a lze ji proto snadno zahrnout do omezení  $\mathbf{G}\mathbf{u}_{t,N} \leq \mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{x}(t)$ .

Jelikož zákon řízení je obecně nelineární funkcí stavu, používají se k důkazu stability nelineární metody analýzy. Typicky vycházíme z druhé Lyapunovy metody, kdy volíme  $J(\mathbf{u}_{t,N}^*, t)$  za kandidáta Lyapunovy funkce. Snadno lze dokázat asymptotickou stabilitu popsaného řešení. Platnost je samozřejmě omezena jen na pozitivně invariantní množině regulátoru, která v našem případě tvoří oblast  $\mathcal{X}_{t_0}^f$ .

**Příklad 2.2 (Stabilita RHC):** Uvažujme opět systém z příkladu 2.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

s omezením

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad -15 \leq y(t) \leq 15. \quad (2.33)$$

Pro tři různé koncové podmínky

$$\text{a) } -15 \leq \mathbf{y}_N \leq 15 \quad \text{b) } \mathbf{x}_N = 0 \quad \text{c) } \mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{MAS}$$

a horizont predikce  $N = 2$  nalezneme oblast splnitelných počátečních podmínek  $\mathcal{X}_{t_0}$ . Pro stav  $\mathbf{x}(t_0) = [-4, 4; 10, 5]^T$  simulujeme vývoj systému v uzavřené smyčce.

*Řešení:* Pro jednotlivé případy sestrojíme matice  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{E}$  a s pomocí Multi-Parametric Toolboxu<sup>5</sup> [23] provedeme projekci rozšířeného polyedru (2.22) do stavového prostoru  $\mathcal{R}^n$ . Výsledek vidíme na obrázku 2.5.

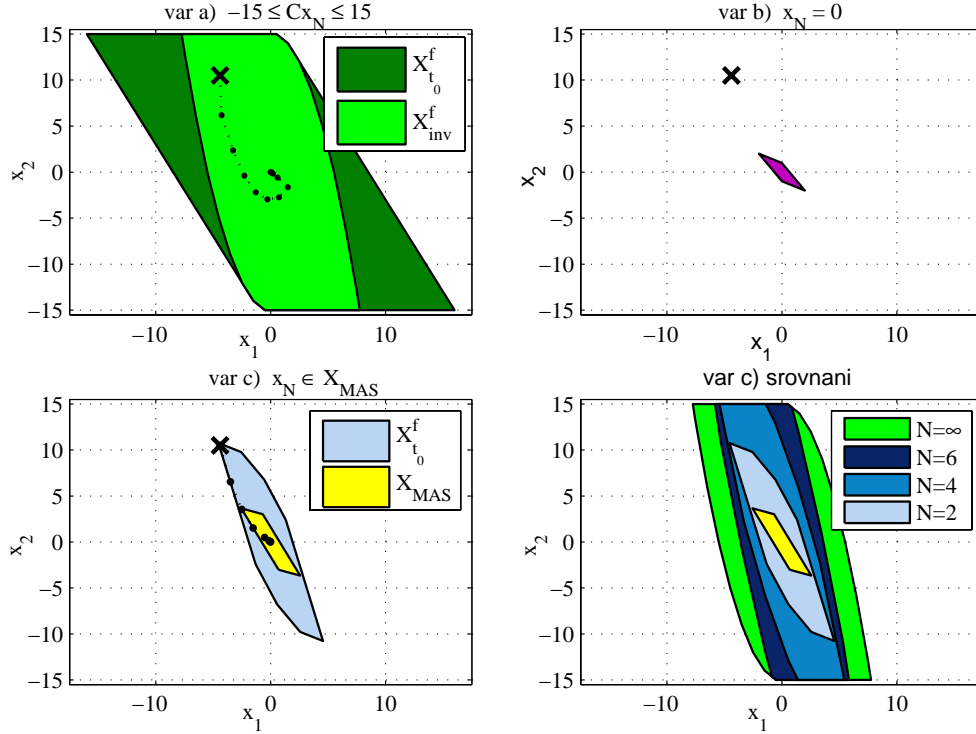
**Varianta a)** Bez zaručené stability. Oblast  $\mathcal{X}_{t_0}^f$  představuje oblast řešitelnosti pouze pro první krok klouzavého horizontu. Např. stav  $\mathbf{x}(t_0) = [-10, 10]^T$ , který je řešitelný pro  $t = t_0$  vede na neřešitelnost pro  $t = t_0 + 1$ . Pro srovnání jsme pomocí algoritmu [16] našli maximální pozitivně invariantní množinu  $\mathcal{X}_{inv}^f$  MPC regulátoru (zákon řízení  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{u}_t^*(\mathbf{x}(t))$ ).

**Varianta b)** Oblast  $\mathcal{X}_{t_0}^f$  pro koncovou podmínku  $\mathbf{x}_N = 0$  je značně malá a neobsahuje stav  $\mathbf{x}(t_0)$  - pro tuto počáteční podmínku nemá QP řešení.

**Varianta c)** Oblast  $\mathcal{X}_{t_0}^f$  představuje oblast s *a priori* zajištěnou stabilitou - tedy i řešitelností. Na posledním obrázku vidíme srovnání velikosti  $\mathcal{X}_{t_0}^f$  ve variantě c) pro různé délky horizontu predikce. ✓

---

<sup>5</sup>Volně dostupný nástroj pro Matlab.



Obrázek 2.5: Příklad 2: Stabilita a oblast splnitelných poč. podmínek.

**Poznámka:** Přidáme-li omezení na koncový stav  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{LQR}$  a váhu  $\mathbf{Q}_N$  koncového stavu zvolíme jako řešení algebraické Riccatiho rovnice, pak pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{t_0}^f$  bude splnění omezujících podmínek zaručeno na nekonečném horizontu a tedy i v průběhu MPC ( $\mathcal{X}_{t_0}^f = \mathcal{X}_{inv}^f$ ).  $\square$

## 2.5 Modifikace prediktivního regulátoru

Doposavad jsme vždy uvažovali pouze úlohu regulace, tedy řízení do počátku. Obvykle požadujeme, aby systém sledoval zadanou trajektorii (úloha servomechanizmu), případně zůstal v zadaných mezích (*range control*). V následujícím textu ukážeme některé modifikace MPC.



## 2.5.1 Sledování konstantní reference

Uvažujme model systému ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{2.34}$$

kde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$  a  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ . Naším úkolem je navrhnout prediktivní regulátor tak, aby vybrané výstupy

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^{p_z}, \quad p_z \leq p, \quad r \leq m$$

sledovaly po částech konstantní referenční signál  $\mathbf{r}(t)$ . Nejprve nahradíme člen  $\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k$  v původním kritériu (2.17) vážením odchylky  $(\mathbf{z}_k - \mathbf{r}_k)^T \mathbf{Q}_y (\mathbf{z}_k - \mathbf{r}_k)$ . Abychom tak mohli učinit, potřebujeme znát predikovanou hodnotu reference. Tu budeme modelovat jako náhodnou procházku (úloha servomechanizmu)

$$\mathbf{r}(t+1) = \mathbf{r}(t).$$

Existují i jiné přístupy, které využívají znalost budoucího vývoje reference. Potom mluvíme o programovém řízení. V ustáleném stavu (označujeme indexem  $u$ ) požadujeme, aby platila rovnost  $\mathbf{z}_u = \mathbf{r}_u$ . Tedy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{ZC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}_u \end{bmatrix}.\tag{2.35}$$

Jestliže má předchozí matice plnou řádkovou hodnotu, existuje řešení  $\mathbf{u}_u$  a  $\mathbf{x}_u$  pro libovolné  $\mathbf{r}_u$ . V důsledku nemulového ustáleného vstupu se v praxi často váží odchylka  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$  [9]. Pokud soustava obsahuje integrátor (lépe  $\mathbf{ZC}\mathbf{x}_u \notin \ker(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ ), lze vážit přímo hodnotu  $\mathbf{u}$ .

**Příklad 2.3 (Sledování):** Uvažujme spojitý systém s přenosem

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}.$$

Navrhněme MPC regulátor, který bude sledovat po částech konstantní referenci<sup>6</sup>  $-10 \leq r(t) \leq 10$  a zároveň zajistí podmínku

$$-10 \leq u(t) \leq 10.\tag{2.36}$$

---

<sup>6</sup>Jiný rozsah nemá smysl, jelikož je systém stabilní a má ustálené zesílení 1.

*Řešení:* Systém vyjádříme ve stavovém tvaru a diskretizujeme s periodou vzorkování  $T_{vz} = 0.5s$ . Příslušné matice jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0.303 & -0.303 \\ 0.03 & 0.909 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0.303 \\ 0.090 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pro sledování zvolíme následující kritérium

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_t, \dots, \mathbf{u}_{t+N-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=t}^{t+N-1} (\mathbf{e}_k^T \mathbf{Q}_e \mathbf{e}_k + \Delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_d \Delta \mathbf{u}_k), \quad (2.38)$$

kde  $\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{r}_k$  je regulační odchylka a  $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$  optimalizovaná proměnná. Stabilitu se pokusíme zajistit dostatečně dlouhým horizontem predikce ( $N = 10$ ) a systém rozšířený o historii akčního zásahu  $\mathbf{u}_k$  a generátor reference  $r_k$  formulujeme pomocí  $\Delta \mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{A}_m \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_m \Delta \mathbf{u}_k \quad (2.39)$$

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}_m \bar{\mathbf{x}}_k.$$

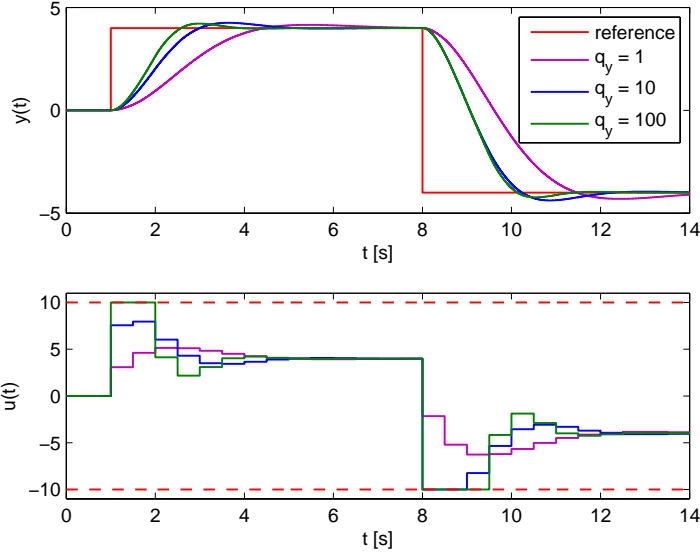
Pro tento systém sestrojíme klasický prediktivní regulátor podle odstavce 2.3.2, přičemž váhové matice volíme

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_m^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_m, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_d, \quad \mathbf{Q}_N = \mathbf{0},$$

a matice omezení

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{u}_{min} \end{bmatrix}.$$

K výstupu  $\Delta \mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t))$  navrženého regulátoru připojíme sumátor akčního zásahu. Rovněž musíme MPC dodat všechny potřebné stavy - stav systému, informaci o minulém akčním zásahu  $\mathbf{x}_{u,k}$  (stav sumátoru) a požadovanou referenci  $\mathbf{r}_k$ . Simulace pro různé hodnoty vah  $Q_y$  při  $R_d = 1$  jsou na obr. 2.6. Z průběhů je patrné, jak omezení ovlivňuje dosažitelnou kvalitu řízení. ✓



Obrázek 2.6: Sledování reference pro  $R_d = 1$  a různé váhy  $q_y$ .

## 2.5.2 Robustní sledování konstantní reference

Reálný systém se vždy liší od modelovaného a výše zmíněný postup nezaručuje nulovou regulační odchylku. Abychom mohli řídit  $p_z$  výstupů s nulovou ustálenou chybou, potřebujeme podle principu vnitřního modelu minimálně  $p_z$  integrátorů. Většina tradičních metod toto řeší přidáním integrátoru regulační chyby [12]. Tento postup se však u MPC nedoporučuje, jelikož vlivem omezení tyto metody trpí významným „windup“ efektem (překmit způsobený naintegrovaním) [25]. V článku [26] formulovali autoři prediktivní regulátor pro asymptotické sledování konstantní reference rozšířením pozorovatele stavu o odhad poruchy. Tento postup předpokládá přidání tolika nových stavů (poruch), kolik je měřených výstupů. V této podkapitole vycházíme z aktuálních článků [24] a [9], které rozšiřují stavový vektor pouze o  $p_z$  nových stavů, což se ukáže jako výhodnější z hlediska explicitního řešení MPC. Celá problematika přesahuje rámec této práce a je zde uváděna bez odvození pouze pro potřeby čtvrté kapitoly - návrh řízení pro reálný model.

Uvažujme model dynamického systému 2.34 rozšířený o poruchu na vstupu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(t), \\
 \mathbf{d}(t+1) &= \mathbf{d}(t), \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

kde systém (včetně poruchy) je pozorovatelný, dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  říditelná a  $\mathbf{d}(t) \in \mathcal{R}^{p_z}$  představuje neznámou poruchu. Tu modelujeme jako náhodnou procházku (uvažujeme

konstantní). Pro ustálený stav lze opět psát

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{ZC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \mathbf{r}_u + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_u. \quad (2.41)$$

Bude-li mít matice vlevo plnou řádkovou hodnotu, můžeme vyjádřit

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{X}_r \mathbf{r}_u + \mathbf{X}_d \mathbf{d}_u, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{U}_r \mathbf{r}_u + \mathbf{U}_d \mathbf{d}_u. \quad (2.43)$$

Dále předpokládáme, že stav není přímo měřitelný a odhadujeme jej včetně poruchy pomocí pozorovatele

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t+1) \\ \hat{\mathbf{d}}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{d}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} (\mathbf{y}_m(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)). \quad (2.44)$$

Zde  $\mathbf{y}_m(t)$  označuje měřený výstup v čase  $t$  a  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  odhad stavu v čase  $t$  na základě dat do času  $t-1$ . Konstrukci matic stavových injekcí  $\mathbf{L}_1$  a  $\mathbf{L}_2$  zde odvozovat nebudeme a pouze se odkážeme na algoritmus 2 článku [24]. Nyní formulujme kritérium, které bude vážit odchylku od ustáleného stavu.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{k=t}^{t+N-1} [(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_u(t))^T \mathbf{R}(\mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_u) + (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_u(t))^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_u(t))] + \\ &+ (\mathbf{x}_N - \hat{\mathbf{x}}_u(t))^T \mathbf{Q}_N(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_u(t)), \end{aligned}$$

za podmínky

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k, \\ \mathbf{E}_c \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_k &\leq \mathbf{m}_c, \quad k = t, \dots, t+N-1 \\ \mathbf{x}_N &\in \mathcal{X}_N(\mathbf{r}(t), \hat{\mathbf{d}}) \\ \hat{\mathbf{x}}_u(t) &= \mathbf{X}_r \mathbf{r}(t) + \mathbf{X}_d \hat{\mathbf{d}}(t), \quad \hat{\mathbf{u}}_u(t) = \mathbf{U}_r \mathbf{r}(t) + \mathbf{U}_d \hat{\mathbf{d}}(t), \\ \mathbf{x}_t &= \hat{\mathbf{x}}(t), \quad \mathbf{d}_t = \hat{\mathbf{d}}(t). \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli vážit pouze odchylku reference, zvolíme  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{ZC}$ .

Nechť ustálený stav a vstup leží uvnitř polyedru definující omezení a nechť regulátor asymptoticky stabilizuje soustavu. Potom lze očekávat, že pro určitý čas  $t \geq t_n$  již na systém nepůsobí žádná omezení a (jak ukážeme v kapitole 3) optimální zákon řízení je lineární funkcí stavu<sup>7</sup>

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_u - \mathbf{K}_x(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_u). \quad (2.45)$$

---

<sup>7</sup>Přesněji stavu rozšířeného o poruchu a referenci.

Předchozí vztah lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_x \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{K}_d \hat{\mathbf{d}}(t) - \mathbf{K}_r \mathbf{r}(t). \quad (2.46)$$

Je zřejmé, že návrh sledování se zajištěnou nulovou odchylkou je v případě MPC poměrně komplikovaný. Musíme zvolit vhodný model poruchy  $\mathbf{B}_d$  i správně naladit pozorovatele stavu. Pokud soustava neobsahuje integrátor, lze poruchy modelovat jako poruchy působící na výstupu ( $\mathbf{B}_d = 0$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{d}(t)$ ). V tomto případě stačí rozšířit pozorovatele o odhad poruchy a tu použít k modifikaci referenčního signálu. Výhodou je, že nemusíme měnit kritérium MPC (přidávat nové stavy).

**Poznámka:** Hodnota reference i poruchy uvlivňuje množinu řešitelnosti. Příliš velkou změnou referenčního signálu (či poruchou), můžeme ztratit řešitelnost úlohy. Podrobněji se touto problematikou zabývá např. článek [27].  $\square$

**Příklad 2.4 (Asymptotické sledování):** Navrhněme MPC pro asymptotické sledování konstantní reference pro příklad 2.1 dvojitý integrátor (modifikace úlohy z článku [24]).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

s omezením

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad -15 \leq y(t) \leq 15. \quad (2.48)$$

Předpokládejme plné měření stavu  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$  a nechť skutečná dynamika perturbovaného systému je popsána maticí

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Výsledek regulace porovnáme s řešením podle odstavce 2.5.1.

*Řešení:* Váhu koncového stavu  $\mathbf{Q}_N$  zvolíme jako řešení algebrické Riccatiho rovnice 2.13 pro  $Q_y = 1$  a  $R = 0,1$ . Horizont predikce jsme zvolili  $N = 5$  a uvažujeme omezení na koncový stav  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{MAS}$ . Nyní odvodíme potřebná zesílení podle 2.46. Zesílení  $\mathbf{K}_x$  získáme z Riccatiho rovnice při hledání koncové váhy  $\mathbf{Q}_N$ . Z 2.45 a 2.43 dostáváme

$$\mathbf{K}_d = -\mathbf{K}_x \mathbf{X}_d - \mathbf{U}_d, \quad \mathbf{K}_r = -\mathbf{K}_x \mathbf{X}_r - \mathbf{U}_r.$$

Po vyčíslení

$$\mathbf{K}_x = [0, 965 \ 1.384] \quad K_d = 1.542 \quad K_r = -0.965.$$

Pro tato zesílení sestavíme maximální pozitivně invariantní množinu  $\mathcal{X}_{MAS}$  podle [13]. Poruchu modelujeme na vstupu ve tvaru  $\mathbf{B}_d = [0.5 \ 1]^T$ . Stavovou injekci pro pozorovatele stavu jsme našli jednak pomocí odkazovaného algoritmu ( $\mathbf{L}_a$ ) a jednak standardním řešením Kalmanova filtru pro rozšířený systém (2.40) ( $\mathbf{L}_k$ ).

$$\mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} 1,55 & 1,09 \\ 0,39 & 0,76 \\ 0,50 & 0,27 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} 1,27 & 0,87 \\ 0,29 & 0,68 \\ 0,33 & 0,14 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Při formulaci s  $\Delta u$  podle odstavce 2.5.1 uvažujeme přímé měření stavu pertubovaného systému. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 2.7. Z průběhů je patrné, že pouze regulátor s pozorovatelem stavu se stavovou injekcí  $\mathbf{L}_a$  dokonvergoval ke správné hodnotě.

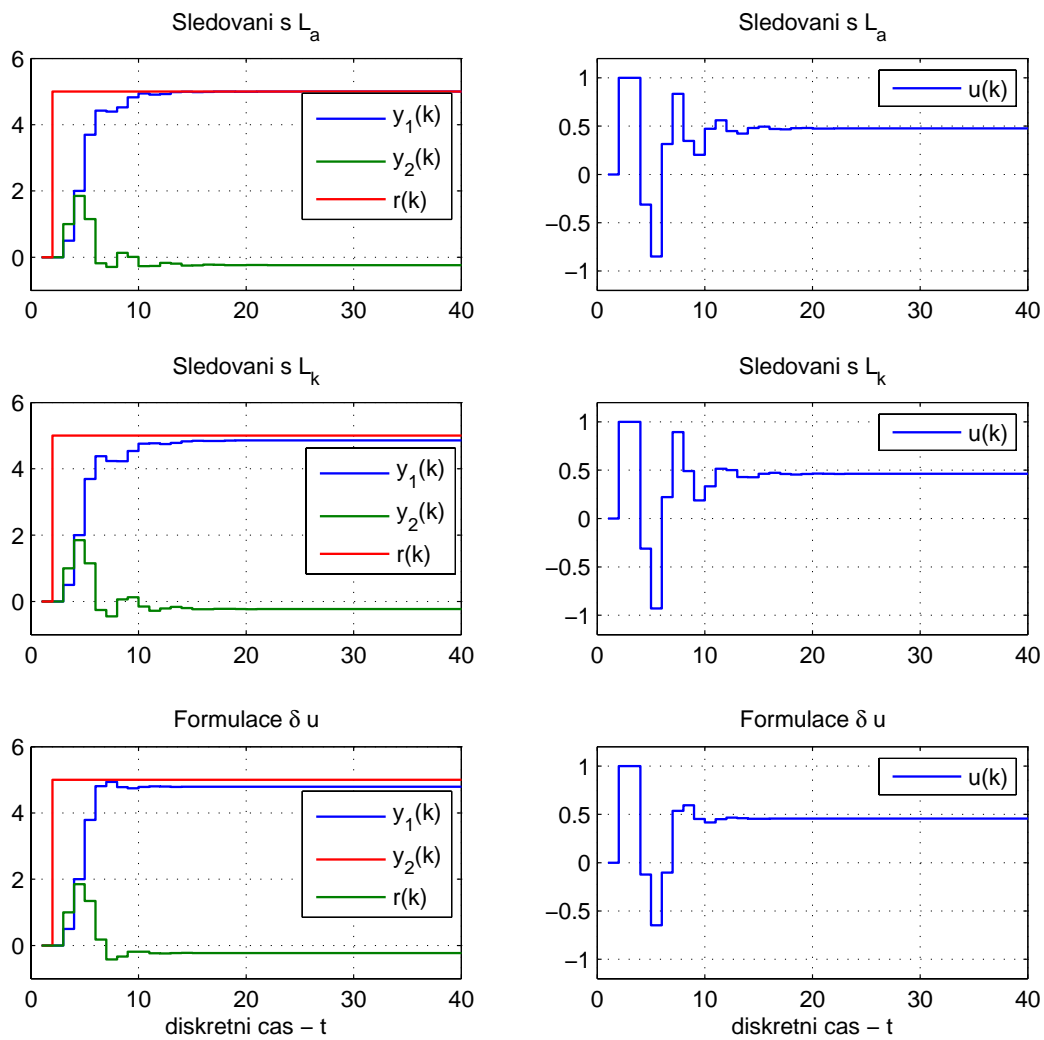
### 2.5.3 Měkká omezení

Takto označujeme taková omezení, která lze na úkor náležitě penalizace překročit. V praxi bývá výhodné některá omezení „změkčit“. Jak ukazuje příklad 2.2, řešení QP existuje pouze na určité oblasti (polyedru) v  $\mathcal{R}^n$  a pokud by se stav nacházel na rozhraní, může vlivem poruch dojít k překročení této oblasti a ztratě řešení. Zavedením nové proměnné  $\epsilon$  můžeme zrelaxovat některá omezení

$$\mathbf{E}_c \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_k \leq \mathbf{m}_c + \mathbf{m}_\epsilon \epsilon_k. \quad (2.49)$$

Současně přidáme do kritéria člen  $\epsilon_k^T \mathbf{R}_\epsilon \epsilon_k$ , kde váhu  $\mathbf{R}_\epsilon$  volíme řádově vyšší, než u  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ . V předchozím vztahu samozřejmě nelze „změkčit“ všechna omezení, ale jen ta, která nejsou omezena fyzikálními parametry soustavy či jejím bezpečným provozem. Penalizovat lze například některé nežádoucí (neekonomické) stavy.

Existuje mnoho způsobů jak modifikovat kritérium. V principu je možné vnést do kritéria nejrůznější váhy a omezení, ale méně je někdy více. Především se musíme zamyslet se nad náročností výpočtu QP, kterou blíže diskutujeme v 3.3. Obecně bychom neměli přidávat redundantní omezení. Například není třeba uvažovat omezení na počáteční stav  $\mathbf{x}(t)$ , jelikož ten už nezměníme.



Obrázek 2.7: Asymptotické sledování konstantní reference.





# Kapitola 3

## Explicitní řešení úlohy prediktivní regulace

Klasický prediktivní regulátor počítá optimalizační problém cyklicky s periodou vzorkování. V každém kroku klouzavého horizontu hledáme optimální řídicí sekvenci  $\mathbf{u}_{t,N}^*(\mathbf{x}(t))$  příslušnou ke stavu  $\mathbf{x}(t)$ , tedy řešíme kvadratický program (2.21). Jelikož jsou numerické optimalizační metody výpočetně náročné, nehodí se tato koncepce pro relativně rychlé systémy.

V článku [5] formulovali autoři Bemporad, Morari a kol. úlohu (2.17) pomocí multiparametrického kvadratického programování a našli tak explicitní zákon řízení  $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  minimalizující kvadratické kritérium s omezením (2.17). Obdobně lze formulovat úlohu minimalizace vážených 1 a  $\infty$  norem pomocí multiparametrického lineárního programování [3]. Výhoda tohoto přístupu spočívá v odsunutí časově náročné optimalizace k off-line výpočtům. V průběhu řízení stačí změřit aktuální stav a aplikovat příslušné řízení. Další výhodou je samotný zákon řízení, s jehož pomocí můžeme snadněji analyzovat chování získaného MPC regulátoru.

V této kapitole nejprve odvodíme úlohu multiparametrického kvadratického programování. Na jejím základě formulujeme v druhé části explicitní řešení MPC a zmíníme některé vlastnosti, které plynou ze získaného zákona řízení. Na závěr diskutujeme složitost explicitního řešení, která je hlavní nevýhodou tohoto přístupu.

### 3.1 Multiparametrické kvadratické programování

Základní úlohou matematického programování je nalézt extrém skalární funkce  $J(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x}$  je prvkem nějaké množiny  $\mathcal{Z}$ . V našem případě se opět omezíme pouze na kvadratické kritérium s konvexním omezením ve tvaru

$$J^*(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{z}} \left\{ J(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{H} \mathbf{z} + \beta \mid \mathbf{G} \mathbf{z} \leq \mathbf{w} + \mathbf{S} \mathbf{x} \right\}, \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T \succ 0$ ,  $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^{s \times s}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathcal{R}^{q \times s}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^q$  a  $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{q \times n}$ .

Tato úloha se nazývá multiparametrické kvadratické programování (dále mpQP) a jejím cílem je nalézt:

- obor řešitelnosti (množinu parametrů, pro které má daná úloha optimální řešení)
- oblasti stability (množinu parametrů, pro které optimální řešení zůstává stejné resp. zachovává si stejnou charakteristiku)
- funkci řešitelnosti (optimální hodnoty cílové funkce pro hodnoty  $\mathbf{z}$  z oboru řešitelnosti)

Pro obecnější problém

$$J(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{z}} + \mathbf{x}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Y} \mathbf{x}(t) \mid \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}} \leq \mathbf{w} + \mathbf{E} \mathbf{x} \right\} \quad (3.2)$$

lze zavést substituci

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{x} \quad (3.3)$$

a převést rovnici do tvaru 3.1, kde

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}^T, \quad (3.4)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{F} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Y}) \mathbf{x}. \quad (3.5)$$

Mějme danou výchozí množinu parametrů ve tvaru uzavřeného polyedru

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{T} \mathbf{x} \leq \mathbf{v} \}. \quad (3.6)$$

Označme  $\mathcal{K}^*$  takovou podmnožinu  $\mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}$ , pro kterou bude problém 3.1 řešitelný a hodnota kritéria  $J^*(\mathbf{x})$  konečná. Tuto množinu budeme nazývat obor řešitelnosti. Naším cílem bude ukázat, že funkce  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x}) : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{R}^s$

$$\mathbf{z}^*(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad (3.7)$$

je po částech afinní funkci parametru  $x$  na ohraničeném polyedru  $\mathcal{K}^*$ .

Nechť  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, q\}$  je množina indexů, označující jednotlivá omezení (řádky matic  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{S}$ ). Tuto množinu můžeme rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x}) &= \{j \in \mathcal{I} \mid \mathbf{G}_j \mathbf{z}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j \mathbf{x} = w_j\}, \\ \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) &= \{j \in \mathcal{I} \mid \mathbf{G}_j \mathbf{z}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j \mathbf{x} < w_j\},\end{aligned}\tag{3.8}$$

kde  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  značí aktivní a  $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$  neaktivní omezení v bodě  $\mathbf{z}^*$ . Optimální rozdělení množiny  $\mathcal{K}^*$  tvoří rozdělení do tzv. kritických regionů. Pro zvolené  $\mathbf{x}_0$  je kritický region  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$  definován následovně

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{K} \mid \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_0)\}.\tag{3.9}$$

Jedná se tedy o takovou množinu  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^*$ , kde v optimu  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x})$  jsou aktivní stejná omezení jako v optimu pro bod  $\mathbf{x}_0$ .

### 3.1.1 Odvození

Vydeme z Karush-Kuhn-Tuckerových podmínek optimality prvního řádu [21], které jsou pro naši úlohu (3.1) nutné a postačující. Pro kvadratický program (3.1) dostáváme

$$\mathbf{H} \mathbf{z}^* + \mathbf{G}^T \lambda^* = 0,\tag{3.10a}$$

$$\lambda_i (\mathbf{G}_i \mathbf{z}^* - w_i - \mathbf{S}_i \mathbf{x}) = 0,\tag{3.10b}$$

$$\lambda_i \geq 0,\tag{3.10c}$$

$$\mathbf{G} \mathbf{z}^* \leq \mathbf{w} + \mathbf{S} \mathbf{x}.\tag{3.10d}$$

Jelikož  $\mathbf{H}$  je pozitivně definitní, můžeme z první rovnice vyjádřit argument

$$\mathbf{z}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}^T \lambda^*.\tag{3.11}$$

Pro zvolené  $\mathbf{x}_0$  rozdělíme omezení podle 3.8. Spodním indexem  $A$  označíme množinu aktivních omezení (vybrané řádky), indexem  $\bar{A}$  neaktivní. Z rovnice 3.10b vyplývá, že pro neaktivní omezení bude  $\lambda_{\bar{A}}^* = 0$ . Po dosazení za  $\mathbf{z}^*$  z rovnice 3.11 dostáváme

$$-\mathbf{G}_A \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_A^T \lambda_A^* - \mathbf{w}_A - \mathbf{S}_A \mathbf{x} = 0.\tag{3.12}$$

Za podmínky lineární nezávislosti řádků<sup>1</sup> matice  $\mathbf{G}_A$  vyjádříme

$$\lambda_A^* = -(\mathbf{G}_A \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_A^T)^{-1} (\mathbf{w}_A + \mathbf{S}_A \mathbf{x}).\tag{3.13}$$

---

<sup>1</sup>Degenerovaný problém zmíníme později.

Nakonec dosadíme za  $\lambda^*$  do vztahu 3.11

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T (\mathbf{G}_{\mathcal{A}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T)^{-1} (\mathbf{w}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}). \quad (3.14)$$

Z předcházejících dvou rovnic vidíme, že jak  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x})$  tak i  $\lambda^*(\mathbf{x})$  jsou afinní funkce parametru  $\mathbf{x}$ . Navíc díky podmínce  $\mathbf{H} \succ 0$  je hodnota  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x})$  jednoznačná.

Zbývá určit kritický region  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$ , na kterém odvozený vztah 3.14 platí. Po dosazení za  $\mathbf{z}$  do omezení v rovnici 3.1

$$\mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T (\mathbf{G}_{\mathcal{A}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T)^{-1} (\mathbf{w}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}) \leq \mathbf{w} + \mathbf{S} \mathbf{x} \quad (3.15)$$

a z požadavku na nezápornost  $\lambda$  v KKT podmínce 3.10c

$$(\mathbf{G}_{\mathcal{A}} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^T)^{-1} (\mathbf{w}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{A}} \mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.16)$$

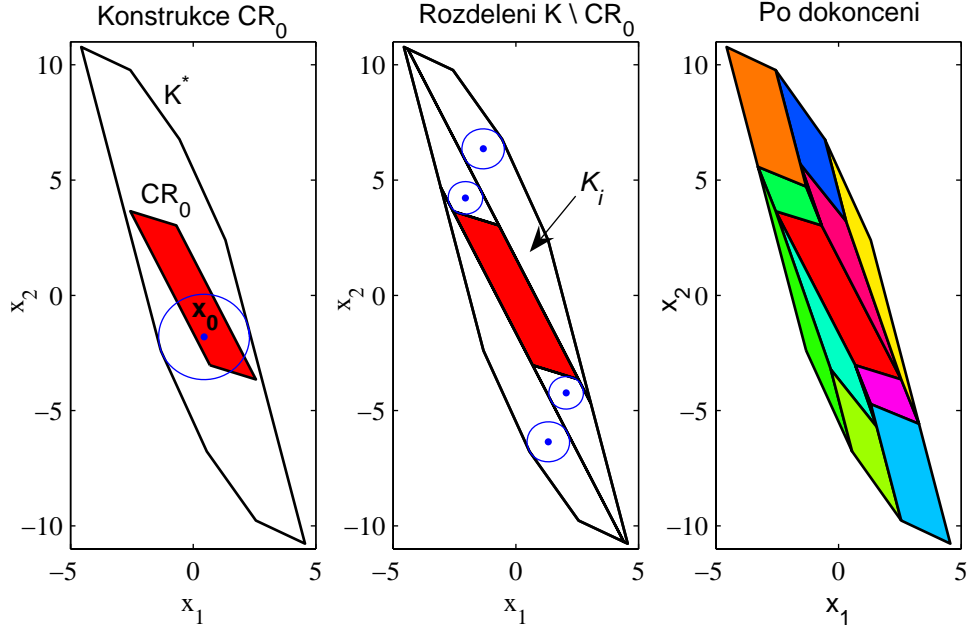
dostáváme vynecháním redundantních omezení kompaktní polytopickou reprezentaci kritického regionu  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$  k danému  $\mathbf{x}_0$ . Kritický region představuje v naší formulaci oblast stability, kde si řešení zachovává stejnou charakteristiku (jednoznačně definovaná afinní funkce).

### 3.1.2 Geometrické prohledávání

Výše zmíněným postupem získáme řešení jen pro  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$ . Vyvstává otázka jak zvolit počáteční bod  $\mathbf{x}_0$  a jak prohledat zbytek stavového prostoru  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$ . Názorný postup nabízí algoritmus geometrického prohledávání [7, strana 35].

1. Zvolíme  $\mathbf{x}_0$  jako střed vepsané hyperkoule v  $\mathcal{K}$ ;
2. Řešením QP (3.1) pro parametr  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  nalezneme hodnoty  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x}_0)$  a  $\lambda^*(\mathbf{x}_0)$ ;
3. Sestrojíme region  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$  a afinní funkci  $\mathbf{z}_0^*(\mathbf{x})$ ;
4. Oříznutím podle  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}_0}$  rozdělíme zbytek neprohledaného prostoru  $\mathcal{K}$  na nové polytopy  $\mathcal{K}_i$  (viz obr. 3.1);
5. Rekurzivně opakujeme pro  $\mathcal{K}_i$ ;

Střed největší vepsané koule (též Čebyševův střed) nalezneme pomocí lineárního programování. Pokud takový střed neexistuje, vracíme se o krok zpět v rekurzivním algoritmu. Z obrázku (3.1) je patrné, že tato metoda prohledávání zavádí „úmělé řezy“ mezi regiony. Po dokončení algoritmu je proto vhodné sloučit sousedící regiony, které obsahují



Obrázek 3.1: Geometrické prohledávání.

stejnou funkci  $\mathbf{z}^*$  a jejichž sloučení vytváří konvexní množinu. Postup algoritmu názorně demonstruje příložený skript *qpMPQP\_demo*.

**Poznámka:** V 3.13 jsme předpokládali lineární nezávislost řádků  $\mathbf{G}_A$ . Tento požadavek nebude splněn, jestliže bod  $\mathbf{x}_0$  padne do rozhraní dvou sousedících regionů. V tomto případě stačí zvolit nový (posunutý) bod  $\mathbf{x}_0 + \epsilon$ .  $\square$

**Věta 3.1 (Spojitost mpQP):** *Mějme multiparametrický kvadratický program (3.1) a nechť  $\mathbf{H} \succ 0$  a  $\mathcal{K}$  konvexní. Potom  $\mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}$  je také konvexní a  $\mathbf{z}^*(\mathbf{x}) : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{R}^s$  je spojitá a po částech afinní funkce,  $J^*(\mathbf{x}) : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{R}$  spojitá, konvexní a po částech kvadratická funkce.*

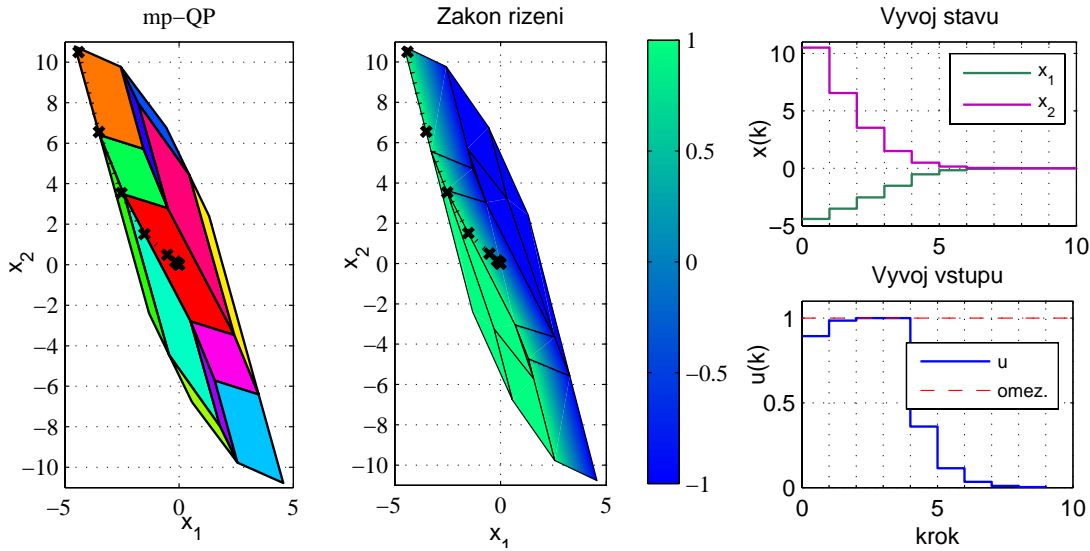
*Důkaz této věty lze nalézt v [6].*

## 3.2 Explicitní MPC

Mějme kvadratické kritérium v maticovém tvaru (2.19)

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_{t,N}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{t,N}^T \mathbf{H} \mathbf{u}_{t,N} + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{F} \mathbf{u}_{t,N} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Y} \mathbf{x}(t), \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{u}_{t,N} \leq \mathbf{w} + \mathbf{E} \mathbf{x}(t). \quad (3.17b)$$



Obrázek 3.2: Explicitní MPC pro dvojité integrátor.

Nalezení optimálního řízení minimalizující toto kritérium si lze představit jako multiparametrický kvadratický program (3.2), kde vektor optimalizačních proměnných  $\tilde{\mathbf{z}}$  odpovídá posloupnosti akčních zásahů  $\mathbf{u}_{t,N}$  a stav  $\mathbf{x}(t)$  vektoru parametrů  $\mathbf{x}$ . Jelikož předpokládáme  $\mathbf{H} \succ 0$ , dostáváme dle věty 3.1 spojitý optimální zákon řízení  $\mathbf{u}_{t,N}^*(\mathbf{x}(t))$  jako po částech afinní funkci stavu

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{P}_i \Rightarrow \mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}_i, \quad (3.18)$$

kde  $\mathcal{P}_i$  označuje polytop obsahující stav  $\mathbf{x}(t)$ . Přestože řešením mpQP získáme celou řídicí posloupnost  $\mathbf{u}_{t,N}^*(\mathbf{x}(t))$ , díky metodě klouzavého horizontu nás zajímá pouze první akční zásah  $\mathbf{u}_t^*(\mathbf{x}(t))$ . Postup si ilustrujeme na následujícím příkladě.

**Příklad 3.1 (Explicitní řešení MPC):** Sestrojme explicitní prediktivní regulátor pro systém z příkladu 2.2 (dvojité integrátor) s omezením na koncový stav  $\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_{MAS}$  a délkou predikce  $N = 2$ .

*Řešení:* Sestavíme příslušné matice a vyřešíme mp-QP. Výsledné rozdělení vidíme na obr. 3.2 vlevo. Na obrázku dále vidíme vývoj systému v uzavřené zpětné vazbě pro zvolenou počáteční podmínku  $\mathbf{x}(t_0) = [-4, 4; 10, 5]^T$ . Snadno můžeme vykreslit i optimální zákon řízení na pro celou oblast  $\mathcal{X}_0$ .

**Poznámka:** Nechť kritický region  $\mathcal{P}_0$  přísluší oblasti, ve které jsou všechna omezení neaktivní, tj. platí ostrá nerovnost u (3.17b). Z KKT podmínek snadno vyjádříme

$$\mathcal{P}_0 = \{ \mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n \mid -(\mathbf{E} + \mathbf{G}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}^T)\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{w} \}. \quad (3.19)$$

Pro všechna  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{P}_0$  je optimální řízení pouze lineární funkcí stavu a odpovídá kvadraticky optimálnímu řízení bez omezení (2.9)

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}_{MPC}\mathbf{x}(t) = [\mathbf{I}_m \ 0 \ \dots \ 0]\mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}^T. \quad (3.20)$$

Lze ukázat, že pro dostatečně dlouhý horizont predikce bude množina  $\mathcal{P}_0$  pozitivně invariantní a díky spojitosti mp-QP pak představuje maximální pozitivně invariantní množinu. Obecně platí  $\mathcal{X}_{MAS} \subseteq \mathcal{P}_0$ .  $\square$

### 3.2.1 Využití explicitního řešení

Bez hlubšího vysvětlování se zmíníme o dalších možnostech, které přináší explicitní řešení prediktivní regulace. Všechny implementuje již zmíněný Multiparametric-Programming Toolbox [23]. Mimo vizuální kontroly u dvou až tří dimenzionálního stavového prostoru je zajímavá například analýza řešitelnosti MPC viz. příklad 2.2. S využitím explicitního zákona řízení lze sestrojít například maximální pozitivně invariantní množinu MPC regulátoru, či se můžeme pokusit sestrojít Lyapunovu funkci a ověřit stabilitu viz [15], [16]. Algoritmus [14] zase nabízí efektivní způsob výpočtu kvadraticky optimálního MPC regulátoru s nekonečným horizontem predikce pro danou uzavřenou oblast  $\mathcal{X}$  uvažovaných počátečních podmínek.

## 3.3 Složitost explicitního řešení

Doposud jsme zmiňovali pouze přednosti explicitního řešení MPC. Hlavní nevýhodou tohoto přístupu je prudký nárůst složitosti s počtem omezení. Složitost se projeví především v počtu generovaných kritických regionů a ovlivní jak dobu výpočtu mp-QP, tak dobu potřebnou k vyhledání správného regionu (toho, který obsahuje zákon řízení pro stav  $\mathbf{x}(t)$ ). Jak už víme, každý kritický region přísluší některé kombinaci aktivních omezení - řádkům matic

$$\mathbf{Gz} \leq \mathbf{w} + \mathbf{Sx}$$

viz (3.8). Nechť předchozí vztah neobsahuje žádná redundantní omezení a nechť  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^q$ . Potom pro horní odhad počtu regionů lze psát

$$R_{max} = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} = 2^q. \quad (3.21)$$

Tento odhad je velmi nekonzervativní. Ve skutečnosti nemohou být aktivní libovolné kombinace omezení. Ku příkladu máme-li omezení na vstup ve tvaru  $\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{max}$ , potom pouze jedno z nich může být aktivní<sup>2</sup>. Přesto exponenciální závislost na počtu omezení zůstává. Podrobněji je analýza složitosti mp-QP diskutována v [17].

### 3.3.1 Redukce on-line složitosti

K nalezení správného akčního zásahu je třeba nejprve určit kritický region, ve kterém se nachází aktuální stav, a po té spočítat jeho hodnotu podle (3.18). Z hlediska výpočetní náročnosti je nejdůležitější první krok - vyhledání regionu. Rešerší literatury jsme našli následující algoritmy pro vyhledání správného regionu

- Základní a nejjednodušší algoritmus pouze prochází lineárním seznamem regionů a ověřuje podmínku  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{P}_i$  (viz (??)). Složitost tohoto algoritmu závisí lineárně na počtu regionů.
- Sofistikovanější přístup [8] využívá speciálně sestrojeného deskriptoru, který umožňuje rychleji otestovat podmínku příslušnosti k danému regionu a zároveň spotřebuje méně paměti, než bychom potřebovali k uložení dat všech regionů.
- Pro méně komplexní řešení (maximálně několik set regionů) lze efektivně sestrojít binární vyhledávací strom [32] s logaritmickou on-line složitostí.

Všechny výše zmíněné metody závisí především na počtu regionů. Abychom omezili jejich množství a zároveň zachovali optimalitu řízení, lze sloučit ty regiony, které obsahují shodný akční zásah v prvním kroku  $\mathbf{u}_t^*(\mathbf{x}(t))$  posloupnosti  $\mathbf{u}_{t,N}^*$  a jejichž sloučení vytváří konvexní množinu. Toto si můžeme dovolit, jelikož předpokládáme řízení metodou klouzavého horizontu.

### 3.3.2 Suboptimální řešení

V této části se zmíníme o dalších postupech, které již vedou na „suboptimální“ řešení, ale které jsou často nezbytné pro snížení komplexity mp-QP. V článku [11] je popsána strategie blokování akčních zásahů. Ta má za následek redukci stupňů volnosti optimalizační úlohy a tím i počet možných aktivních omezení. Je zmíněn i speciální tvar blokování,

---

<sup>2</sup>Předpokládáme  $\mathbf{u}_{min} \neq \mathbf{u}_{max}$ .



který může zajistit stabilitu a řešitelnost. Zcela jinou cestou se vydali autoři článku [17]. Úlohu mp-QP vyřešili pomocí iterativního řešení jednokrokových (s horizontem predikce jedna) optimalizací s proměnnou cílovou množinou  $\mathcal{X}_1$ . Ta se vždy spočítá jako sloučení všech vygenerovaných regionů. Tento postup zajistí stabilitu i řešitelnost a dle autorů minimálně ovlivní optimalitu. Výhodou je především redukovaná on-line složitost. Poslední odkazovaný algoritmus [4] využívá relaxace KKT podmínek optimality (3.10). V tomto případě lze předem stanovit hranici na maximální hodnotu odchylky od optimálního řešení (hodnoty kritéria).

Abychom omezili počet regionů, můžeme snížit přímo horizont pro omezení. V takovém případě nemáme jistotu, že problém zůstane řešitelný i pro další kroky klouzavého horizontu. Demonstrujeme na následujícím příkladě.

**Příklad 3.2:** Mějme opět systém 2.37 (dvojitý integrátor) a představme si jej jako reálnou soustavu, kde první stav  $x_1$  odpovídá rychlosti a druhý stav  $x_2$  poloze. Výstupem soustavy je přímo  $x_2$ , tedy poloha. Omezení a váhové matice uvažujeme stejné jako v předchozích případech, tj.

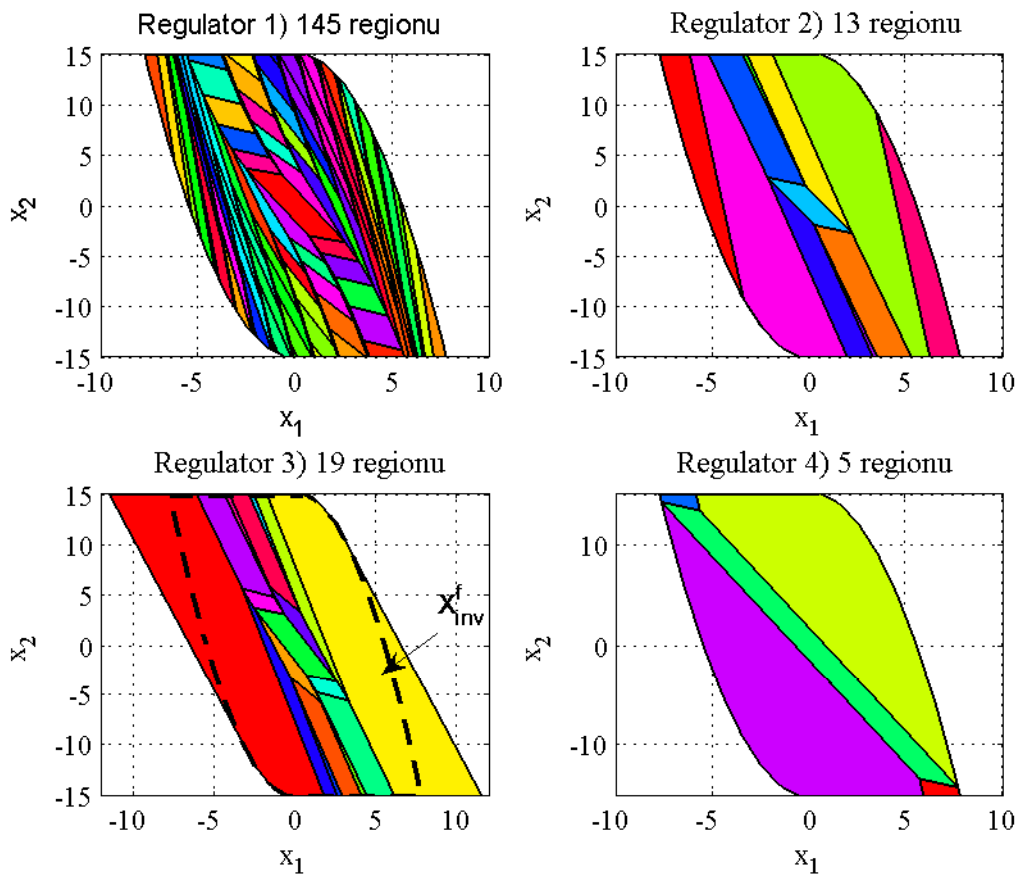
$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad -15 \leq y(t) \leq 15, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I}_2, \quad R = 0, 1.$$

Pro tento systém nalezneme závislost kvality regulace na počáteční poloze (počáteční rychlost předpokládáme nulovou) pro

1. optimální MPC s horizontem predikce  $N = 10$
2. suboptimální MPC se zkráceným horizontem řízení  $N_c = 3$ , kde pro zbylé akční zásahy platí  $u_k = u_{N_c}$ ,  $k = N_c, \dots, N - 1$ .
3. suboptimální MPC se zkráceným horizontem omezení na  $N_{omez} = 3$ .
4. suboptimální MPC podle algoritmu 2, článku [17] (iterativní řešení).

*Řešení:* Pro každou variantu sestojíme příslušný explicitní tvar MPC. Kvalitu řízení vypočteme obdobně jako v příkladu (2.26) simulací, za použití klouzavého horizontu. Regulátory jsme navrhli a analyzovali pomocí MPT toolboxu. Na obr. 3.3 vidíme získané rozdělení kritických regionů pro jednotlivé varianty.

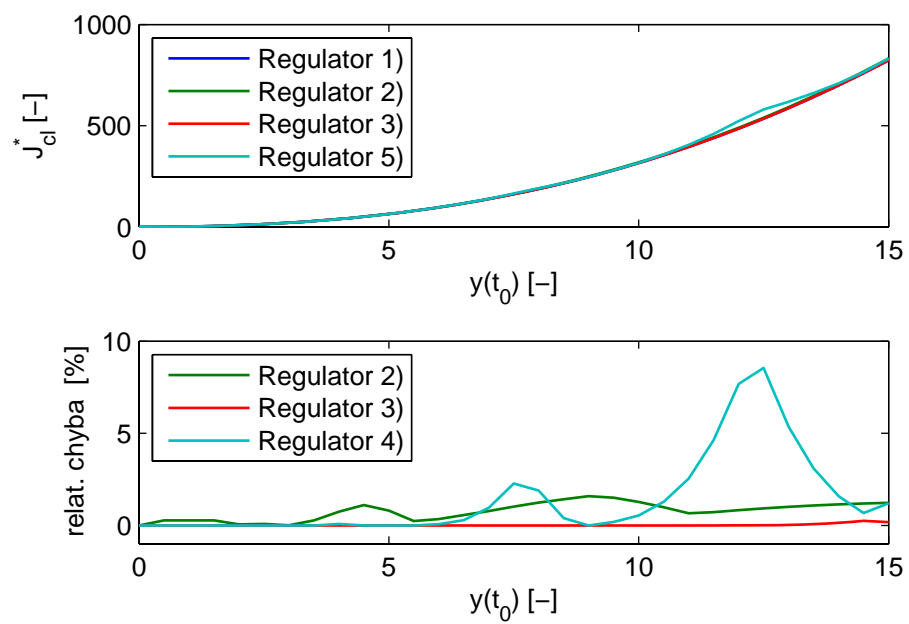
Krom čtvrtého regulátoru, který pro svou konstrukci vyžaduje stabilizující cílovou množinu, nemáme jinde zajištěnou stabilitu ani řešitelnost pro budoucí kroky řízení. Vzhledem k vypočtenému explicitnímu zákonu řízení, lze tyto vlastnosti analyzovat nad získaným rozdělením pomocí algoritmů uvedených v [16], [15]. Oba jsou implementovány



Obrázek 3.3: Rozdělení do kritických regionů.

v MPT toolboxu a jejich aplikací snadno overíme stabilitu a řešitelnost pro první dva případy. Pro třetí regulátor musíme nejprve spočítat invariantní podmnožinu (vyznačena čárkovaně), která teprve tvoří oblast stability daného regulátoru.

Obrázek 3.4 zobrazuje získanou závislost kvality regulace na zvolené počáteční podmínce. Vzhledem k symetrii úlohy uvažujeme pouze interval  $\langle 0; 15 \rangle$ . Na horním obrázku vidíme absolutní hodnotu „ceny regulace“. Zřetelnější je spodní obrázek, který zobrazuje relativní odchylku od optimálního řešení v první variantě.



Obrázek 3.4: Závislost kvality řízení na počáteční poloze.



# Kapitola 4

## Návrh řízení pro reálnou soustavu

V této kapitole provedeme kompletní návrh explicitního prediktivního regulátoru pro reálný laboratorní model CE106 „kulička na tyči“ od firmy TQ. Nejprve model popíšeme a odvodíme příslušné diferenciální rovnice. Na jejich základě sestavíme lineární stavový popis (rovnice linearizujeme) a provedeme identifikační experiment. Pro získaný model sestrojíme explicitní prediktivní regulátor a porovnáme simulované a měřené chování soustavy.

### 4.1 Popis modelu kulička na tyči

Systém kulička na nakloněné rovině představuje nestabilní systém druhého řádu. V praxi existuje řada systémů, které jsou nestabilní v otevřené smyčce a které je nezbytné řídit. Příkladem může být řízení exotermní reakce v chemickém průmyslu, řízení vertikální polohy plazmatu v tokamaku [30] či stabilizace letadla Harrier při kolmém startu. Pro výukové účely byl navržen model CE106 „kulička na tyči“, který si dále popíšeme.

#### 4.1.1 Fyzikální model

Systém se skládá ze servomotoru ovládajícího náklon tyče a z ocelové kuličky, která se volně pohybuje v kolejnicích umístěných na tyči. Schématicky je model zakreslen na obr. 4.2. Smyčka servomotoru je realizována pomocí modulu CE120 a vstupem do soustavy je přímo požadovaná hodnota náklonu. Výstupem je aktuální náklon a poloha kuličky. Model ovládáme pomocí vstupně výstupní karty MF614 firmy Humusoft© s pe-



Obrázek 4.1: Laboratorní model CE106 - kulička na tyči.

riodou vzorkování  $T_{vz} = 0.01s$ . Rozsahy jednotlivých veličin uvádí tabulka 4.1.

Tabulka 4.1: Tabulka veličin

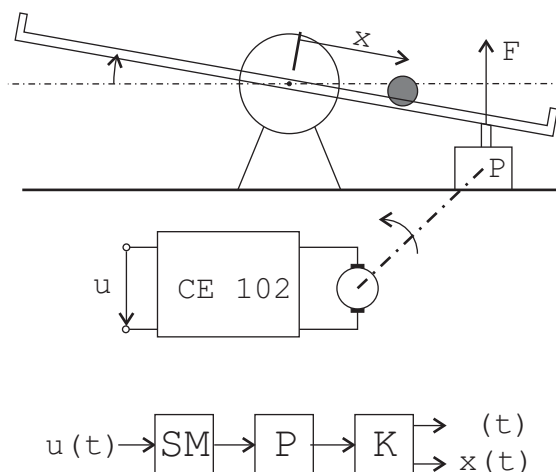
veličina	označení	signál	fyzikální rozsah
poloha	$x$	$\pm 10V$	$\pm 0.5m$
náklon	$\varphi$	$\pm 10V$	$\pm 10^\circ$
vstup	$u$	$\pm 10V$	$0 \dots 10VDC$

Systém rozložíme na tři části:

1. servomotor (SM)
2. převodní mechanismus - otočení SM na náklon tyče (P)
3. mechanika kuličky a tyče (MK)

#### 4.1.1.1 Mechanika kuličky a tyče

K odvození použijeme Lagrangeovskou formulaci mechaniky [33]. Definujme použité konstanty:



Obrázek 4.2: Schemtaický model CE106.

$J_k, (J_t)$	moment setrvačnosti kuličky (tyče)	$[kg \cdot m^2]$
$m$	hmotnost kuličky	$[kg]$
$r$	poloměr valení kuličky (určen rozpětím kolejnic)	$[m]$
$g$	gravitační konstanta	$[m \cdot s^{-2}]$
$d$	vzdálenost působiště síly $F$ od osy rotace tyče	$[m]$
$b$	koeficient odporu prostředí	
$\zeta$	rameno valivého odporu	$[m]$

Nejprve nalezneme vztahy pro kinetickou  $E_k$  a potenciální  $E_p$  energii soustavy. Pro kinetickou energii dostáváme

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_k \frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2} J_t \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 x^2, \quad (4.1)$$

kde první dva členy odpovídají translační a rotační energii kuličky a poslední dva kinetické energii tyče včetně kuličky na pozici  $x$ . Potenciální energii vyjádříme vzhledem k nulovému náklonu tyče

$$E_p = mg \sin(\varphi). \quad (4.2)$$

Dále je třeba určit zobecněnou práci nekonzervativních sil. Zobecněnými souřadnicemi jsou poloha kuličky  $x$  a úhel náklonu  $\varphi$ . Vyjádříme rovnou příslušné parciální derivace

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -b\dot{x} - \text{sign}(\dot{x}) \frac{\zeta}{r} F_n \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = Fd \cos(\varphi). \quad (4.4)$$

Člen  $b\dot{x}$  odpovídá třecí síle a člen  $\frac{\zeta}{r} F_n$  valivému odporu (působí vždy proti směru pohybu). Valivý odpor je úměrný normálové síle, kterou vyjádříme jako  $F_n = mg \cos(\varphi) + m\ddot{\varphi}x$ .

Konečně poslední člen  $Fd \cos(\varphi)$  zahrnuje působení vnější síly od servomotoru [19, 29]. Nyní sestavíme Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{q}_i(t)} - \frac{\partial L(t)}{\partial q_i(t)} = \frac{\partial W(t)}{\partial q_i(t)}, \quad (4.5)$$

kde  $L = E_k - E_p$  a  $q_i(t)$  jsou zobecněné souřadnice  $q_1(t) = x$  a  $q_2(t) = \varphi$ . Po provedení naznačených derivací získáme

$$\left(m + \frac{J_k}{r^2}\right) \ddot{x} - m\dot{\varphi}^2 x + mg \sin(\varphi) = -b\dot{x} - \text{sign} \frac{\zeta}{r} m (g \cos(\varphi) + \ddot{\varphi} x), \quad (4.6)$$

$$(J_t + mx^2) \ddot{\varphi} + 2m\dot{\varphi}x\dot{x} + mgx \cos(\varphi) = Fd \cos(\varphi). \quad (4.7)$$

První rovnice popisuje vliv náklonu na pohyb kuličky, druhá naopak jak kulička ovlivňuje náklon tyče (zanedbáme). Pro naše účely je tento model zbytečně složitý. Vzhledem k rychlé dynamice náklonu nebudeme uvažovat sílu  $F$ , ale přímo hodnotu náklonu  $\varphi$  jako vstup do soustavy MK. Ostatní členy se vyruší během linearizace.

#### 4.1.1.2 Náklon

Dynamiku servomotoru včetně převodní části (P) můžeme popsat jako lineární systém druhého řádu s přenosem [31]

$$G(s) = \frac{k}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad (4.8)$$

což odpovídá diferenciální rovnici

$$\ddot{\varphi} = -(p_1 + p_2)\dot{\varphi} - p_1 p_2 \varphi + ku. \quad (4.9)$$

Jak ukázalo měření na modelu, náklon vykazuje značnou hysterezi (cca 5% z celkového rozsahu) a není možné ji zanedbat. Vůle se projeví při změně směru naklápění či působením váhy kuličky. Abychom získali dostatečně přesný model pro predikci vývoje systému, zavedeme vnitřní smyčku s PI regulátorem pro řízení náklonu. Tento systém s uzavřenou smyčkou jsme znovu identifikovali a ukázalo se, že model 4.8 je vyhovující.

### 4.1.2 Linearizace

Popis dynamiky náklonu (4.9) již lineární je a proto se soustředíme pouze na rovnici (4.6). Systém linearizujeme okolo následujícího ekvilibria

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0.$$



Linearizací dostáváme  $\sin(x) \cong x$ . Dále vypadne člen  $\text{sign}(\cdot)$ , který v rovnici reprezentuje valivý odpor, a člen  $\dot{\varphi}^2 x$  reprezentující působení odstředivé síly. Výslednou lineární diferenciální rovnici druhého řádu převedeme na soustavu rovnic prvního řádu. Substitucí  $x_1 = \dot{x}$ ,  $x_2 = x$  a  $\varphi = u$  dostáváme

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{m + J_k/r^2} (-bx_1(t) + mgu(t)), \quad (4.10a)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t). \quad (4.10b)$$

Dle očekávání jsme získali astatický systém druhého řádu. Vzhledem k původním rovnicím (4.6) lze očekávat nelineární chování kuličky na krajích nakláněné tyče, kde výrazněji působí zanedbaná odstředivá síla. Další významnou nelinearitou je samozřejmě konečná délka tyče a v praxi se projeví i nerovnosti vodičích kolejniček.

## 4.2 Identifikace

Identifikaci rozdělíme rovněž na dvě části. Nejprve určíme parametry převodu vstup - náklon. Na obr. 4.3 je znázorněna odzveva náklonu na generovaný referenční signál. Z průběhů je patrná hystereze o cca jednotkovém rozsahu. Na základě nelineárního modelu v Simulinku jsme navrhli vhodný PI regulátor a celý systém znovu identifikovali nad uzavřenou zpětnou vazbou. Analýzou naměřených průběhů jsme se rozhodli modelovat soustavu pouze jako systém prvního řádu, abychom získali jednodušší model pro následnou syntézu MPC. Identifikaci parametrů jsme provedli s pomocí *System Identification Toolboxu* pro Matlab. Srovnání simulovaných a měřených průběhů je na obr. 4.4. Popis dobře vystihuje dynamiku především pro malé hodnoty požadovaného náklonu. U větších se více projeví nelineární efekt hystereze.

Přenos PI regulátoru

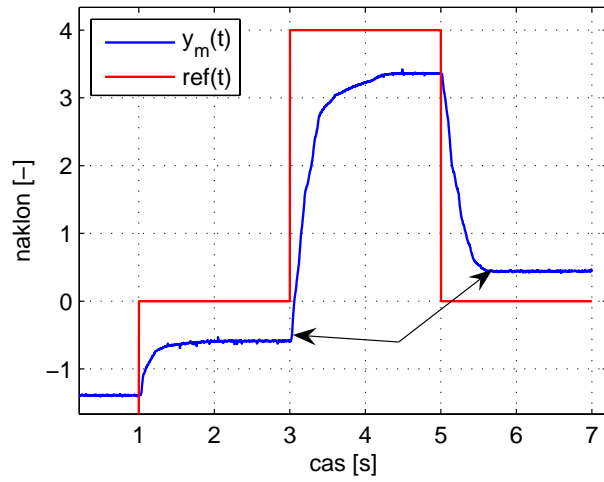
$$G_{PI}(s) = \frac{1,5s + 7,5}{s}.$$

Výsledný přenos nakláněcího mechanismu

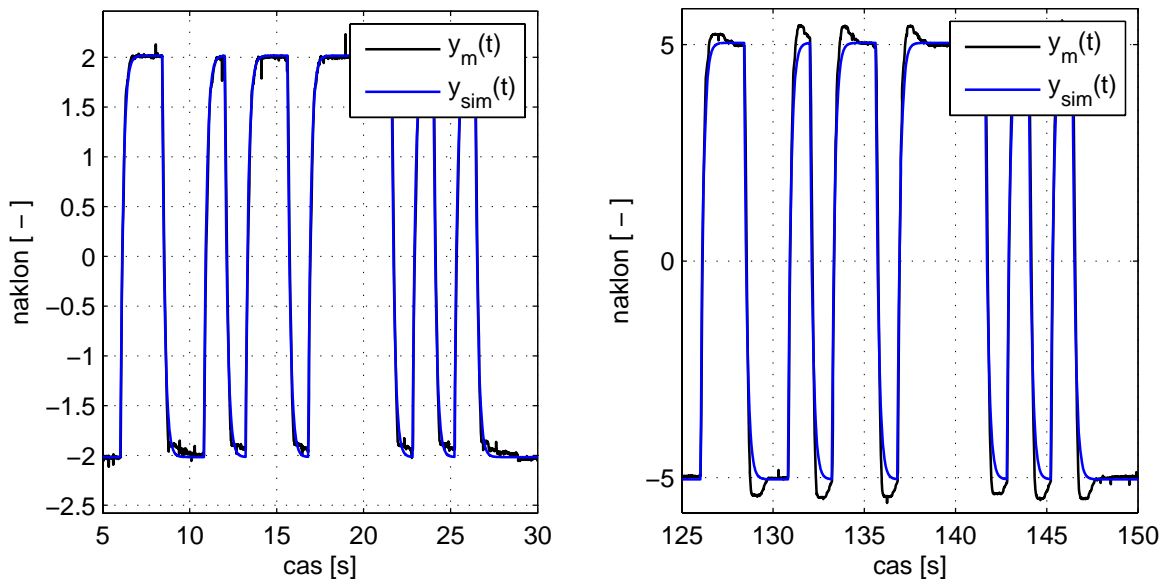
$$G_n(s) = \frac{1}{0,16s + 1}. \quad (4.11)$$

V případě podsystemu kulička na nakloněné rovině jsme postupovali následovně. Z rovnic (4.10) sestavíme přenos ve tvaru

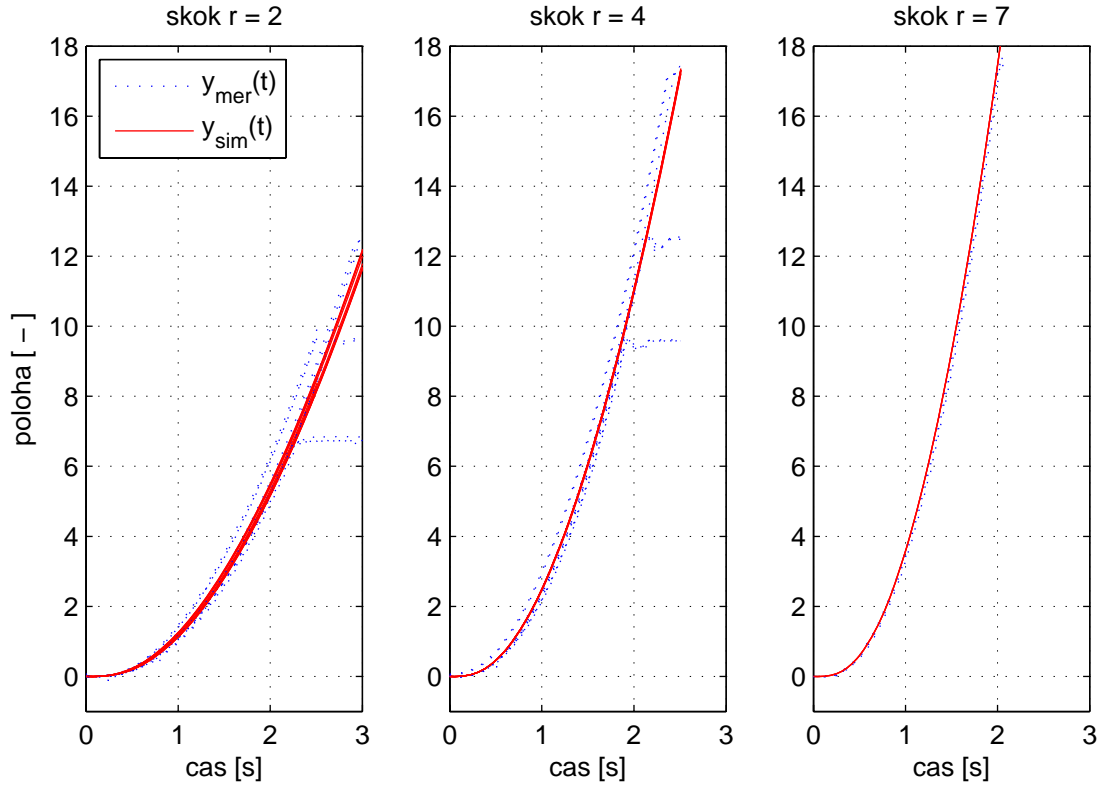
$$G_k(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}.$$



Obrázek 4.3: Vliv hystereze na hodnotu náklonu.



Obrázek 4.4: Srovnání měřeného a simulovaného náklonu.



Obrázek 4.5: Přechodové charakteristiky.

Z naměřených přechodových charakteristik (obr. 4.5) určíme, při zanedbání rychlejší dynamiky náklonu, přibližnou hodnotu zesílení  $k$  a časové konstanty  $\tau$ . Jejich hodnoty ručně upravíme na základě provedených simulací, kde za vstup do systému  $G_k(s)$  bereme naměřené hodnoty náklonu  $n(t)$  a výsledek srovnáváme s naměřenou polohou  $y_{mer}(t)$ . Odhadnuté konstanty přenosu

$$k = 7,7; \quad \tau = 4,5.$$

Takto identifikovaný systém je vzhledem k viditelnému rozptylu naměřených průběhů dostačující. Ze získaných přenosů snadno sestavíme spojitý stavový popis s maticemi

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 1,7 & 0 & -0,22 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,25 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde význam jednotlivých stavů odpovídá

- $x_1$  ... rychlosti kuličky
- $x_2$  ... poloze kuličky
- $x_3$  ... náklonu tyče

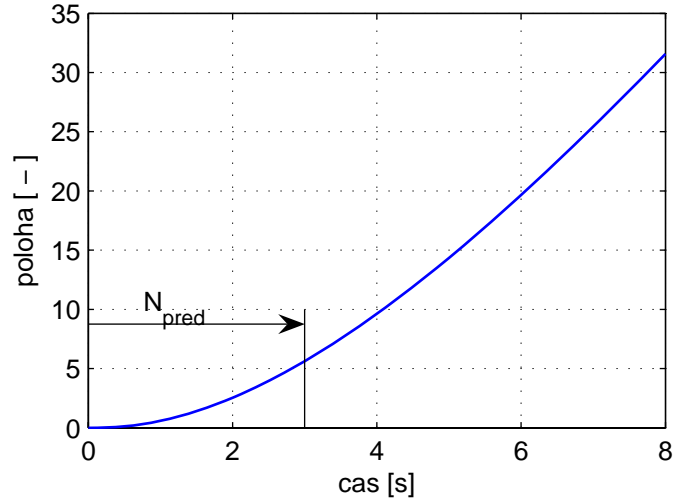
### 4.3 Explicitní prediktivní regulátor

Nyní máme vše připraveno, abychom mohli sestrojít vlastní regulátor. Základní požadavky na řízenou soustavu jsou

1. Asymptotické sledování konstantní reference.
2. Omezení na vstup  $-7 \leq u(t) \leq 7$ .
3. Omezení na polohu kuličky  $-9 \leq y(t) \leq 9$ .

Pro návrh jsme nejprve zvolili metodiku popsanou v [24] a demonstrovanou v části 2.5.2, která zajišťuje robustní asymptotické sledování reference a současně minimálně rozšiřuje stavový prostor. Zatím nezmiňovanou nevýhodou tohoto přístupu je, že odhad chyby  $\hat{d}(t)$ , který zajišťuje „robustnost“ regulátoru, přímo ovlivňuje hodnotu akčního zásahu. Takto se propaguje šum odhadu do řídicího signálu  $u(t)$ . Proto jsme provedli nový návrh, tentokrát s vážením odchylky  $\Delta u(t)$ . Sestrojený regulátor již není formulován s ohledem na robustní sledování (viz následující poznámka), ale v praxi je vlivem astatismu soustavy a integračního charakteru formulace  $\Delta u$  asymptotické sledování splněno.

**Poznámka:** Při konstrukci regulátoru jsme předpokládali formulaci pro robustní sledování reference 2.5.2, pouze rozšířenou o vážení změny akčního zásahu (namísto odchylky od odhadovaného ustáleného stavu). Toto rozšíření skutečně zkvalitnilo chování regulátoru, do vstupního signálu již tolik nepronikala porucha a výsledné chování na simulacích i na reálném modelu vycházela dobře. Naneštěstí se později naše konstrukce ukázala nesprávnou a „robustnost“ sledování, jak je formulována v článku [24], zajištěna není. Pro formulaci s  $\Delta u$  je třeba navrhnout nový algoritmus výpočtu stavové injekce, který bude uvažovat nejen modifikovaný zákon řízení v okolí ustáleného stavu, ale především rozšíření stavového prostoru o historii řízeného vstupu. Tento postup jsme již neimplementovali



Obrázek 4.6: Odezva na jednotkový skok.

a je tedy námětem pro další práci. Důsledkem výše zmíněného je, že v následující části pracujeme s odhadem jediné poruchy pro dva měřené výstupy.  $\square$

### 4.3.1 Formulace

Na obr. 4.6 je zobrazena odezva polohy kuličky lineárního modelu na jednotkový skok na vstupu. Z průběhu vidíme, že vliv stabilních pólů odezní přibližně po třech vteřinách. Abychom zajistili dobré chování regulátoru a rychlou odezvu, zvolili jsme vzorkovací periodu  $T_{vz} = 0,1s$  a horizont predikce  $N = 30$ . Dále jsme zavedli blokování vstupů ve tvaru

$$u_k = u_{k-1} \text{ pro } k \geq N_c = 3,$$

čímž jsme zredukovali složitost úlohy mp-QP. Blokováním vstupů rovněž omezíme šířku pásma řídicího signálu, což má dobrý vliv na robustnost regulátoru. Zvolené kritérium

má tvar

$$J(\mathbf{x}(t)) = \sum_{k=t}^{t+N-1} \Delta u_k^T \mathbf{R} \Delta u_k + (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_u)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_u), \quad (4.13a)$$

$$\text{kde } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k + \mathbf{B}_d d_k, \quad (4.13b)$$

$$r_k = r_{k-1}, \quad d_{k+1} = d_k, \quad (4.13c)$$

$$-7 \leq u_t \leq 7, \quad -9 \leq y_{k+1} \leq 9, \quad k = t, \dots, t + N - 1 \quad (4.13d)$$

$$u_k = \Delta u_k + u_{k-1}, \quad k = 0, \dots, N_c - 1, \quad \Delta u_k = 0, \quad k \geq N_c, \quad (4.13e)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_u = \mathbf{X}_r r(t) + \mathbf{X}_d \hat{d}(t), \quad \mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}(t), \quad d_t = \hat{d}(t). \quad (4.13f)$$

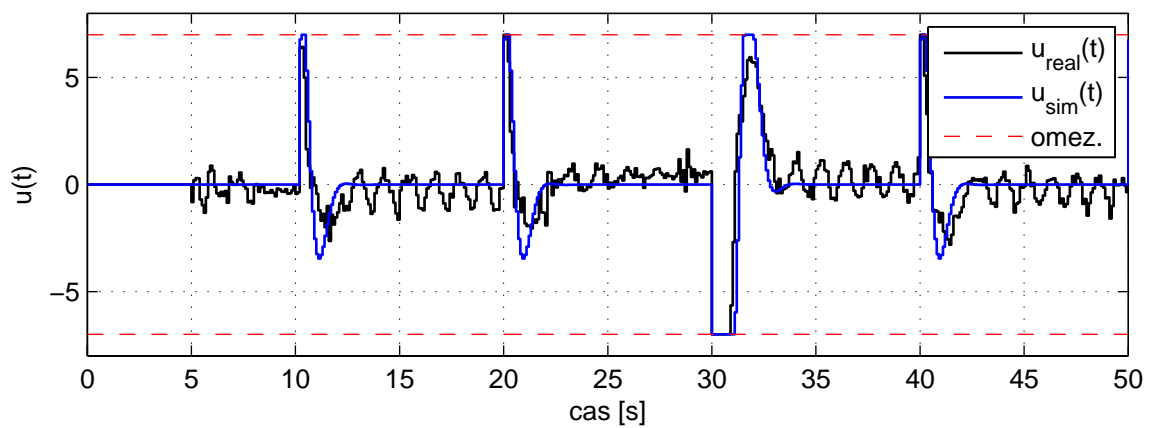
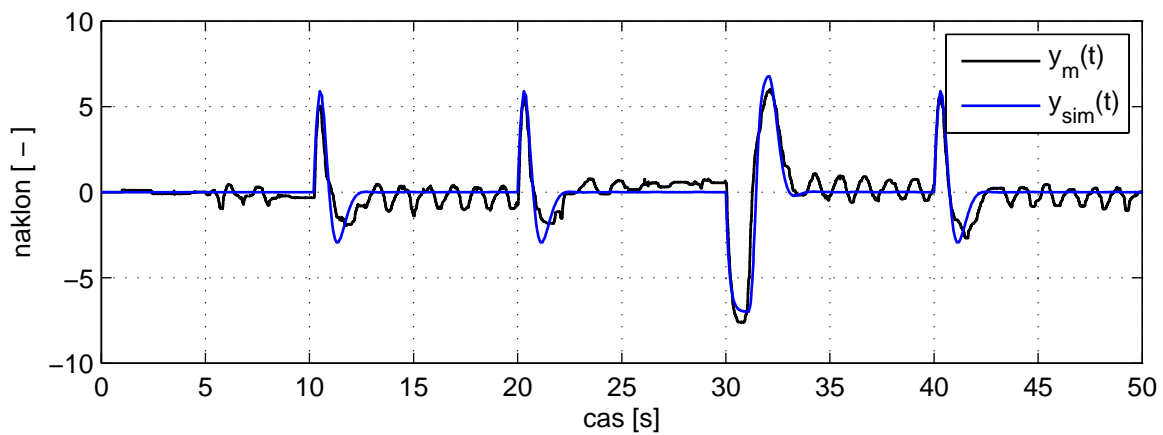
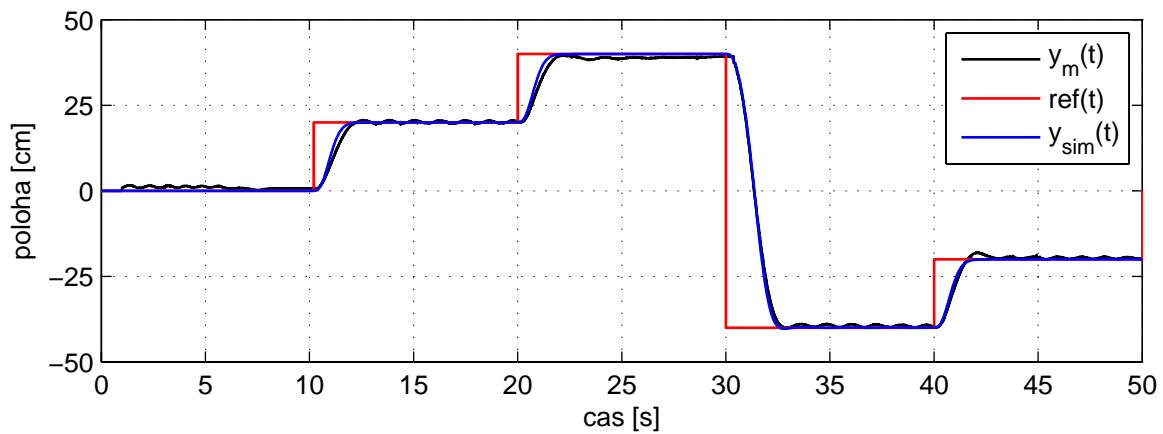
Matice  $\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_d, \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_d$  získáme analýzou ustáleného stavu podle (2.43). Matice  $\mathbf{B}_d, \mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  tvoří ladící parametry a určíme je na základě simulací a měření na modelu. Při návrhu zesílení pozorovatele stavu jsme použili zmíněný algoritmus 2, článku [24]. V našem případě sice nezajistí správný odhad pro robustní sledování (viz předchozí poznámka), ale konvergenci odhadu ano. Vyčíslení všech parametrů provede skript *bb\_DeltaU*, který je obsažen na příloženém CD. Zde si uvedeme pouze některé z nich.

$$\mathbf{B}_d = [1 \ 0, 2 \ 0, 1]^T, \quad q_y = 10, \quad R = 3,$$

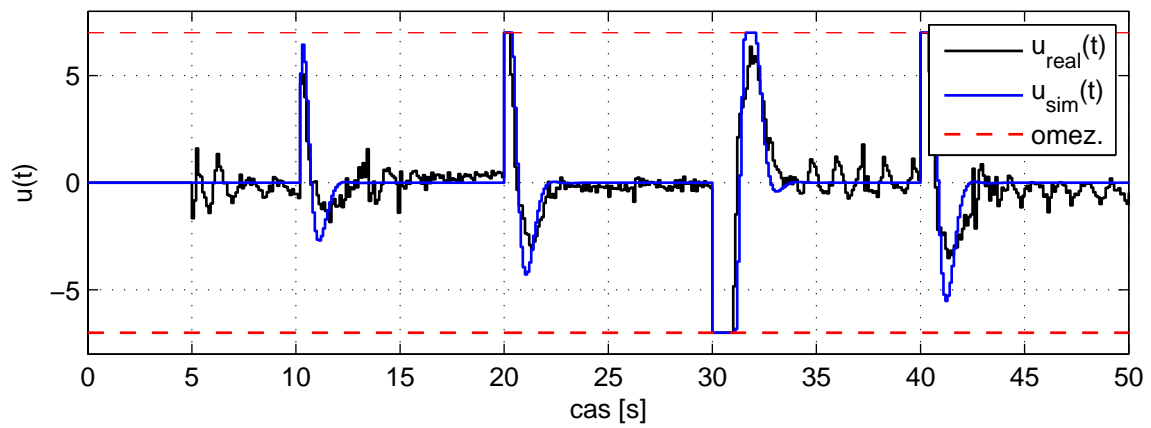
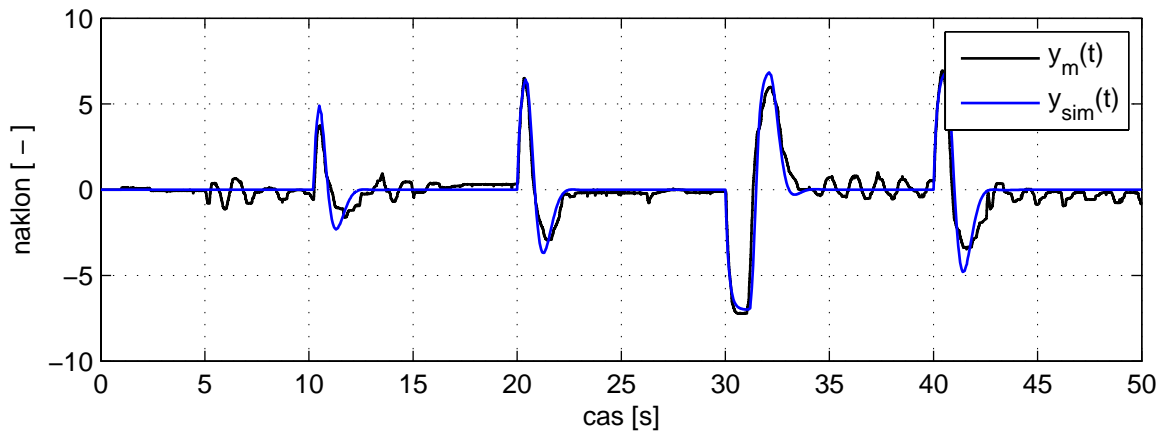
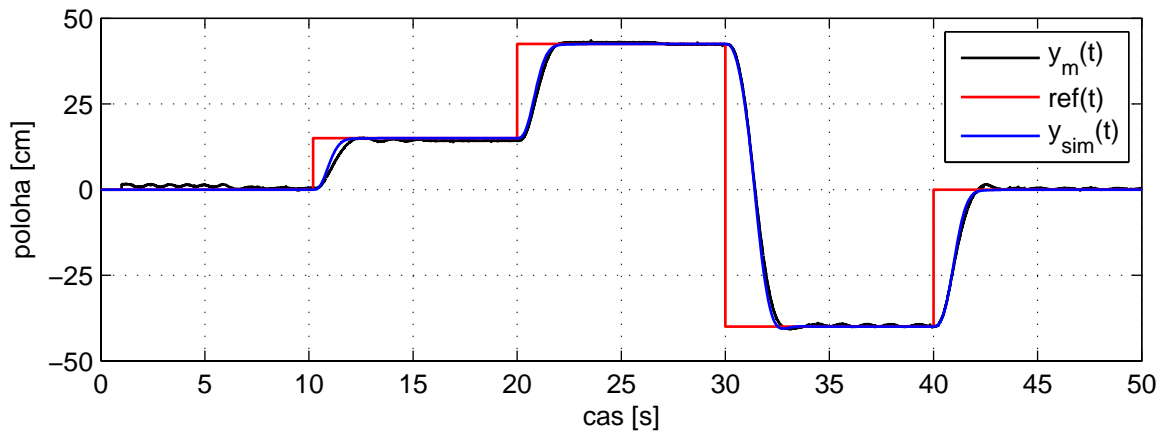
kde  $q_y$  váží odchylku výstupu od požadované reference. Kritérium jsme (podobně jako v příkladě 2.3) přeformulovali pro  $\Delta u(t)$  a s využitím MPT Toolboxu vypočetli příslušný multiparametrický kvadratický program. Získané rozdělení obsahuje 98 kritických regionů, což je z hlediska on-line složitosti dobrý výsledek.

### 4.3.2 Zhodnocení

Obrázek 4.7 zobrazuje jeden z naměřených průběhů na reálném modelu včetně simulovaného výstupu spojitého lineárního modelu (4.12). Oba průběhy jsou si velmi podobné. Z výstupu polohy kuličky je patrný minimální překmit a prakticky asymptotické sledování zadané reference. Z průběhu řídicího signálu zase vidíme splnění omezujících podmínek. Prakticky stejný průběh vidíme pro druhou realizaci měření na obrázku 4.8. Je zřejmé, že podobné (i lepší) výsledky bychom snadno získali nějakou z tradičních metod návrhu regulátoru. Cílem této úlohy bylo pouze demonstrovat funkci explicitního prediktivního regulátoru v praxi na jednom z laboratorních modelů.



Obrázek 4.7: Průběh řízení na reálném modelu.



Obrázek 4.8: Průběh řízení na reálném modelu. Druhá realizace.



# Kapitola 5

## Závěr

Explicitní formulace MPC částečně rozšiřuje oblast použití prediktivních regulátorů i pro relativně rychlé systémy, kde by výpočetně náročná optimalizace klasického prediktivního regulátoru byla limitující. V této diplomové práci jsme se pokusili o detailnější rozbor této problematiky. Získané poznatky jsme vždy prezentovali na názorných příkladech a snažili se podat ucelený pohled na návrh explicitního prediktivního regulátoru. Všechny příklady jsme sestrojili samostatně s využitím programového balíku Matlab a Simulink a volně dostupným doplňkem Multi-Parametric Toolbox „em“. Uvedené postupy jsme na závěr aplikovali na návrhu řízení pro laboratorní model „kulička na tyči“. Naměřené výstupy z reálného modelu lze považovat za vyhovující.

Co bychom mohli dále rozvést, je zmíněná formulace pro robustní sledování konstantní reference při vážení odchylky akčního zásahu a počtu měřených výstupů převyšující počet modelovaných poruch (viz 2.5.2). Dále lze relativně snadno rozšířit navržený regulátor pro model CE151 „kulička na ploše“. Jedná se vlastně o dvoudimenzionální případ našeho modelu CE106, kde díky linearizaci zanedbáme členy způsobující vzájemnou vazbu mezi souřadnicemi a systém lze relativně přesně popsat pro každou osu zvlášť. Tento model nebyl v době psaní této diplomové práce zcela funkční, proto jsme zvolili řádově jednodušší, nicméně v principu podobný model „kulička na tyči“.



# Literatura

- [1] Beccuti, A.; Papafotiou, G.; Frasca, R.; aj.: Explicit Hybrid Model Predictive Control of the dc-dc Boost Converter. In *IEEE PESC*, Orlando, Florida, USA, červen 2007.
- [2] Bellman, R.: On the Theory of Dynamic Programming.
- [3] Bemporad, A.; Borrelli, F.; Morari, M.: Model Predictive Control Based on Linear Programming - The Explicit Solution. Technická zpráva, ETH Zurich, leden 2001.
- [4] Bemporad, A.; Filippi, C.: Suboptimal Explicit RHC via Approximate Multiparametric Quadratic Programming. Technická zpráva, ETH Zurich, květen 2002.
- [5] Bemporad, A.; Morari, M.; Dua, V.; aj.: The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems. Technická zpráva, ETH Zurich, září 1999.
- [6] Bemporad, A.; Morari, M.; Dua, V.; aj.: The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, ročník 38, č. 1, 2002: s. 3–20.
- [7] Borrelli, F.: *Constrained Optimal Control of Linear & Hybrid Systems*, ročník 290. Springer Verlag, 2003.
- [8] Borrelli, F.; Baotic, M.; Bemporad, A.; aj.: Efficient On-Line Computation of Constrained Optimal Control. In *IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, prosinec 2001, s. 1187–1192.
- [9] Borrelli, F.; Morari, M.: Offset-Free Model Predictive Control. In *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, prosinec 2007.
- [10] Boyd, S.; Vandenberghe, L.: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

- [11] Cagienard, R.; Grieder, P.; Kerrigan, E.; aj.: Move Blocking Strategies in Receding Horizon Control. *Journal of Process Control*, ročník 17, č. 6, červenec 2007: s. 563–570.
- [12] Franklin, G.: *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA, USA, 1993.
- [13] Gilbert, E.; Tan, K.: September 1991. Linear systems with state and control constraints: The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, ročník 36, č. 9: s. 1008–1020.
- [14] Grieder, P.; Borrelli, F.; Torrisi, F.; aj.: Computation of the constrained infinite time linear quadratic regulator. *Automatica*, ročník 40, č. 4, duben 2004: s. 701–708.
- [15] Grieder, P.; Lühti, M.; Parrilo, P.; aj.: Stability & Feasibility of Constrained Receding Horizon Control. In *Proceedings of European Control Conference*, Cambridge, UK, září 2003.
- [16] Grieder, P.; Lühti, M.; Parrilo, P.; aj.: Stability Feasibility of Constrained Receding Horizon Control. In *European Control Conference*, Cambridge, UK, září 2003.
- [17] Grieder, P.; Morari, M.: Complexity Reduction of Receding Horizon Control. In *IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, prosinec 2003, s. 3179–3184.
- [18] Havlena, V.; Štecha, J.: *Moderní teorie řízení*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2000, ISBN 80-01-02095-9.
- [19] Humusoft: Education Manual, model Ball and Plate. Technická zpráva, Humusoft s.r.o., 2003.
- [20] Kalman, R.: A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, ročník 82, č. 1, 1960: s. 35–45.
- [21] Karush, W.: *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. Dizertační práce, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, 1939.
- [22] Kerrigan, E.; Maciejowski, J.: Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control. *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, ročník 5, 2000.

- [23] Kvasnica, M.; Grieder, P.; Baotic, M.; aj.: Multi-Parametric Toolbox (MPT). In *HSCC (Hybrid Systems: Computation and Control)*, březen 2004, s. 448–462.
- [24] Mäder, U.; Morari, M.: Offset-Free Reference Tracking for Predictive Controllers. In *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, prosinec 2007.
- [25] Mulder, E.; Kothare, M.; Morari, M.: Multivariable anti-windup controller synthesis using linear matrix inequalities. *Automatica*, ročník 37, č. 9, 2001: s. 1407–1416.
- [26] Pannocchia, G.; Rawlings, J.: Disturbance models for offset-free model-predictive control. *AIChE Journal*, ročník 49, č. 2, 2003: s. 426–437.
- [27] Pekař, J.; Havlena, V.: Design and Analysis of Model Predictive Control Using MPT Toolbox. *Konference MATLAB, Praha*, 2004.
- [28] Rawlings, J.; Muske, K.: The stability of constrained receding horizon control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 38, č. 10, 1993: s. 1512–1516.
- [29] Roubal, J.; Hušek, P.: *Základy regulační techniky v příkladech*. <http://dce.felk.cvut.cz/roubal>, 30.12.2007.
- [30] Sharma, A.; Limebeer, D.; Jaimoukha, I.; aj.: Modeling and control of TCV. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, ročník 13, č. 3, 2005: s. 356–369.
- [31] Katedra řídicí techniky, Č. F.: *Internetová učebnice SARI*. <http://dce.felk.cvut.cz/sari/SARI-K3kulicka.html>, 30.12.2007.
- [32] Tøndel, P.; Johansen, T.; Bemporad, A.: Evaluation of piecewise affine control via binary search tree. *Automatica*, ročník 39, č. 5, 2003: s. 945–950.
- [33] Wikipedia.org: Lagrangian mechanics, 30.12.2007.



# Příloha A

## Obsah příloženého CD

K této práci je přiloženo CD, na kterém jsou uloženy zdrojové kódy většiny použitých příkladů.

- Adresář doc: Elektronická verze této diplomové práce.
- Adresář matlab: Sestrojené skripty a modely pro Matlab a Simulink.