Diplomová práce

Robustní stabilita systémů s parametrickou neurčitostí

Petr Janda 2005

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá analýzou systému s parametrickou neurčitostí popsanou trojúhelníkovou fuzzy funkcí.

Teoretická část obsahuje dělení neurčitostí, teorii polytopické neurčitosti. Součástí je Edge teorém a generalizovaný Charitonovův teorém. Je zde také obsažen jednoduchý nástin teorie fuzzy čísel.

Praktickou částí této práce je implementování algoritmů v Matlabu, grafické prostředí pro jednodušší práci s algoritmy, editace a grafická kontrola výpočtu. V této části je dále obsaženo testování a porovnání algoritmů založených na Edge teorému a generalizovaném Charitonovově teorému.

Abstract

This diploma thesis describes analysis of system with parametric uncertainty described by triangular fuzzy function.

Theoretical part contains description of uncertainty types, theory of polytopic uncertainty. Part of it is Edge theorem and generalized Kharitonov theorem. Simple outline of theory fuzzy numbers is also given.

Practical part of this work also includes implementation of algorithms in Matlab, graphical environment for simple work with algorithms, editation and graphical calculation verification. In these parts it is further included testing and comparison of algorithms based on Edge theorem and based on generalized Kharitonov theorem.

Obsah

1. Úvod …… 3

2. Parametrické neurčitosti…… 4
2.1. Dělení parametrických neurčitostí…… 5
2.2. Obecné metody analýzy…… 5
2.2.1. Vyloučení nuly……... 5
2.2.2. Hurwitzova stabilita……... 6

3. Neurčitost s jedním parametrem……. 6

4. Intervalová neurčitost……... 7
4.1. Množina hodnot……... 7
4.2. Charitonovova věta…….. 8
4.3. Proložení …… 8
4.4. Překrytí ……..…… 10
4.5. Intervalová soustava…… 10

5. Polytopická neurčitost…… 11
5.1. Polytop polynomů……. 13
5.2. Intervalový polynom jako polytop…… 13
5.3. Jednotkový simplex……... 14
5.4. Množina hodnot polytopu……. 14

6. Hrany…… 15
6.1. Věta o hranách (Edge teorém)…… 15
6.1.1. Spektrální množina…….. 16
6.1.2. Věta o hranách s využitím kořenů……... 16
6.2. Věta o 32 hranách (Generalizovaný Charitonovův teorém)……... 17

7. Použití fuzzy funkcí…… 20

8. Algoritmy pro analýzu…….. 21
8.1. Zadání…… 21
8.2. Popis algoritmu Edge test……. 21
8.3. Použití algoritmu Edge test na příkladu…… 22
8.4. Popis algoritmu 32 hran…….. 27
8.5. Použití algoritmu 32 hran na příkladu……..……. 28

9. Popis grafického prostředí…… 33
9.1. Zadávání vstupních hodnot……... 33
9.2. Formát vstupních dat…….…… 34
9.3. Volba metody výpočtu……..…… 35
9.4. Další ovládací prvky…….…… 36
9.5. Editace koeficientů…….…….. 37
9.6. Grafická kontrola výpočtu…….……... 39

10. Testování algoritmů……. 41

11. Závěr……. 42

12. Literatura……. 43

1 Úvod

Robustní analýza a syntéza patří v posledních letech k nejvíce se rozvíjejícím metodám v syntéze a analýze regulačního obvodu a to jak v oblasti vědecké tak i aplikační. Stále více se používá nových metod robustní analýzy a to pomocí normy $\boldsymbol{H_\infty}$, teorie ***intervalových polynomů*** nebo ***Charitonovův teorém***, který se stal zdrojem pro obecnější metody jako např. ***Edge teorém***, ***mapping teorém***, atd.

Velké množství systémů, prezentovaných v reálných podmínkách, obsahuje dva základní typy neurčitostí. Jde o neurčitost neparametrickou a neurčitost parametrickou. Neparametrická neurčitost vzniká zanedbáním dynamických vlastností řízené soustavy nebo nelinearit při popisu matematickým modelem. Parametrickou neurčitost lze prezentovat jako nepřesně popsanou znalost skutečných parametrů systému. Metody robustní analýzy (syntézy) pro parametrickou neurčitost můžeme použít pouze v tom případě, jestliže systém, s kterým pracujeme, je časově neproměnný (nebo alespoň není „rychle“ proměnný v čase). Jestliže je tato základní podmínka splněna, můžeme použít metody robustního řízení. Parametrickou neurčitost lze také chápat jako množinu soustav, kterou máme analyzovat s nějakým zadaným regulátorem či pro ni takový regulátor navrhnout. V této úloze se zabývám analýzou systémů s parametrickou neurčitostí, kde můžeme použít metody intervalových polynomů a Charitonovova teorému. Systémy obsahující tento typ neurčitosti lze velice snadno popsat s pomocí intervalových polynomů.

Jednou z možností jak zobecnit intervalový polynom je použití trojúhelníkové fuzzy funkce tj. popisu každé neurčitosti tohoto polynomu pomocí funkce závislé na parametru α, kde $\alpha \in (0,1)$. Platí, že pro hranice neurčitosti je $\alpha = 0$ a pro nominální hodnotu parametru systému je $\alpha = 1$. Tato metoda vychází z nominálních hodnot parametrů soustavy a ze známého rozsahu neurčitých parametrů soustavy, které jsou svázány přes parametr α. Základním předpokladem pro použití této metody je stabilita nominální soustavy.

2 Parametrické neurčitosti

Důležitou třídou neurčitých systémů jsou systémy s parametrickou neurčitostí tj. model systému je „přesný“ až na hodnoty (jednoho či více) parametrů, které v okamžiku návrhu neznáme. Jak mohou vzniknout neurčité parametry? Může to být například nepřesným měřením těchto parametrů, nebo závislost parametrů na vnějších veličinách (teplota, tření, hmotnost). S takto danými neurčitými parametry můžeme řešit následující úlohy:

1. **analýza:** test robustní stability, hledání mezí robustní stability
2. **syntéza:** zajistit co největší robustnost systému

Abychom mohli pracovat se systémy s neurčitostí je třeba definovat některé základní pojmy.

Neurčité parametry:

Vektor nebo k-tice $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in Q \subset R^k$, kde Q je množina omezující parametry

Neurčitý polynom (*parametrický polynom*):

Polynom s jedním nebo více neurčitými parametry:

$$p(s,\mathbf{q}), \mathbf{q} \in R^k, \; p(s,\mathbf{q}) = \sum_i a_i(\mathbf{q}) s^i$$

Rodina polynomů

Neurčitý polynom + množina omezující parametry $P = \{p(s,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$

Robustní stabilita

Rodina polynomů je robustně stabilní $\Leftrightarrow$ $p(s,\mathbf{q})$ je stabilní **pro každé** $\mathbf{q} \in Q$

Neurčitý systém:

Je popsán přenosem $P(s,\mathbf{q}) = \dfrac{n(s,\mathbf{q})}{d(s,\mathbf{q})}$, kde $n(s,\mathbf{q})$ a $d(s,\mathbf{q})$ jsou neurčité polynomy

2.1 Dělení parametrických neurčitostí

Parametrické neurčitosti lze dále dělit podle typu struktury neurčitosti obsažené v polynomu.

1. neurčitost s jedním parametrem
2. intervalová neurčitost
3. afinní lineární neurčitost
4. multilineární neurčitost
5. polynomiální neurčitost
6. obecná neurčitost

ad 1) Speciální případ neurčitosti, který se prakticky nevyskytuje. Neurčitost je prezentována pouze jedním neurčitým parametrem.

ad 2) V případě této neurčitosti je každý parametr obsažen pouze v jednom koeficientu polynomu, každý koeficient je spojitou funkcí parametru. Množina omezující parametry má tvar kvádru s pevnými mezemi.

ad 3) U afinní lineární struktury neurčitosti je každý koeficient polynomu $\mathbf{a}_i(\mathbf{q})$ popsán afinní lineární funkcí v závislosti na parametru $\mathbf{q}$ tj. $\mathbf{a}_i(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta}_i$. Tato struktura neurčitosti se též nazývá polytopickou neurčitostí.

ad 4) Neurčitý polynom má multilineární strukturu, když každý koeficient obsahující neurčitost je multilineární funkcí parametrů neurčitosti.
Př. : $p(s,\mathbf{q}) = s^3 + (7q_1q_2 - q_3 + 4)s^2 + (q_1q_3 - 5)s + (4q_2 + q_3 + 5)$

ad 5) Neurčitý polynom má polynomiální strukturu, když každý koeficient obsahující neurčitost je polynomiální funkcí parametrů neurčitosti.
Př. : $p(s,\mathbf{q}) = s^3 + (7q_1^2q_2 - q_3^3 + 4)s^2 + (q_1q_3 - 5)s + (4q_1^2 + q_3 + 5)$

2.2 Obecné metody analýzy stability

2.2.1 Teorém o vyloučení nuly

Obecná rodina polynomů $P\{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$, s invariantním stupněm, Q je souvislá množina, koeficienty $\mathbf{a}_i(\mathbf{q})$ jsou spojité funkce a alespoň jeden člen rodiny $p(s,\mathbf{q}^0)$ je stabilní, je robustně D-stabilní právě když $0 \notin p(z,Q)\ \forall z \in \partial D$, kde $p(z,Q)$ se nazývá množinou hodnot a ∂D je hranice oblasti stability D (v případě Hurwitzovy stability je to imaginární osa). Pokud je oblast stability uzavřená, nemusí být stupeň invariantní.

2.2.2 Hurwitzovo kritérium

Charakteristický polynom $c(s)=\sum_{i=0}^{n} c_i s^i$ pro $c_i > 0; i = 0,1,\ldots,n$ má všechny kořeny v levé polorovině komplexní roviny pouze tehdy, jsou-li všechny hlavní minory Hurwitzovy matice kladné.

Hurwitzova matice $\mathbf{H}(c)$ je původně nulová matice $n \times n$, v prvním řádku má zapsány odleva ob jeden koeficienty polynomu $c(s)$, počínaje koeficientem c_{n-1} u druhé nejvyšší mocniny, v druhém totéž, počínaje c_n. První dva řádky tedy obsahují tytéž koeficienty jako první dva řádky Routhovy tabulky, pouze jejich pořadí je zaměněno. Do dalších řádků se sepisují koeficienty ob jeden řádek seshora, posunuté o jednu pozici doprava.

$$H(c)=\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \ldots & c_0 & 0 & 0\ldots 0 & 0 \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \ldots & c_1 & 0 & 0\ldots 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \ldots c_0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_n & c_{n-2} & c_{n-4} \ldots c_1 \end{bmatrix}$$

Příklad:
Hurwitzova matice pro polynom: $c(s)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+5s+6$ je:

$$\mathbf{H}(c)=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3 Neurčitost s jedním parametrem

Tento speciální případ systémů s neurčitostí se objevuje v případě, že v celém systému se vyskytuje pouze jeden neurčitý parametr, nebo je-li těchto parametrů více, je možné jejich vyjádření pomocí jednoho parametru. Standardně používaný popis systému je:

$p(s,q)=p_0(s)+qp_1(s)$ $p_0(s)$ je nominální polynom (stabilní)
$p_1(s)$ je libovolný polynom
$q \in [q_{\min}, q_{\max}] \supset \{0\}$ je parametr

Pro zjištění maximálního intervalu stability se používá Bialasova věta, podle které je tento interval dán vztahy:

$$q^{+}{}_{\max} = \frac{1}{\lambda^{+}{}_{\max}\left(-\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{p}_0)\mathbf{H}(\mathbf{p}_1)\right)}$$

$$q^{-}{}_{\min} = \frac{1}{\lambda^{-}{}_{\min}\left(-\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{p}_0)\mathbf{H}(\mathbf{p}_1)\right)}$$

kde $\lambda^{+}_{\max}$ je maximální **reálné** kladné vlastní číslo
$\lambda^{-}_{\min}$ je minimální **reálné** záporné vlastní číslo
$\mathbf{H}(\mathbf{p}_0)$ je Hurwitzova matice nominálního polynomu
$\mathbf{H}(\mathbf{p}_1)$ je Hurwitzova matice polynomu obsahujícího neurčitost
Pokud (kladné,záporné) reálné vlastní číslo neexistuje je příslušná mez (+,-) ∞.

4 Intervalová neurčitost

Rodina polynomů je intervalovým polynomem jestliže:

1. každý parametr q_i je obsažen pouze v jednom koeficientu char. polynomu systému.
2. každý koeficient je spojitou funkcí q_i
3. Q je kvádr tj. existuje norma L_∞ : $\|\mathbf{q}\|_\infty = \max_i |q_i|$ tj. každá složka je interval s pevnými mezemi.

Intervalový polynom lze jednoduše zapsat:

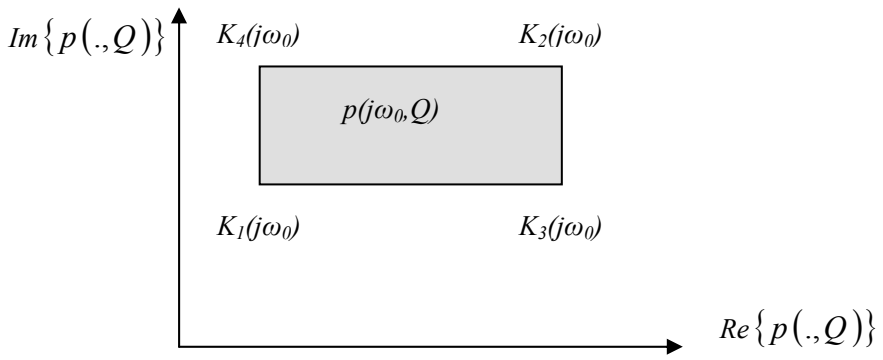
$$p(s,\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n}\left[q_i^-, q_i^+\right]s^i$$

4.1 Množina hodnot

Množina hodnot intervalového polynomu je množina všech komplexních hodnot, které nabývá intervalový polynom, jestliže za s do intervalového polynomu dosadíme $j\omega_0$ s $\omega_0 \in R$ a všechny koeficienty necháme probíhat jejich intervaly. V komplexní rovině má množina hodnot tvar obdélníku (ve zvláštních případech je to úsečka (obdélník s jednou nulovou stranou)) a má strany rovnoběžné s osami komplexní roviny (viz. Obr. 1). Takovému obdélníku se říká Charitonovův obdélník pro frekvenci ω_0. Matematický zápis množiny hodnot je následující:

$$p(j\omega_0, Q) = \{p(j\omega_0, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$$

Při změně ω_0 se obdélník pohybuje a mění rozměr, ale nenatáčí se.



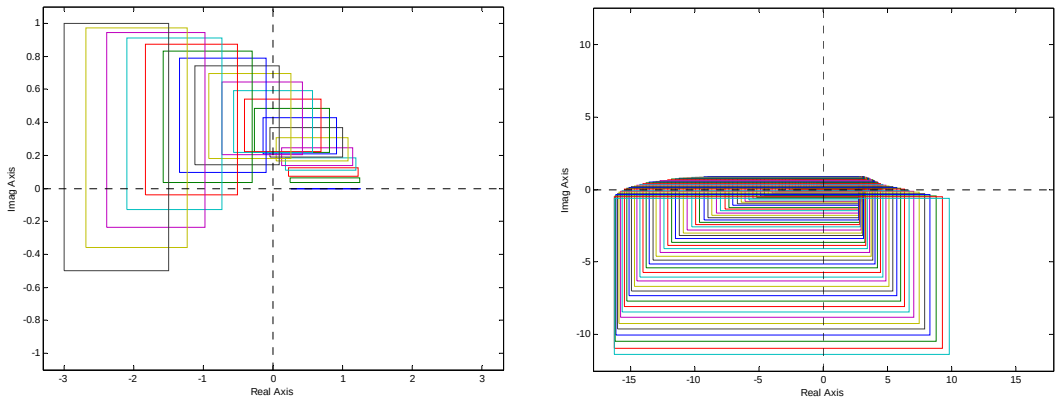
Obr. 1 Množina hodnot intervalového polynomu v komplexní rovině

4.2 Charitonovova věta

Intervalový polynom $P = \{ p(s, \mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q \}$, který má invariantní stupeň je robustně stabilní právě když jsou stabilní 4 polynomy:

$$
\begin{aligned}
K_1(s) &= q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \ldots \\
K_2(s) &= q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \ldots \\
K_3(s) &= q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \ldots \\
K_4(s) &= q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4^- s^4 + q_5^+ s^5 + q_6^+ s^6 + \ldots
\end{aligned}
$$

kde $K_1(s), K_2(s), K_3(s), K_4(s)$ se nazývají Charitonovovy polynomy a interpretují vrcholy Charitonových obdélníků. Podle teorému o vyloučení nuly nám stačí testovat stabilitu Charitonových polynomů pro zjištění robustní stability intervalového polynomu.



Obr. 2 Interpretace Charitonovovy věty

4.3 Proložení

Polynom p má vlastnost proložení právě když jeho sudá a lichá část mají stejné signum vedoucích koeficientů a různé kořeny které se na imaginární ose střídají. Totéž platí pro sudou a lichou část komplexního polynomu, pouze s tím rozdílem že kořeny nejsou na imaginární ale na reálné ose. Důležitou větou je **Hermite-Biehlerova věta,** která říká: *Polynom je Hurwitzův (stabilní), právě když má vlastnost proložení.*

Pro intervalový polynom $p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n} \left[q_i^-, q_i^+ \right] s^i$ definujeme:

$$
\begin{aligned}
K_{\max}^{even}(s) &= q_0^+ + q_2^- s^2 + q_4^+ s^4 + q_6^- s^6 + q_8^+ s^8 + \ldots \\
K_{\min}^{even}(s) &= q_0^- + q_2^+ s^2 + q_4^- s^4 + q_6^+ s^6 + q_8^- s^8 + \ldots \\
K_{\max}^{odd}(s) &= q_1^+ s + q_3^- s^3 + q_5^+ s^5 + q_7^- s^7 + q_9^+ s^9 + \ldots \\
K_{\min}^{odd}(s) &= q_1^- s + q_3^+ s^3 + q_5^- s^5 + q_7^+ s^7 + q_9^- s^9 + \ldots
\end{aligned}
$$

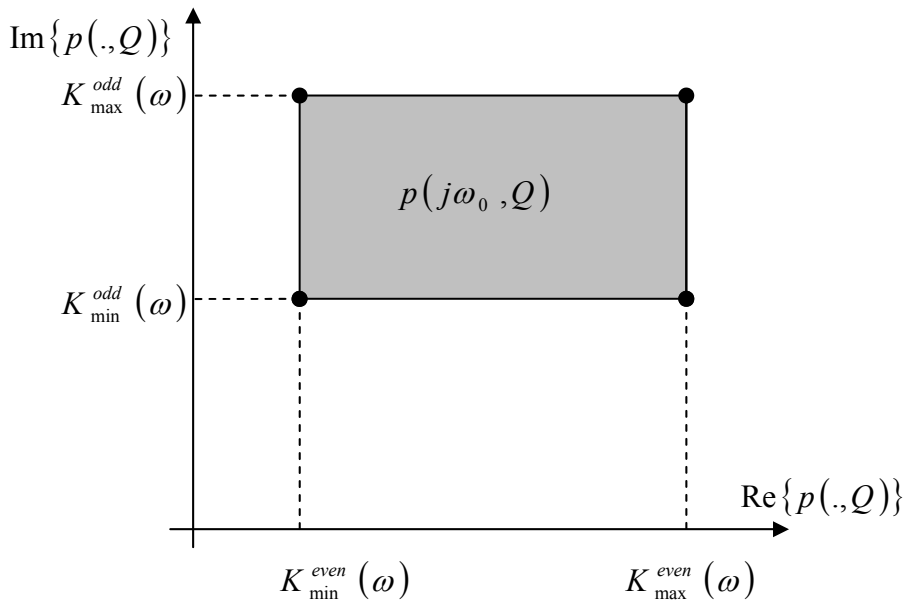
$$K_{\max}^{even}(j\omega)=K_{\max}^{even}(\omega)=q_0^+ - q_2^- \omega^2 + q_4^+ \omega^4 - q_6^- \omega^6 + q_8^+ \omega^8 - \ldots$$
$$K_{\min}^{even}(j\omega)=K_{\min}^{even}(\omega)=q_0^- - q_2^+ \omega^2 + q_4^- \omega^4 - q_6^+ \omega^6 + q_8^- \omega^8 - \ldots$$
$$\frac{K_{\max}^{odd}(j\omega)}{j\omega}=K_{\max}^{odd}(\omega)=q_1^+ - q_3^- \omega^2 + q_5^+ \omega^4 - q_7^- \omega^6 + q_9^+ \omega^8 - \ldots$$
$$\frac{K_{\min}^{odd}(j\omega)}{j\omega}=K_{\min}^{odd}(\omega)=q_1^- - q_3^+ \omega^2 + q_5^- \omega^4 - q_7^+ \omega^6 + q_9^- \omega^8 - \ldots$$

Pak Charitonovy polynomy lze zapsat tímto tvarem:

$$K_1(s)=K_{\min}^{even}(s)+K_{\min}^{odd}(s)$$
$$K_2(s)=K_{\min}^{even}(s)+K_{\max}^{odd}(s)$$
$$K_3(s)=K_{\max}^{even}(s)+K_{\min}^{odd}(s)$$
$$K_4(s)=K_{\max}^{even}(s)+K_{\max}^{odd}(s)$$

Verze Hermite-Biehlerovy věty pro intervalový polynom pak zní:

Intervalový polynom $p(s,\mathbf{q})=\sum_{i=1}^{n}\left[q_i^-, q_i^+\right]s^i$ *je robustně stabilní právě když funkce* $K_{\max}^{even}(\omega), K_{\min}^{even}(\omega), K_{\max}^{odd}(\omega), K_{\min}^{odd}(\omega)$ *mají reálné kořeny, pro jejich kladné kořený platí, že :* $0 < \omega_{e,1}^{\min} < \omega_{e,1}^{\max} < \omega_{o,1}^{\min} < \omega_{o,1}^{\max} < \omega_{e,2}^{\min} < \ldots$ *a čísla* $K_{\max}^{even}(0), K_{\min}^{even}(0), K_{\max}^{odd}(0), K_{\min}^{odd}(0)$ *jsou nenulová a mají stejné signum. Grafické znázornění je na Obr. 3*



Obr. 3 Grafická interpretace Hermite-Biehlerovy věty

4.4 Překrytí

Složitější typy neurčitosti lze překrýt intervalovou neurčitostí. Pro obecnou rodinu polynomů $P: p(s,\mathbf{q}) = \sum a_i(\mathbf{q}) s^i$, Q uzavřená a omezená množina vezmeme meze:

$$\overline{q}_i^{\,-} = \min_{\mathbf{q}\in Q} a_i(\mathbf{q})$$

$$\overline{q}_i^{\,+} = \max_{\mathbf{q}\in Q} a_i(\mathbf{q})$$

a testujeme intervalový polynom $\overline{P}: \overline{p}(s,\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{q}_i^{\,-}, \overline{q}_i^{\,+}\right] s^i$. Zřejmě $\overline{P} \supseteq P$. Proto platí, jestliže je $\overline{P}$ robustně stabilní, pak je robustně stabilní i P, opačně to ale neplatí. Jestliže intervalový polynom není robustně stabilní pak o původní rodině polynomů nemůžeme nic podobného říci.

4.5 Intervalová soustava

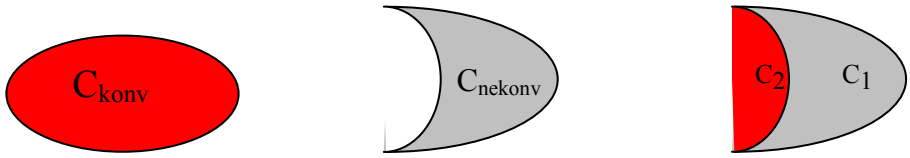
Intervalová soustava je taková soustava jejíž čitatel a jmenovatel jsou intervalovými polynomy.

$$P(s,\mathbf{q},\mathbf{r}) = \frac{\sum \left[q_i^-, q_i^-\right] s^i}{\sum \left[r_i^-, r_i^-\right] s^i}$$

Pro zvláštní typy regulátorů (P, I, regulátor s přenosem $\frac{c}{s^k}$) je výsledný charakteristický polynom také intervalovým polynomem.

5 Polytopická neurčitost

Polytop v R^k je konvexní obal konečné množiny bodů $p^1, p^2, \ldots, p^k$ z R^k $P = conv\{p^i\}$. Konvexní obal zavádíme pro nekonvexní množinu hodnot $C \subseteq R^k$ a je to nejmenší konvexní množina obsahující množinu C (Obr. 4). Pro konvexní obal se používá zápis $conv\{C\} \supseteq C$, přičemž rovnost platí, je-li množina C konvexní. Množina generátorů polytopu P je $\{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$. Polytop je průnik konečného počtu poloprostorů.

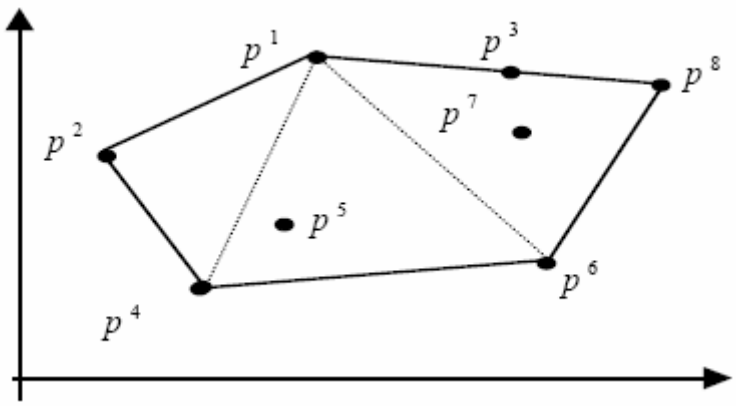


$conv\{C_1\} = C_1 \cup C_2$

Obr. 4 Konvexní množina a konvexní obal

Každý bod p polytopu $P = conv\{p^1, p^2, \ldots, p^m\}$ můžeme pomocí $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ vyjádřit jako konvexní kombinaci generátorů $p = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p^i$.

Bod $p^i \in P = conv\{p^1, p^2, \ldots, p^m\}$ je extrém (vrchol) polytopu, když není konvexní kombinací žádných dvou či více různých bodů z P.



Body polytopu $P_1 = conv\{p_1, p_6, p_8\}$ lze popsat lineární kombinací $\lambda_1 p^1 + \lambda_6 p^6 + \lambda_8 p^8$

Pro p^3 platí:

$\lambda_1 \neq 0; \lambda_6 = 0; \lambda_8 \neq 0$

Pro p^1 platí:

$\lambda_1 = 1; \lambda_6 = 0; \lambda_8 = 0$

Z toho plyne, že p^1 je vrchol

Obr. 5 Příklad bodů a hran polytopu

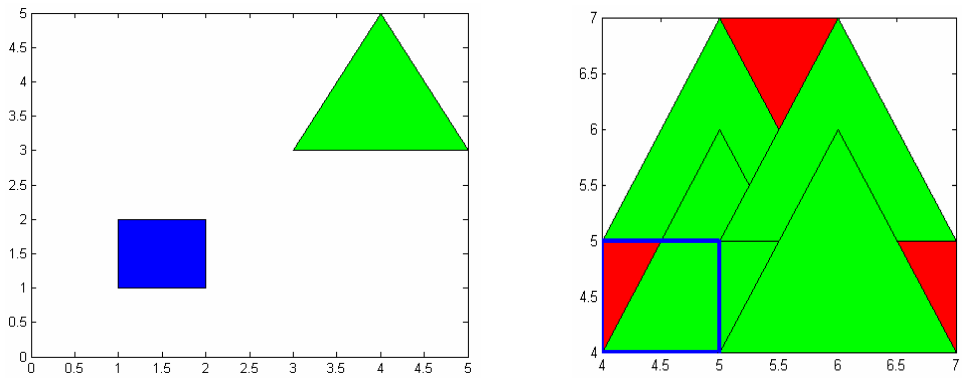
Úsečka je hrana polytopu, jestliže neprotíná žádnou jinou úsečku polytopu s krajními body mimo ní. Tedy úsečka $[p^a, p^b] \subseteq P$ je hranou právě když, $\forall p^c, p^d \in P$, $p^c, p^d \notin [p^a, p^b]: [p^a, p^b] \cap [p^c, p^d] = \{\ \}$ (Obr. 6).

úsečka $\left[p^a, p^b\right]$ není hranou P úsečka $\left[p^a, p^b\right]$ je hranou P

Obr. 6 Grafické znázornění hrany

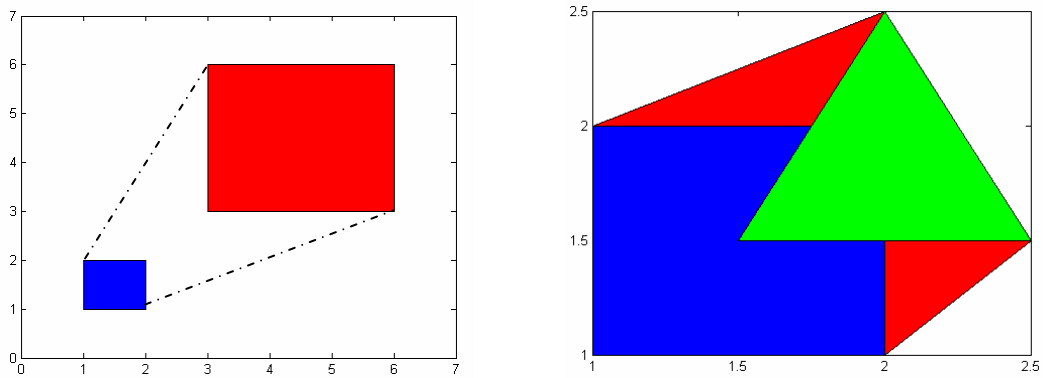
S polytopy lze provádět následující operace:

1. součet polytopů (Obr. 7) $P_1 + P_2 = \left\{p^1 + p^2 : p^1 \in P_1, p^2 \in P_2\right\}$ je polytop $P_1 + P_2 = conv\left\{p^{1,i_1} + p^{2,i_2}\right\}$, kde $P_1 = conv\left\{p^{1,i_1}\right\}$ a $P_2 = conv\left\{p^{2,i_2}\right\}$



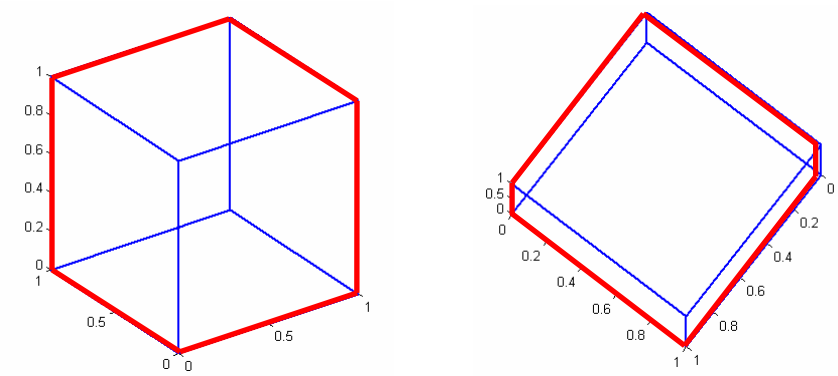
Obr. 7 Součet polytopů

2. průnik polytopů je polytop, který může mít nové hrany a vrcholy.
3. násobek skalárem $\alpha P = \left\{\alpha p : p \in P\right\}$ je polytop a platí: $\alpha P = conv\left\{\alpha p^i\right\}$
4. sjednocení polytopů nezachovává polytopičnost, ale platí, že konvexní obal (sjednocení) $conv\left\{P_1 \cup P_2\right\}$ je polytop generovaný $\left\{p^{1,i_1}\right\} \cup \left\{p^{2,i_2}\right\}$



Obr. 8 Násobení polytopu skalárem a sjednocení polytopů

5. lineární transformace polytopu $TP = \{Tp : p \in P\}$ je polytop pro který platí: $TP = conv\{Tp^i\}$. *Přitom každá hrana polytopu TP odpovídá hraně polytopu P tj. každá hrana je obrazem nějaké původní hrany, ale každá hrana se nemusí promítnout do hrany, může se také promítnout dovnitř vzniklého polytopu TP.*



Obr. 9 Znázornění lineární transformace polytopu

5.1 Polytop polynomů

Rodina polynomů $P = \{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ je polytop polynomů když $p(.,\mathbf{q})$ má afinní lineární strukturu neurčitosti a Q je polytop. Polytop polynomů je isomorfní polytop koeficientů tj. jeden popis lze převést na druhý a naopak.

Rodinu polynomů s afinní lineární strukturou neurčitosti můžeme také zapsat: $p(s,\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\mathbf{q}) s^i = p_0(s) + \sum_{i=1}^{l} q_i p_i(s)$. Důležitou vlastností systémů s afinní lineární strukturou je zachování této struktury po uzavření zpětnovazební smyčky s obecným regulátorem. Tato struktura zůstává zachována i při převodu na diskrétní systém pomocí lineární zlomkové transformace.

5.2 Intervalový polynom jako polytop

Intervalový polynom $p(s,\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} [q_i^-, q_i^+] s^i$ lze převést na polytop generovaný jednočleny $p(s, q^k) = \sum_{i=1}^{n} q_i^k s^i$. Tento polytop má $m \le 2^{n+1}$ vrcholů.

5.3 Jednotkový simplex

Polytop polynomů $p(s,\mathbf{q}) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{l} q_i p_i(s), \mathbf{q} \in Q = conv\{q^i\}$ můžeme také vyjádřit jako jednotkový simplex:

$$p(s,\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i=1}^{2^{l+1}}\lambda_i\, p(s,q^i),\sum_{i=1}^{2^{l+1}}\lambda_i=1$$

Každý z těchto popisů můžeme převést na druhý, ale mění se přitom tvar množiny parametrů.

5.4 Množina hodnot polytopu

Polytop $P=\{p(.,\mathbf{q}):\mathbf{q}\in Q\},Q=conv\{q^i\}$ má v bodě $z\in C$ množinu hodnot $p(z,Q)=conv\{p(z,q^i)\}$. Jestliže $z_0=p(z,q^0)$ je na hraně $p(z,Q)$ pak q^0 je na hraně Q. Opačně to ale říci nemůžeme, protože je-li q^0 na hraně Q, pak $z_0=p(z,q^0)$ nemusí být na hraně $p(z,Q)$, protože hrana se může zobrazit i dovnitř.

6 Hrany

Z věty o vyloučení nuly a z vlastností množiny hodnot plyne, že vnitřek množiny hodnot pro nás není tolik důležitý jako hrany. Jestliže by se měla nula objevit uvnitř množiny hodnot musí nejprve projít hranou. Z toho vyplývá, že při testování stability nám stačí testovat stabilitu na hranách. V případě stabilních hran můžeme prohlásit celý polytop za stabilní.

Hrana polytopu polynomů je úsečka v prostoru polynomů taková, že ji můžeme vyjádřit pomocí krajních bodů (vrcholů) $p_{i1,i2}(s,\lambda)=\lambda p_{i1}(s)+(1-\lambda)p_{i2}(s)$, kde $p_{i1}(s)$, $p_{i2}(s)$ jsou vrcholy polynomů a tedy obrazem vrcholů množiny Q $p_{i1}(s)=p_{i1,i2}(s,q^{i1})$, $p_{i2}(s)=p_{i1,i2}(s,q^{i2})$. Je zřejmé, že úsečka $[q^{i1},q^{i2}]$ je úsečkou v R^l a je hranou množiny omezující parametry Q. Jelikož hrana je rodina polynomů s jedním parametrem, její robustní stabilitu umíme jednoduše otestovat.

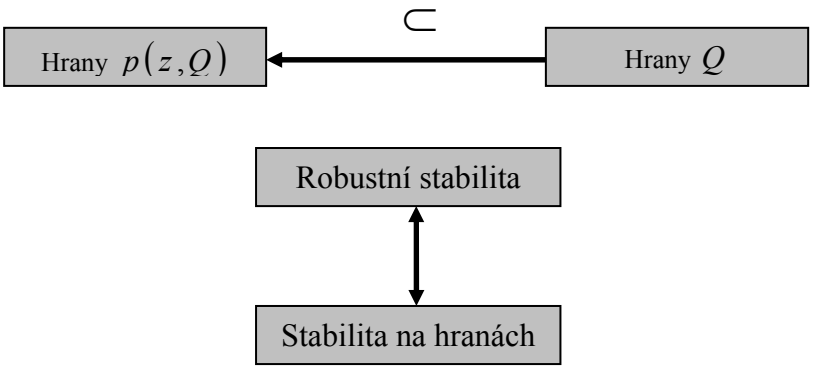
6.1 Věta o hranách (Edge teorém)

Nechť D je otevřená podmnožina C, $\Phi_D : I \to C$ je funkce definující hranici D a nechť polytop polynomů $P=\{p(.,\mathbf{q}):\mathbf{q}\in Q\}, Q=conv\{q^i\}$ má invariantní stupeň. Pak P je robustně *D*-stabilní, právě když:

Pro každou hranu množiny Q s vrcholy q^{i1},q^{i2} je polynom

$$p_{i1,i2}(s,\lambda)=\lambda p_{i1}(s)+(1-\lambda)p_{i2}(s)$$

D-stabilní $\forall\lambda\in[0,1]$.



Obr. 10 Edge teorém

Věta o hranách platí, i když se omezíme na hrany, které odpovídají hranám množině hodnot polytopu. Výhodou této možnosti testování robustní stability je menší počet testovaných hran než při testování hran množiny Q. Nevýhodou ale je to, že není lehké tyto hrany určit, proto se testuje robustní stabilita pomocí testování stability na hranách množiny Q.

6.1.1 Spektrální množina

Pro rodinu polynomů $P = \{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, Q = conv\{q^i\}$ definujeme spektrální množinu (množinu kořenů) :

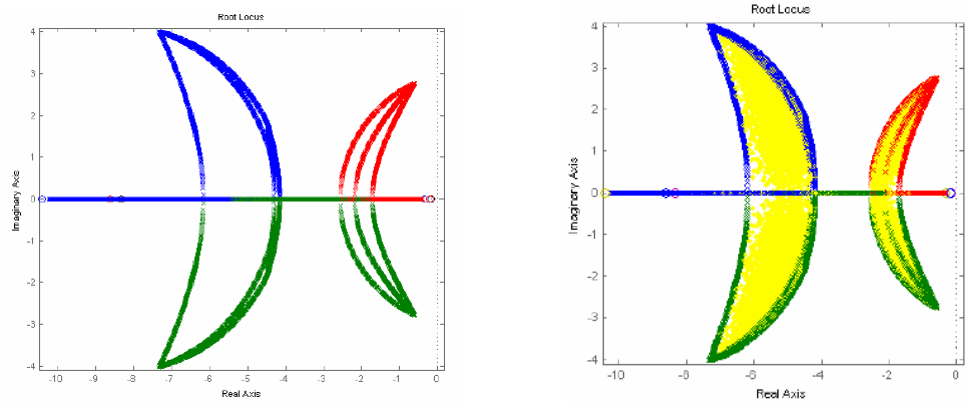
$$\sigma[P] = \{z \in C : p(z,\mathbf{q}) = 0 \ pro \ \mathbf{q} \in Q\}$$

Je to sjednocení spekter všech polynomů v *P*.

Ze spektrální množiny lze rozhodnout o robustní stabilitě *P*: *P* je robustně stabilní právě když $\sigma[P] \subseteq D$. Tato metoda testování navíc umožňuje posoudit všechny možné oblasti robustní *D* stability. Spektrální množina polytopu polynomů s invariantním stupněm je uzavřená a omezená.

6.1.2 Věta o hranách s využitím kořenů

Pro polytop polynomů $P = \{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}, Q = conv\{q^i\}$ s invariantním stupněm platí: $\partial\sigma[P] \subseteq \sigma[\varepsilon_Q(P)]$ platí také silnější, ale nepraktická verze této věty $\partial\sigma[P] \subseteq \sigma[\varepsilon(P)]$, kde $\varepsilon(P)$ je množina hran polytopu *P*, $\varepsilon(P) = \{p(.,\mathbf{q}) : a(\mathbf{q}) \in \varepsilon(a(Q))\}$, $\varepsilon(a(Q))$ označuje množinu hran $a(Q)$ v R^{n+1}, $\varepsilon_Q(P) = \{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in \varepsilon(Q)\}$.



Obr. 11 Věta o hranách s využitím geometrického místa kořenů

Testování robustní stability pomocí testování hran je použitelné pro malý počet parametrů, pro rostoucí počet parametrů dochází ke kombinatorické explozi počtu hran.

$$Q \subset R^l \quad \rightarrow \quad N_{edges} = l\,2^{l-1}$$

Počet hran dramaticky roste s počtem parametrů viz. Tab 1. Nabízí se otázka jestli jsou všechny hrany stejně důležité. Protože pro polytop polynomů $P = \{p(.,\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$ s l parametry a Q je kvádr v R^l, pak Q má $N_{edges} = l\,2^{l-1}$ hran, ale množina hodnot polytopu má hran méně: $p(z,Q)$ je rovnoběžný mnohoúhelník s počtem hran $\leq 2l$. Bohužel se hrany $p(z,Q)$ mění se změnou z a nejde tak obecně říci které hrany Q jsou důležité.

Počet parametrů	Počet hran
1	1
2	4
3	12
4	32
5	80
6	192
7	448
8	1024
9	2304
10	5120

Tab.1

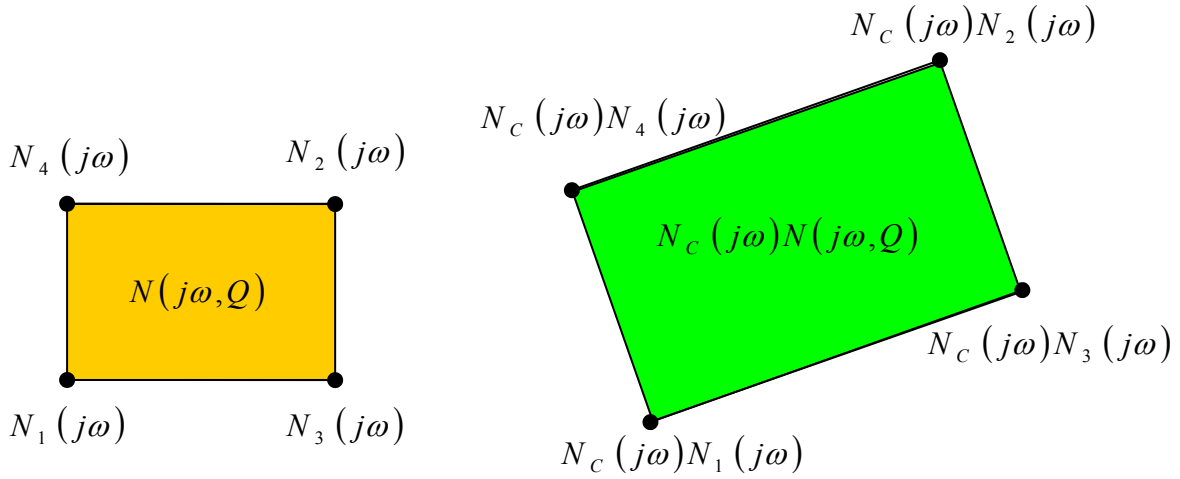
Budeme uvažovat intervalovou soustavu $P(s,\mathbf{q},\mathbf{r})=\dfrac{N(s,\mathbf{q})}{D(s,\mathbf{r})}$, kde $N(s,\mathbf{q})=\sum_{i=1}^{m}\left[q_i^-,q_i^+\right]s^i$ a $D(s,\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{m}\left[r_i^-,r_i^+\right]s^i$. S obecným regulátorem (jehož přenos má pevné koeficienty) ve zpětné vazbě $C(s)=\dfrac{N_C(s)}{D_C(s)}$ výsledný charakteristický polynom je také polytop. Výsledný charakteristický polynom je $p(s,\mathbf{q},\mathbf{r})=D(s,\mathbf{r})D_C(s)+N(s,\mathbf{q})N_C(s),\mathbf{q}\in Q,\mathbf{r}\in R$, tj. polytop s $m+n$ parametry $P_{CL}=\{p(.,\mathbf{q},\mathbf{r}):\mathbf{q}\in Q,\mathbf{r}\in R\}$. Množina parametrů tohoto polytopu je $(m+n)$-dimensionální kvádr s počtem hran $N_{edges}=(m+n+2)\times 2^{n+m-1}$, ale množina hodnot $p(j\omega,Q,R)$ má pro každé pevné ω počet hran jen $N_{edges}\le 8$ a pro proměnné ω je počet uvažovaných hran jen $N_{edges}\le 32$. Obě tato čísla jsou nezávislá na n a m.

6.2 Věta o 32 hranách (Generalizovaný Charitonovův teorém)

Nechť $P(s,\mathbf{q},\mathbf{r})=\dfrac{N(s,\mathbf{q})}{D(s,\mathbf{r})}$ je intervalová soustava s Charitonovými polynomy čitatele $N_1(s),N_2(s),N_3(s),N_4(s)$ a jmenovatele $D_1(s),D_2(s),D_3(s),D_4(s)$ a nechť $C(s)=\dfrac{N_C(s)}{D_C(s)}$ je zpětnovazební regulátor takový, že výsledný charakteristický polynom P_{CL} má invariantní stupeň. Pak P_{CL} je robustně stabilní právě, když všechny polynomy na hranách $e(s,\lambda)=N_{i1}(s)N_C(s)+D_{i2,i3}(s,\lambda)D_C(s)$ s $i1\in\{1,2,3,4\}$ a s $(i2,i3)=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ a $e(s,\lambda)=N_{i1,i2}(s,\lambda)N_C(s)+D_{i3}(s)D_C(s)$

s $(i1,i2)=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ a s $i3\in\{1,2,3,4\}$ jsou stabilní pro všechna $\lambda\in[0,1]$, kde $D_{i2,i3}(s,\lambda)(N_{i1,i2}(s,\lambda))$ jsou úsečky s vrcholy v $D_{i2}(s)(N_{i1}(s))$ a $D_{i3}(s)(N_{i2}(s))$.

Množinou hodnot polytopu vzniklého spojením intervalové soustavy a obecného zpětnovazebního regulátoru má tvar osmiúhelníku. Množiny hodnot $D(j\omega,Q),N(j\omega,R)$ jsou Charitonovovy obdélníky. Množinu hodnot charakteristického polynomu $p(j\omega,Q,R)=D(j\omega,R)D_C(j\omega)+N(j\omega,Q)N_C(j\omega)$ lze zkonstruovat následujícím způsobem: Nejprve budeme uvažovat $D_C(j\omega)=0$, což je obdélník násobený komplexním číslem $p(j\omega,Q,R)=N(j\omega,Q)N_C(j\omega)$, tedy obdélník natočený o úhel $\angle N_C(j\omega)$ a násobený skalárem $|N_C(j\omega)|$.

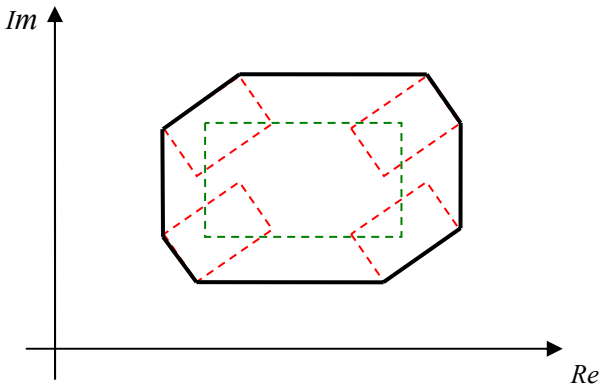


Obr. 12 Násobení Charitonovova obdélníku komplexním číslem

Pro $D_C(j\omega)\neq 0$ můžeme vytknout $D_C(j\omega)$ pak dostaneme:

$$p(j\omega,Q,R)=D_C(j\omega)[C(j\omega)N(j\omega,Q)+D(j\omega,R)].$$

Výraz v závorce je součet natočeného a násobeného obdélníku s jiným obdélníkem, což je osmiúhelník. Po vynásobení výrazu v závorce $D_C(j\omega)$ je výsledný osmiúhelník natočený a vynásobený skalárem.



Obr. 13 Osmiúhelníková množina hodnot

Pro intervalovou soustavu s Charitonovými polynomy čitatele $N_1(s), N_2(s)$, $N_3(s), N_4(s)$ a jmenovatele $D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)$ definujeme pro každý pár $(i1, i2) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ kritickou hranu čitatele a jmenovatele:

$$N_{i1,i2}(s,\lambda) = \lambda N_{i1}(s) + (1-\lambda) N_{i2}(s)$$

$$D_{i1,i2}(s,\lambda) = \lambda D_{i1}(s) + (1-\lambda) D_{i2}(s)$$

Pomocí věty o 32 hranách se nám podařilo redukovat počet hran na 32 a to při jakémkoliv počtu parametrů. Pro různé speciální případy lze tento počet zredukovat ještě více např. pro proporcionální regulátor s pevným znaménkem zesílení lze počet hran snížit na 4.

7 Použití fuzzy funkcí

V této práci se zabývám neurčitostí obsaženou v intervalových polynomech. Jednou z metod jak zobecnit intervalový polynom je použití fuzzy funkcí. Interval neurčitosti chápeme jako fuzzy číslo, tj. konvexní fuzzy množinu se spojitou funkcí příslušnosti a jednoprvkovým jádrem:

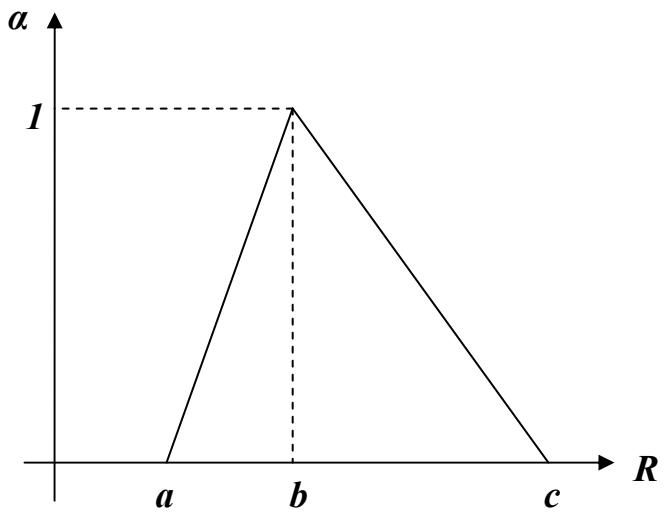
Je-li fuzzy číslo $Z \tilde{\subset} R$, *pak* $Ker(Z) = \{z_0\}$, *kde* $z_0 \in R$ *je střed.*

Speciálním a nejpoužívanějším typem fuzzy čísel jsou tzv. *trojúhelníková fuzzy čísla*, což jsou fuzzy čísla jejichž funkce příslušnosti má trojúhelníkový tvar:

$$Z(x,a,b,c) = \begin{cases} 0 & x < a \text{ nebo } x > c \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & b \le x \le c \\ 1 & x = b \end{cases}$$

kde a, b, c jsou parametry znázorněné na obr. 14.

V našem případě parametry a, c reprezentují intervalové meze neurčitosti a parametr b reprezentuje hodnotu koeficientu nominálního přenosu systému, $Z(x,a,b,c)$ reprezentuje parametr α.



Obr. 14 Trojúhelníkové fuzzy číslo

8 Algoritmy pro analýzu

8.1 Zadání

Navrhněte a naprogramujte algoritmy pro robustní analýzu stability zpětnovazebního systému. Pro návrh těchto algoritmů použijte větu o hranách (Edge teorém) a větu o 32 hranách (Generalizovaný Charitonovův teorém). Parametry neurčitosti intervalových polynomů jsou interpretovány jako trojúhelníková fuzzy čísla s pevnými mezemi.

Pro návrh použijte následujících předpokladů:

1. systém se skládá z intervalové soustavy a pevného regulátoru
2. intervalové polynomy jsou definovány následujícím způsobem:

$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n} q_i s^i = \sum_{i=0}^{n} \underset{i}{\Delta} s^i = \underset{n}{\Delta} s^n + \underset{n-1}{\Delta} s^{n-1} + \cdots + \underset{1}{\Delta} s + \underset{0}{\Delta}$, kde $\underset{i}{\Delta}$ je trojúhelníková fuzzy funkce (viz. Kapitola 7), dána předpisem $\underset{i}{\Delta} = tri(a_i, b_i, c_i)$. Po zakomponování parametru α má intervalový polynom následující tvar:

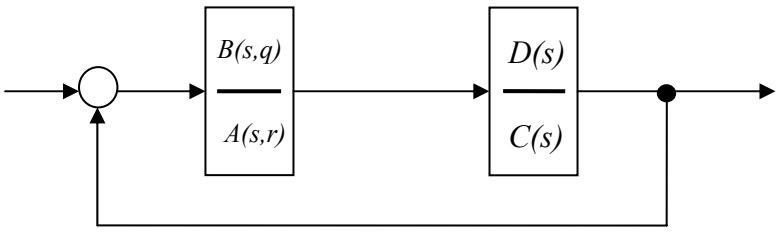
$$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}\left[a_i+(b_i-a_i)*\alpha\,;\,c_i-(c_i-b_i)*\alpha\right]s^i$$

Výstupem těchto algoritmů bude mez stability, tj. hodnota parametru $\alpha \in \langle 0;1 \rangle$.

K naprogramovaným algoritmům vytvořte grafické prostředí ve kterém bude možné zadávat vstupní hodnoty a editovat je graficky. Dále zde bude možné vybrat si metodu výpočtu a grafická interpretace výsledku.

8.2 Popis algoritmu pro Edge test

Veškeré výpočty jsou vypracovány pro následující zapojení zpětnovazebního systému Obr. 15.



Obr. 15 Zapojení systému pro analýzu

1.krok Otestuj stabilitu nominálního systému, jestliže není nominální systém stabilní jdi na **KONEC**.

2.krok Otestuj obsahuje-li výsledný charakteristický polynom s neurčitostí invariantní stupeň. Jestliže zde není zajištěn invariantní stupeň, jdi na **KONEC.**

3.krok Do α dej nulu. Parametrizuj neurčitost pomocí parametru α a to dle následujícího předpisu.

$$q = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$
$$\min = a + (b - a) * \alpha$$
$$\max = c - (c - b) * \alpha$$

4.krok Naplň symbolické matice *A, B, C, D* všemi možnými polynomy *A(s,r), B(s,q), C(s), D(s).*

5.krok Naplň vektor *ABCD_p* všemi možnostmi charakteristických polynomů zpětnovazebního systému vypočtených ze symbolických matic *A, B, C, D.* Tyto polynomy jsou zároveň všechny možné vrcholy na množině omezující parametry *Q*.

6.krok Vyber *i*-tý vrchol z vektoru *ABCD_p* (pro první krok *i*=1) a propoj ho hranou (parametrizovanou parametrem λ) s *ii*-tým vrcholem z vektoru *ABCD_p* (pro první krok *ii*=2),jestliže *ii*= size(*ABCD_p*) pak *i*=*i*+1 a *ii*=*i*+1, jestliže *i=size(ABCD_p)* pak jdi na **KONEC**.

7.krok Sestav Hurwitzovu matici polynomu hrany.

8.krok Pro všechna $\lambda \in (0,1)$ urči pro které $\alpha \in (0,1)$ ztrácí Hurwitzovu matice plnou hodnost, jestliže $\alpha_{nové} > \alpha_{staré}$ pak $\alpha = \alpha_{nové}$ .Jestliže $\alpha = 1$ jdi na **KONEC**. Jinak skok na **6.krok** s *ii*=*ii*+1.

9.krok **KONEC**

8.2 <u>Použití algoritmu Edge test na příkladu</u>

<u>Příklad 1</u>

Pro zadané hodnoty koeficientu přenosů soustavy určete hodnoty mezí robustní stability tohoto systému.

$$C(s) = 8s\,;\; D(s) = 3\,;\; A(s) = s + \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \end{bmatrix};\; B(s) = 5$$

1. Nejprve otestujeme stabilitu nominálního systému:

$C_0(s) = 8s$; $D_0(s) = 3$; $A_0(s) = s + 5$; $B_0(s) = 5$, pak charakteristický polynom $p(s) = 8s^2 + 40s + 15$. Jelikož jsou všechny koeficienty stejného znamínka je nominální systém stabilní.

2. Jelikož se neurčitost neobjevuje v nejvyšší mocnině char. polynomu tudíž char. polynom má invariantní stupeň.

3. Nyní parametrizujeme intervalové polynomy pomocí parametru α dle předpisu viz. Krok 3.

$$C(s)=8s\,;\,D(s)=3\,;\,A(s)=s+\left[-1+6\alpha \quad 9-4\alpha\right];\,B(s)=5$$

4. V dalším kroku vypíšeme všechny možné polynomy *A(s), B(s), C(s), D(s).*

$$C=\left[8s\right]\;;\;D=\left[3\right]\;;\;\mathbf{A}=\begin{bmatrix} s+9-4\alpha \\ s-1+6\alpha \end{bmatrix}\;;\;B=\left[5\right]$$

5. Vypíšeme všechny možné charakteristické polynomy které reprezentují množinu všech vrcholů polytopu:

$$\mathbf{ABCD_p}=\left[15+8s\left(s+9-4\alpha\right) \quad 15+8s\left(s-1+6\alpha\right)\right]$$

6. Jelikož máme pouze dva vrcholy existuje pouze jedna hrana pro testování robustní stability a to hrana dle následujícího předpisu:

$$e(s,\lambda,\alpha)=\lambda\left(15+8s\left(s+9-4\alpha\right)\right)+\left(1-\lambda\right)\left(15+8s\left(s-1+6\alpha\right)\right)$$

7. Sestrojíme Hurwitzovu matici pro hranu kterou chceme testovat:

$$\mathbf{H}(\alpha,\lambda)=\begin{bmatrix} 80\lambda\alpha+72-32\alpha-80\lambda & 0 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

8. Nyní musíme najít pro $\lambda\in(0,1)$ takové minimální α pro které Hurwitzovu matice ztrácí plnou hodnost.

   Př. $\lambda=0,5$

$$\mathbf{H}(\alpha,0,5)=\begin{bmatrix} 64+16\alpha & 0 \\ 16 & 15 \end{bmatrix}\;;\;hod\,\mathbf{H}\neq 2\,;\,pro\;\alpha=-0,25$$

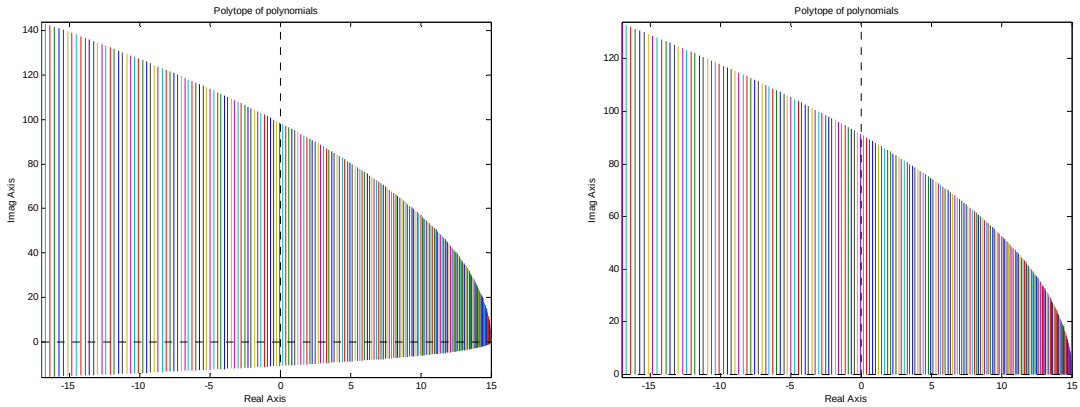
   Pro všechna α je hrana stabilní, jelikož $\alpha=-0,25\notin(0,1)$

   Ale pro $\lambda=0$ existuje minimální hodnota parametru α takové, že se systém stává Hurwitzovsky nestabilním.

$$\mathbf{H}(\alpha,0)=\begin{bmatrix} -8+48\alpha & 0 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}\;;\;hod\,\mathbf{H}\neq 2\,;\,pro\;\alpha=0,16667$$

   Pro všechna $\alpha>0,16667$ je hrana stabilní.

9. Výstupem algoritmu je minimální hodnota $\alpha = 0{,}16667$ pro kterou je systém ještě stabilní,nové hodnoty mezí intervalových polynomů jsou potom:
$C(s) = 8s$; $D(s) = 3$; $A(s) = s + [0 \quad 8{,}333]$; $B(s) = 5$
Na obr. 16 je grafický test stability pro daný systém.



Obr. 16 Vykreslení množiny hodnot systému pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 0{,}16667$

<u>Příklad 2</u>

Pro zadané hodnoty koeficientu přenosů soustavy určete hodnoty mezí robustní stability tohoto systému.

$$C(s) = 8s$$
$$D(s) = 3$$
$$A(s) = s^3 [1 \quad 1 \quad 3] + s^2 [-21 \quad 3 \quad 9] + s[-5 \quad 4 \quad 5] + [-10 \quad 2 \quad 50]$$
$$B(s) = 5$$

1. Nejprve otestujeme stabilitu nominálního systému:

   $C_0(s) = 8s$; $D_0(s) = 3$; $A_0(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$; $B_0(s) = 5$, pak charakteristický polynom $p(s) = 8s^4 + 24s^3 + 32s^2 + 16s + 15$. Jelikož všechny kořeny leží v pravé polorovině komplexní roviny je nominální systém stabilní.

2. Jelikož neurčitost objevující se v nejvyšší mocnině char. polynomu nemění znaménko má char. polynom invariantní stupeň.

3. Nyní parametrizujeme intervalové polynomy pomocí parametru α dle předpisu viz. Krok 3.

   $C(s) = 8s$; $D(s) = 3$; $B(s) = 5$
   $A(s) = s^3 [1 \quad 3 - 2\alpha] + s^2 [-21 + 24\alpha \quad 9 - 6\alpha] + s[-5 + 9\alpha \quad 5 - \alpha] + [-10 + 12\alpha \quad 50 - 48\alpha]$

4. V dalším kroku vypíšeme všechny možné polynomy *A(s), B(s), C(s), D(s).*

$$C=[8s];D=[3];\mathbf{A}=\begin{bmatrix}(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\end{bmatrix};B=[5]$$

5. Vypíšeme všechny možné charakteristické polynomy které reprezentují množinu všech vrcholů polytopu:

$$\mathbf{ABCD_p}=15+8s*\begin{bmatrix}(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\(3-2\alpha)s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(-10+12\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(50-48\alpha)\\s^3+(-21+24\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\end{bmatrix}$$

6. Jelikož máme 16 vrcholů existuje120 hran pro testování robustní stability a to hrany dle následujícího předpisu:

$$e(s,\lambda,\alpha)=\lambda * \mathbf{ABCD_p}(i_1)+(1-\lambda)* \mathbf{ABCD_p}(i_2)$$

Př. $i_1=1; i_2=4$

$$e(s,\lambda,\alpha)=\lambda\left(15+8s\left((3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(5-\alpha)s+(50-48\alpha)\right)\right)+$$
$$(1-\lambda)\left(15+8s\left((3-2\alpha)s^3+(9-6\alpha)s^2+(-5+9\alpha)s+(-10+12\alpha)\right)\right)$$

7. Sestrojíme Hurwitzovu matici pro hranu kterou chceme testovat:

$$\mathbf{H}(\alpha,\lambda)=\begin{bmatrix} 72-48\alpha & -480\alpha\lambda-80+96\alpha+480\lambda & 0 & 0 \\ 24-16\alpha & -80\alpha\lambda-40+72\alpha+8\lambda & 15 & 0 \\ 0 & 72-48\alpha & -480\alpha\lambda-80+96\alpha+480\lambda & 0 \\ 0 & 24-16\alpha & -80\alpha\lambda-40+72\alpha+8\lambda & 15 \end{bmatrix}$$

8. Nyní musíme najít pro $\lambda\in(0,1)$ takové minimální α pro které Hurwitzovu matice ztrácí plnou hodnost.

Př. $\lambda=0,5$

$$\mathbf{H}(\alpha,\lambda)=\begin{bmatrix} 72-48\alpha & 160-144\alpha & 0 & 0 \\ 24-16\alpha & 32\alpha & 15 & 0 \\ 0 & 72-48\alpha & 160-144\alpha & 0 \\ 0 & 24-16\alpha & 32\alpha & 15 \end{bmatrix}$$

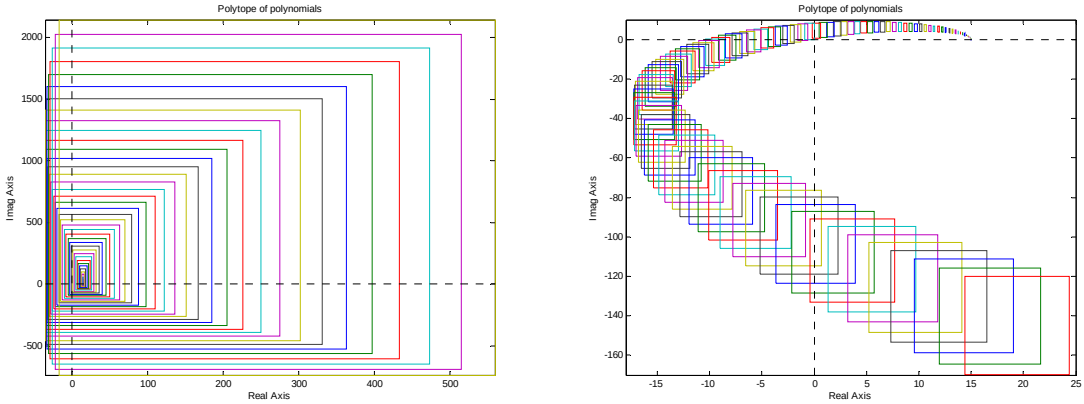
$$hod\,\mathbf{H}\neq 4\,;\ pro\ \alpha=1,5\vee\alpha=1,0304\vee\alpha=0,80984$$

Pro všechna $\alpha>0,80984$ je hrana stabilní

9. Výstupem algoritmu je minimální hodnota $\alpha=0,9827$ pro kterou je systém ještě stabilní,nové hodnoty mezí intervalových polynomů jsou potom:

$$C(s)=8s\,;D(s)=3\,;B(s)=5$$
$$A(s)=s^3\,[1\quad 1,035]+s^2\,[2,585\quad 3,104]+s[3,844\quad 4,017]+[1,792\quad 2,83]$$

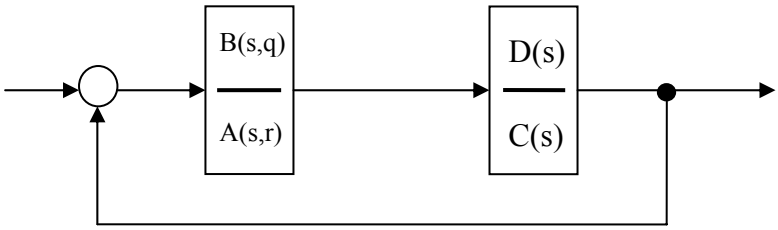
Na obr. 17 je grafický test stability pro daný systém.



Obr. 17 Vykreslení množiny hodnot systému pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 0,9827$

8.3 Popis algoritmu 32 hran (Generalizovaný Charitonov)

Veškeré výpočty jsou vypracovány pro následující zapojení zpětnovazebního systému Obr. 18.



Obr. 18 Zapojení systému pro analýzu

1.krok Otestuj stabilitu nominálního systému, jestliže není nominální systém stabilní jdi na **KONEC**.

2.krok Otestuj obsahuje-li výsledný charakteristický polynom s neurčitostí invariantní stupeň. Jestliže zde není zajištěn invariantní stupeň, jdi na **KONEC.**

3.krok Do α dej nulu. Parametrizuj neurčitost pomocí parametru α a to dle následujícího předpisu.

$$q = [a \quad b \quad c]$$
$$\min = a + (b - a) * \alpha$$
$$\max = c - (c - b) * \alpha$$

4.krok Naplň symbolické matice *A, B, C, D* všemi charitonovými polynomy *A(s,r), B(s,q), C(s), D(s).*

5.krok Naplň pole hran všemi hranami parametrizovanými parametrem λ sestavenými dle následujícího popisu.

$$e(s,\lambda)=B_{i1}(s)D(s)+[\lambda A_{i2}(s)+(1-\lambda)A_{i3}(s)]C(s)$$
$$i1\in\{1,2,3,4\};i2,i3\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}$$

$$e(s,\lambda)=[\lambda B_{i1}(s)+(1-\lambda)B_{i2}(s)]D(s)+A_{i3}(s)C(s)$$
$$i1,i2\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\};i3\in\{1,2,3,4\}$$

6.krok Vyber i-tou hranu z pole $e(s,\lambda)$ (pro první krok *i*=1), jestliže *i*=size($e(s,\lambda)$) pak jdi na **KONEC**.

7.krok Sestav Hurwitzovu matici polynomu hrany.

8.krok Pro všechna $\lambda\in(0,1)$ urči pro které $\alpha\in(0,1)$ ztrácí Hurwitzovu matice plnou hodnost, jestliže $\alpha_{nové}>\alpha_{staré}$ pak $\alpha=\alpha_{nové}$ .Jestliže $\alpha=1$ jdi na **KONEC**. Jinak skok na **6.krok** s *i*=*i*+1.

9.krok **KONEC**

8.4 Použití algoritmu 32 hran na příkladu

Příklad 1

Pro zadané hodnoty koeficientu přenosů soustavy určete hodnoty mezí robustní stability tohoto systému.

$$C(s)=8s\,;\,D(s)=3\,;\,A(s)=s+[-1\quad 5\quad 9];\,B(s)=[-10\quad 5\quad 10]$$

1. Nejprve otestujeme stabilitu nominálního systému:

   $C_0(s)=8s$; $D_0(s)=3$; $A_0(s)=s+5$; $B_0(s)=5$, pak charakteristický polynom $p(s)=8s^2+40s+15$. Jelikož jsou všechny koeficienty stejného znamínka je nominální systém stabilní.

2. Jelikož se neurčitost neobjevuje v nejvyšší mocnině char. polynomu, tudíž char. polynom má invariantní stupeň.

3. Nyní parametrizujeme intervalové polynomy pomocí parametru α dle předpisu viz. Krok 3.

   $$C(s)=8s\,;\,D(s)=3\,;\,A(s)=s+[-1+6\alpha\quad 9-4\alpha];\,B(s)=[-10+15\alpha\quad 10-5\alpha]$$

4. V dalším kroku vypíšeme všechny charitonovovy polynomy *A(s), B(s), C(s), D(s).*

$$C=[8s]\ ;\ D=[3]\ ;\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} s+9-4\alpha \\ s-1+6\alpha \\ s+9-4\alpha \\ s-1+6\alpha \end{bmatrix}\ ;\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -10+15\alpha \\ 10-5\alpha \\ 10-5\alpha \\ -10+15\alpha \end{bmatrix}$$

5. Množina hran pro testování stability je určena následujícím předpisem:

$$e(s,\lambda)=D(s)B_{i1}(s)+C(s)[\lambda A_{i2}(s)+(1-\lambda)A_{i3}(s)]$$
$$i1\in\{1,2,3,4\};i2,i3\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}$$

$$e(s,\lambda)=D(s)[\lambda B_{i1}(s)+(1-\lambda)B_{i2}(s)]+C(s)A_{i3}(s)$$
$$i1,i2\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\};i3\in\{1,2,3,4\}$$

6. Pro příklad si vybereme následující hranu pro testování:

Př. $e(s,\lambda,\alpha)=3(-10+15\alpha)+8s(\lambda(s+9-4\alpha)+(1-\lambda)(s-1+6\alpha))$

7. Sestrojíme Hurwitzovu matici pro vybranou hranu.

$$\mathbf{H}(\alpha,\lambda)=\begin{bmatrix} 48\alpha-8+80\lambda-80\alpha\lambda & 0 \\ 8 & -30+45\alpha \end{bmatrix}$$

8. Nyní musíme najít pro $\lambda\in(0,1)$ takové minimální α pro které Hurwitzovu matice ztrácí plnou hodnost.

Př. $\lambda=0,5$

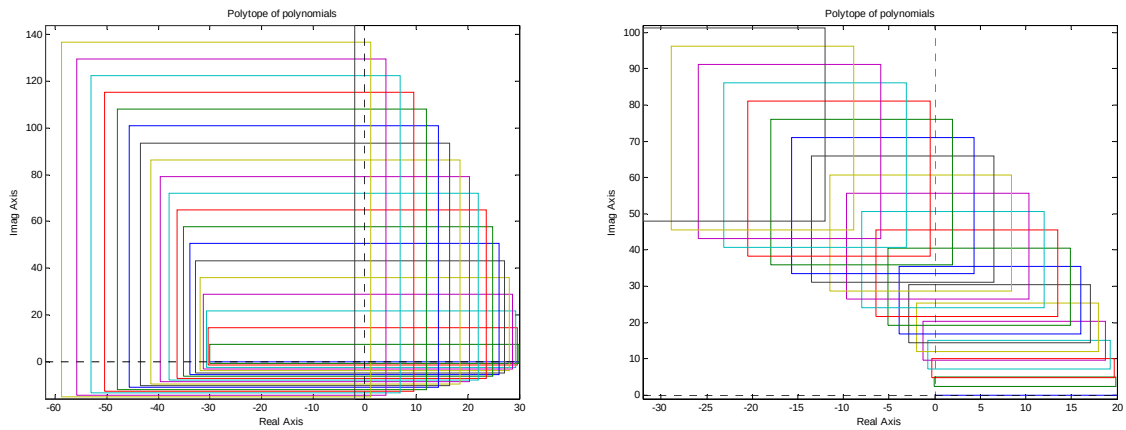
$$\mathbf{H}(\alpha,0,5)=\begin{bmatrix} 32+8\alpha & 0 \\ 8 & -30+45\alpha \end{bmatrix}\ ;\ hod\,\mathbf{H}\neq 2\ ;\ pro\ \alpha=-4\vee\alpha=\frac{2}{3}$$

Pro všechna $\alpha>\frac{2}{3}$ je hrana stabilní, jelikož $\alpha=-4\notin(0,1)$

9. Výstupem algoritmu je minimální hodnota $\alpha=0,6667$ pro kterou je systém ještě stabilní,nové hodnoty mezí intervalových polynomů jsou potom:

$$A(s)=8s\ ;\ B(s)=3\ ;\ C(s)=s+[3\quad 6,3333];\ D(s)=[0\quad 6,667]$$

Na obr. 19 je výsledek grafického testu stability pro tento systém.



Obr. 19 Vykreslení množiny hodnot systému pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 0,6667$

Příklad 2

Pro zadané hodnoty koeficientu přenosů soustavy určete hodnoty mezí robustní stability tohoto systému.

$$C(s) = 8s$$
$$D(s) = 3$$
$$A(s) = s^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} -21 & 3 & 9 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 2 & 50 \end{bmatrix}$$
$$B(s) = 5$$

1. Nejprve otestujeme stabilitu nominálního systému:

   $C(s) = 8s$; $D(s) = 3$; $A(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$; $B(s) = 5$, pak charakteristický polynom $p(s) = 8s^4 + 24s^3 + 32s^2 + 16s + 15$. Jelikož všechny kořeny leží v pravé polorovině komplexní roviny je nominální systém stabilní.

2. Jelikož neurčitost objevující se v nejvyšší mocnině char. polynomu nemění znaménko má char. polynom invariantní stupeň.

3. Nyní parametrizujeme intervalové polynomy pomocí parametru α dle předpisu viz. Krok 3.

   $$C(s) = 8s \,; D(s) = 3 \,; B(s) = 5$$
   $$A(s) = s^3 \begin{bmatrix} 1 & 3-2\alpha \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} -21+24\alpha & 9-6\alpha \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5+9\alpha & 5-\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10+12\alpha & 50-48\alpha \end{bmatrix}$$

4. V dalším kroku vypíšeme všechny charitonovovy polynomy *A(s), B(s), C(s), D(s).*

$$C = [8s]; D = [3]; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s^3 + s^2(24\alpha - 21) + s(5-\alpha) + 50 - 48\alpha \\ s^3(3-2\alpha) + s^2(9-6\alpha) + s(-5+9\alpha) - 10 + 12\alpha \\ s^3(3-2\alpha) + s^2(24\alpha - 21) + s(-5+9\alpha) + 50 - 48\alpha \\ s^3 + s^2(9-6\alpha) + s(5-\alpha) - 10 + 12\alpha \end{bmatrix}; B = [5]$$

5. Množina hran pro testování stability je určena následujícím předpisem:

$$e(s,\lambda)=B_{i1}(s)D(s)+C(s)[\lambda A_{i2}(s)+(1-\lambda)A_{i3}(s)]$$
$$i1\in\{1,2,3,4\};i2,i3\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}$$

$$e(s,\lambda)=D(s)[\lambda B_{i1}(s)+(1-\lambda)B_{i2}(s)]+C(s)A_{i3}(s)$$
$$i1,i2\in\{(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\};i3\in\{1,2,3,4\}$$

6. Pro příklad si vybereme následující hranu pro testování:

Př. $i_1=1, i_2=4$

$$e(s,\lambda,\alpha)=15+8s\lambda\left(s^3+s^2(24\alpha-21)+s(5-\alpha)+50-48\alpha\right)+$$
$$+8s(1-\lambda)\left(s^3+s^2(9-6\alpha)+s(5-\alpha)-10+12\alpha\right)$$

7. Sestrojíme Hurwitzovu matici pro vybranou hranu.

$$\mathbf{H}(\alpha,\lambda)=\begin{bmatrix} 240\alpha\lambda+72-48\alpha-240\lambda & -480\alpha\lambda-80+96\alpha+480\lambda & 0 & 0 \\ 8 & 40-8\alpha & 15 & 0 \\ 0 & 240\alpha\lambda+72-48\alpha-240\lambda & -480\alpha\lambda-80+96\alpha+480\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 40-8\alpha & 15 \end{bmatrix}$$

8. Nyní musíme najít pro $\lambda\in(0,1)$ takové minimální α pro které Hurwitzovu matice ztrácí plnou hodnost.

Př. $\lambda=0,5$

$$\mathbf{H}(\alpha,0,5)=\begin{bmatrix} 72-48\alpha & 160-144\alpha & 0 & 0 \\ 8 & 40-8\alpha & 15 & 0 \\ 0 & 72-48\alpha & 160-144\alpha & 0 \\ 0 & 8 & 40-8\alpha & 15 \end{bmatrix}$$

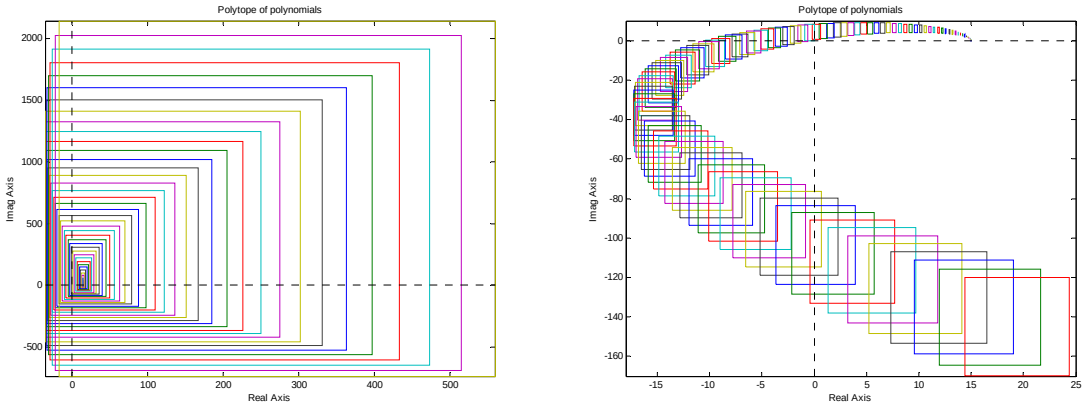
$$hod\,\mathbf{H}\neq 4\,;\ pro\ \alpha=7,8758\vee\alpha=1,0159\vee\alpha=0,82358$$

Pro všechna $\alpha>0,82358$ je hrana stabilní.

9. Výstupem algoritmu je minimální hodnota $\alpha=0,9827$ pro kterou je systém ještě stabilní,nové hodnoty mezí intervalových polynomů jsou potom:

$$C(s) = 8s$$
$$D(s) = 3$$
$$A(s) = s^3\,[1 \quad 1{,}035] + s^2\,[2{,}585 \quad 3{,}104] + s\,[3{,}844 \quad 4{,}017] + [1{,}792 \quad 2{,}83]$$
$$B(s) = 5$$

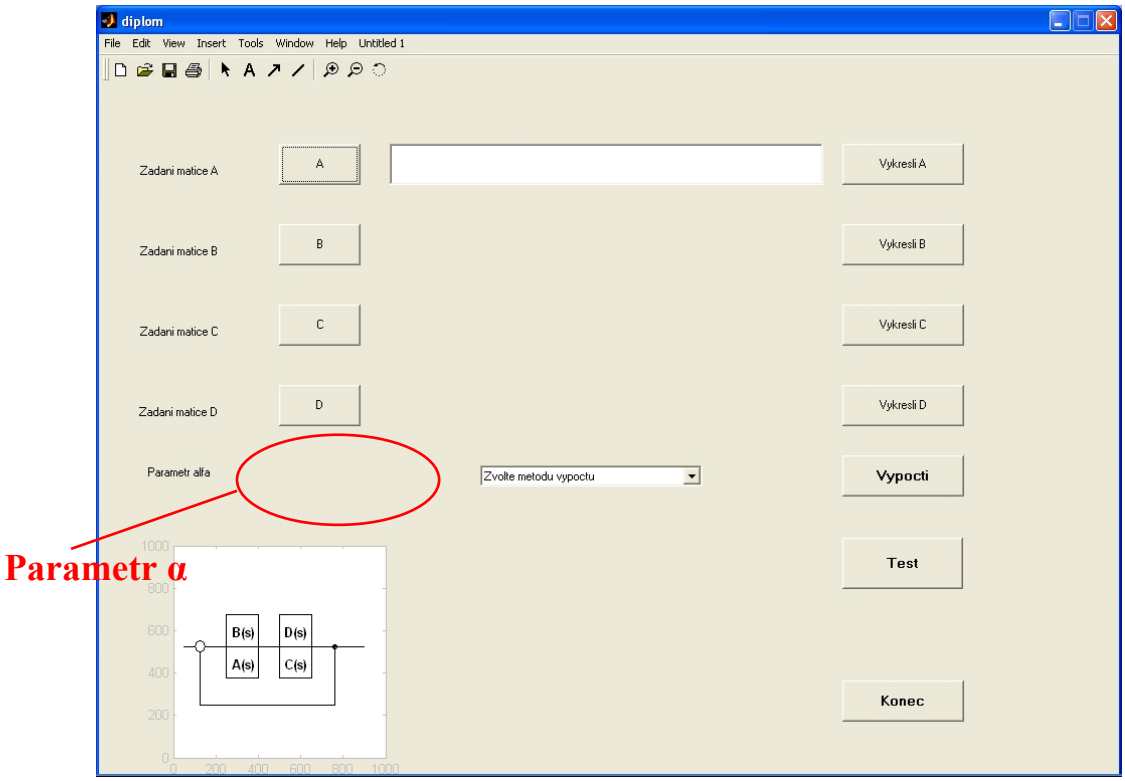
Na obr. 20 je výsledek grafického testu stability pro tento systém.



Obr. 20 Vykreslení množiny hodnot systému pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 0{,}9827$

9 Popis grafického prostředí

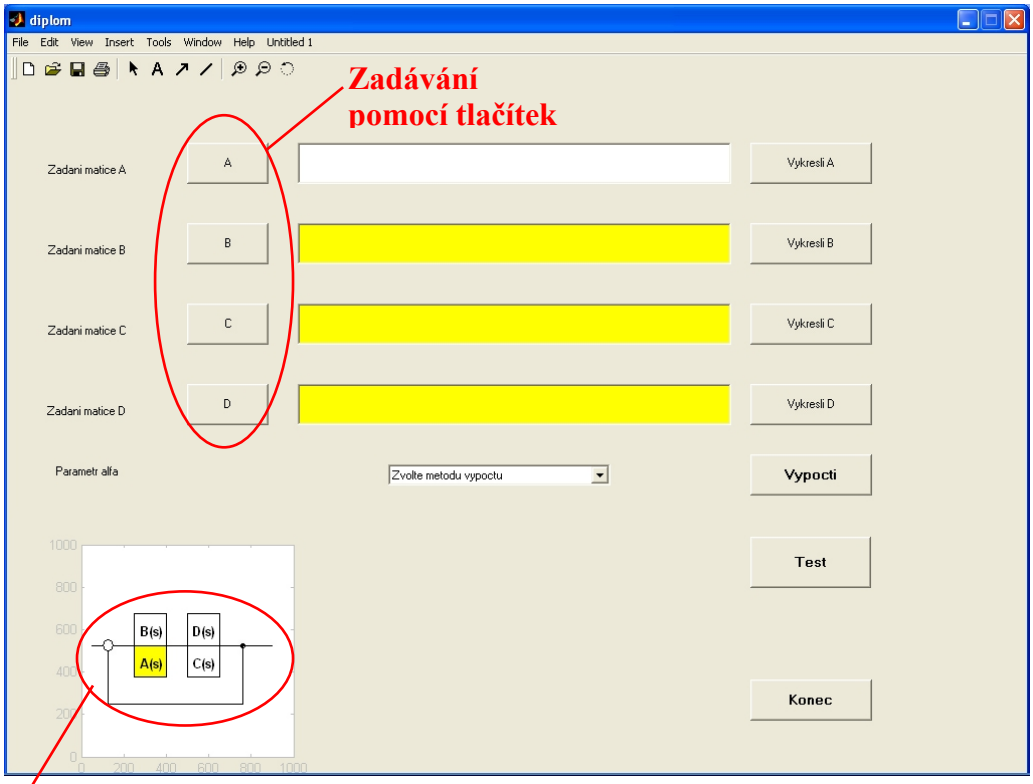
Program se spouští příkazem ***diplom*** z příkazové řádky v Matlabu. Po spuštění se otevře hlavní okno (viz Obr.21), ve kterém je možno zadávat vstupní data jednotlivých přenosových matic systému. Dále se v tomto okně volí metoda výpočtu, včetně spuštění samotného výpočtu. Je zde i možnost vykreslení trojúhelníkových fuzzy funkcí jednotlivých neurčitostí v daných maticích. V levém dolním rohu je obrázek se schématem zapojení zpětnovazebního systému, pomocí tohoto obrázku je také možné zadávat vstupní hodnoty. Důležitým objektem je ***Parametr alfa,*** u kterého se objeví hodnota parametru α po ukončení výpočtu.



Obr. 21 Hlavní okno

9.1 Zadávání vstupních hodnot

V tomto programu je několik možností jak zadávat či editovat vstupní hodnoty programu. Prvním způsobem jak zadávat vstupní hodnoty je pomocí tlačítek ***A,B,C,D.*** Stiskem tlačítka příslušejícího dané matici přenosu systému se aktivuje okno pro psaní vstupních hodnot matice. Toto okno lze také zvolit pomocí obrázku systému a to kliknutím na blok popisem příslušejícím dané matici.



Zadávání pomocí bloků schématu

Obr. 22 Zadávání vstupních dat pro analýzu

9.2 Formát vstupních dat

Velice důležitou věcí, kterou je třeba znát, je správný formát zadávání vstupních dat do maticových oken. Vstupní hodnoty se zadávají jako matice či vektor a to následujícím způsobem:

1. V případě, že přenos neobsahuje neurčitost, bude se do okna pro zadání přenosové matice psát sloupcový vektor a to tak, že se postupuje od nejvyšší mocniny přenosu k mocnině nejnižší.

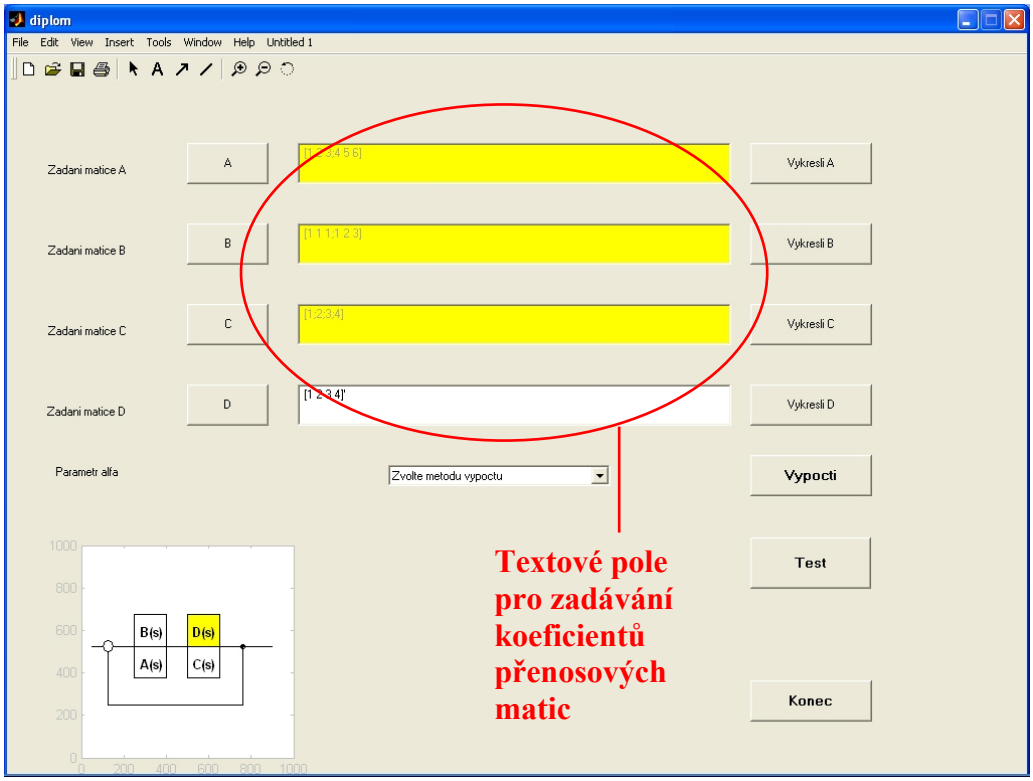
   Př. Pro přenos $A(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$ se zapíše následujícím způsobem

   $A = [1\,;2\,;3\,;4]$ nebo také takto: $A = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]'$

2. V případě, že přenos obsahuje neurčitost, bude se do okna pro zadání přenosové matice psát matice a to tak, že se postupuje od nejvyšší mocniny přenosu k mocnině nejnižší; ty se zapisují do sloupců. V řádcích jsou hodnoty koeficientů daných mocnin a to ve třech sloupcích.

Př. Pro přenos $A(s) = s^3 + q_1 s^2 + 3s + q_2$; $q_1 = tri(1,2,3)$; $q_2 = tri(4,5,6)$ se zapíše následujícím způsobem:

$$A = [1 \quad 1 \quad 1;1 \quad 2 \quad 3;3 \quad 3 \quad 3;4 \quad 5 \quad 6]$$

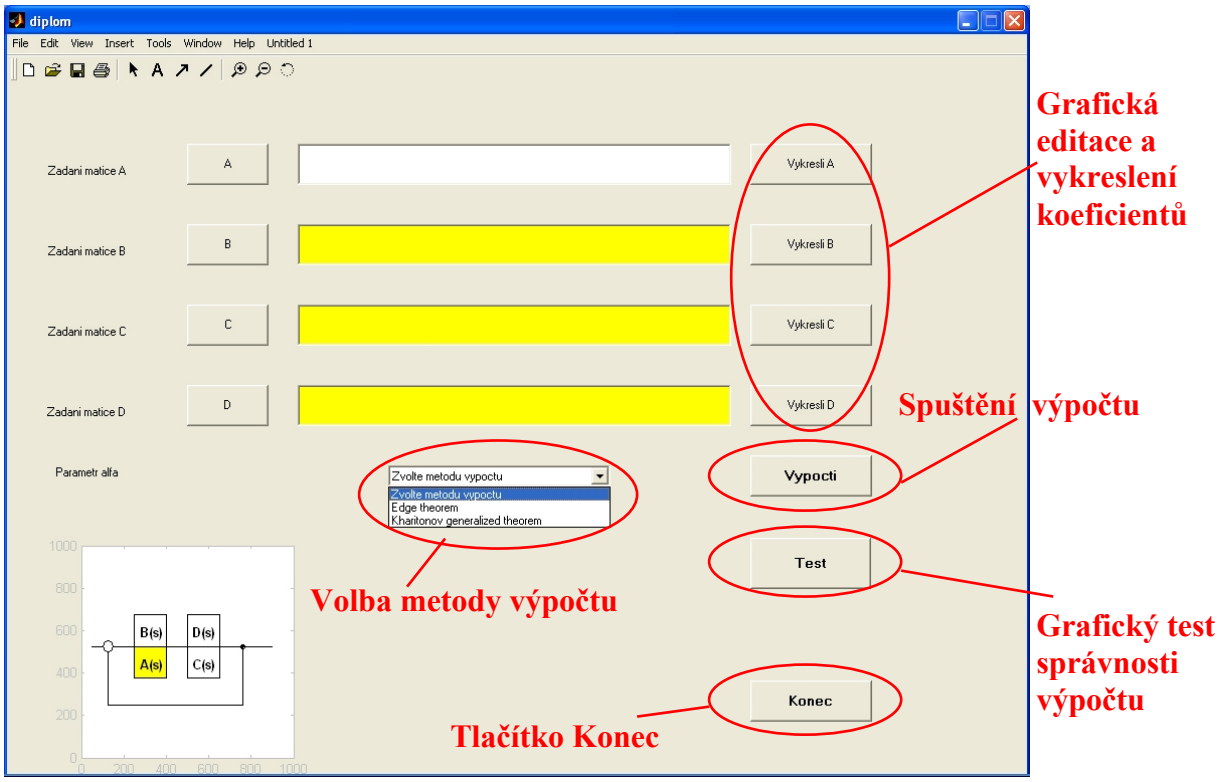


Obr. 23 Formát vstupních dat

9.3 Volba metody výpočtu

V tomto programu máme dvě možnosti pro volbu metody výpočtu a to ***Edge teorém*** tedy metodu testování všech možných hran polytopu, nebo můžeme zvolit ***Generalizovaný Charitonovův teorém (32 hran)*** tedy metodu která testuje pouze maximálně 32 „důležitých“ hran. Volba Edge teorému se vyplatí pouze pro systém obsahující malé množství neurčitostí. Naproti tomu je Generalizovaný Charitonovův teorém složitějším algoritmem než Edge teorém, z čehož vyplývá, že co se týče časové náročnosti neplatí přesně poměry z tabulky Tab. 1. Výhoda Generalizovaného Charitonovova teorému se uplatní pro vyšší počet parametrů.

Volba metody výpočtu se provádí v hlavním okně a to pomocí menu ***Zvolte metodu výpočtu*** viz. Obrázek Obr. 24 .



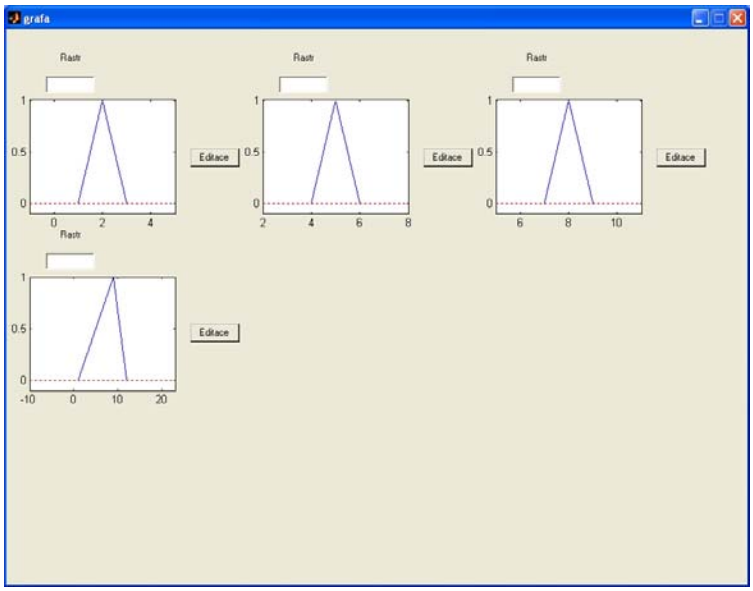
Obr. 24 Ovládací prvky hlavního okna

9.4 Další ovládací prvky

Dalšími ovládacími prvky v hlavním okně viz. Obr. 21 jsou tlačítko pro spuštění výpočtu ***Vypočti***, dále tlačítko pro grafický test výsledku výpočtu ***Test***, tlačítko pro grafickou editaci a vykreslení trojúhelníkových fuzzy funkcí jednotlivých neurčitých koeficientů přenosových matic ***Vykresli A (B, C, D),*** posledním tlačítkem je tlačítko ***Konec***, které slouží k ukončení práce v grafickém prostředí.

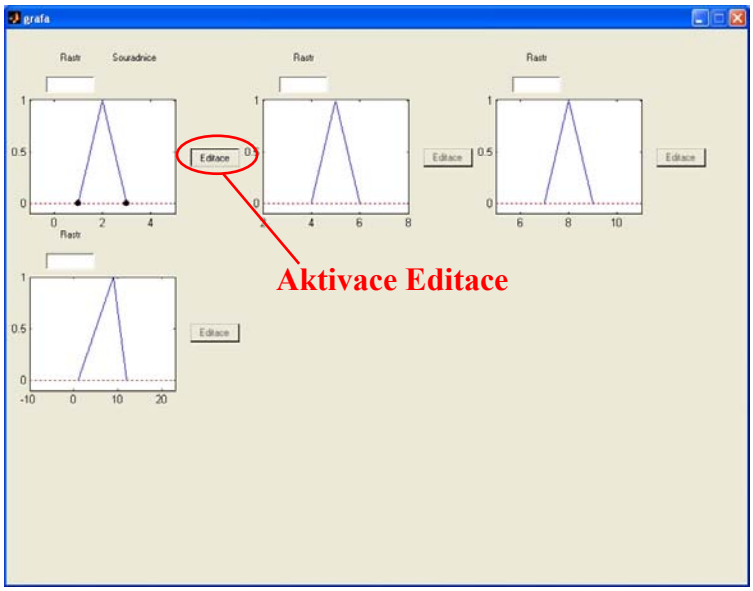
9.5 Editace koeficientů

Koeficienty přenosových matic lze editovat dvěma způsoby. První možností je editace v textovém poli přepsáním hodnot v matici (vektoru). Druhým způsobem je grafická editace a to po stisknutí tlačítek ***Vykresli A (B, C, D)***. po stisku některého z těchto tlačítek se otevře nové okno kde jsou vykresleny všechny trojúhelníkové fuzzy funkce koeficientů dané matice obsahující neurčitost viz. Obr. 25.



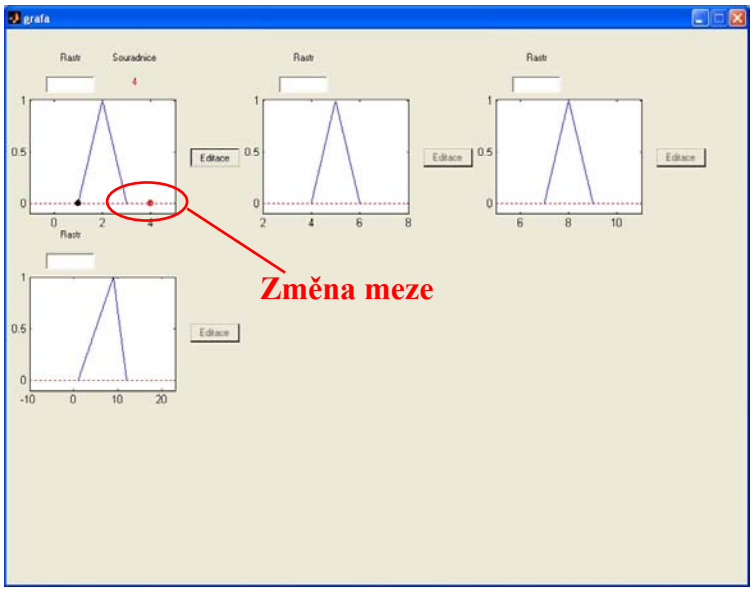
Obr. 25 Okno pro grafickou editaci

V tomto okně lze měnit intervalové meze neurčitosti a to po stisknutí tlačítka ***Editace,*** které je u každého grafu, po stisku tohoto tlačítka se obě intervalové meze vykreslí jako černě zbarvené body.



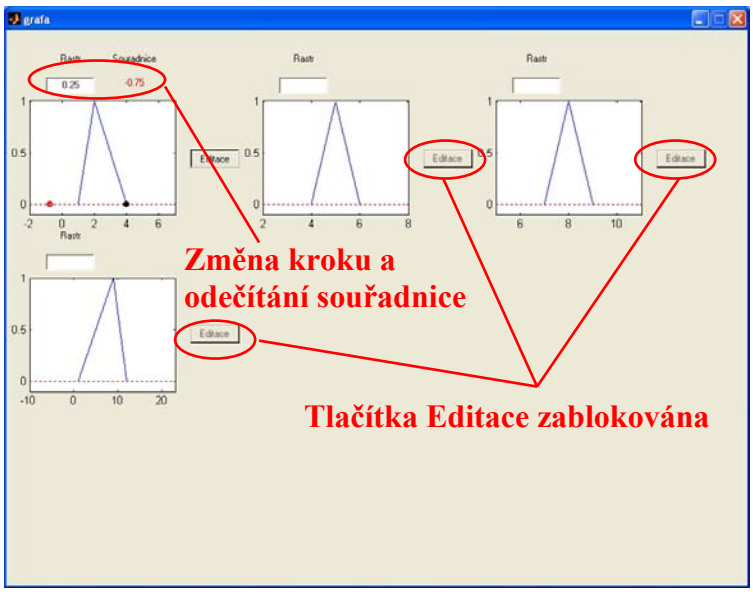
Obr. 26 Aktivace editace

Jestliže chceme bod posunout, najedeme na něj myší a při stisknutém levém tlačítku myši ho posouváme (při vybrání se bod zbarví červeně).



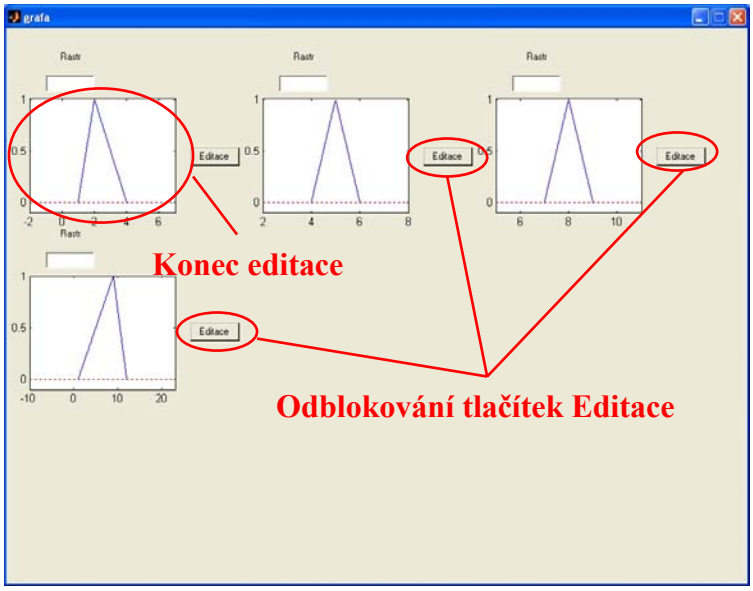
Obr. 27 Výběr meze pro editaci

V případě že nám nevyhovuje krok v souřadnicích, lze tento krok zmenšit či zvětšit v textovém poli ***Rastr***. Abychom měli informace o nové poloze mezí, je zde textové pole ***Souřadnice,*** kde se vypisuje aktuální hodnota meze.



Obr. 28 Změna kroku pro posun meze

Trojúhelníková fuzzy funkce se překreslí až po opětovném stisknutí tlačítka ***Editace***, potom se odblokují tlačítka editace u ostatních grafů, které jsou po dobu editování zablokovány.

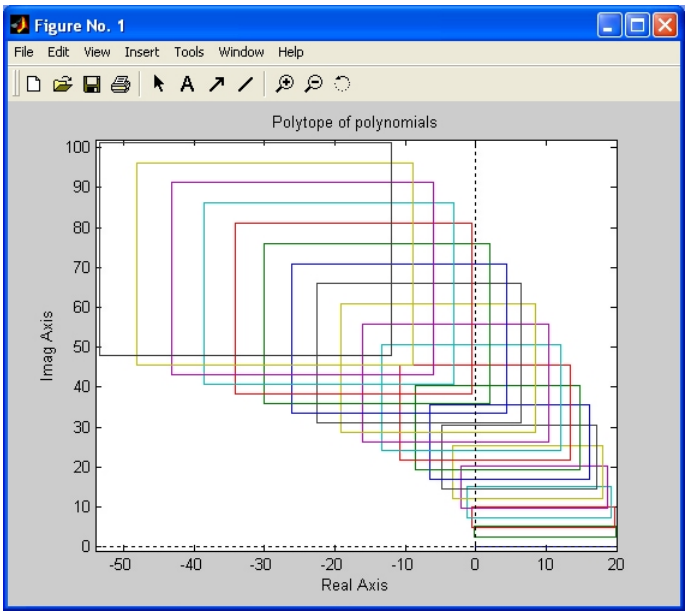


Obr. 29 Ukončení editace

9.6 Grafická kontrola výpočtu

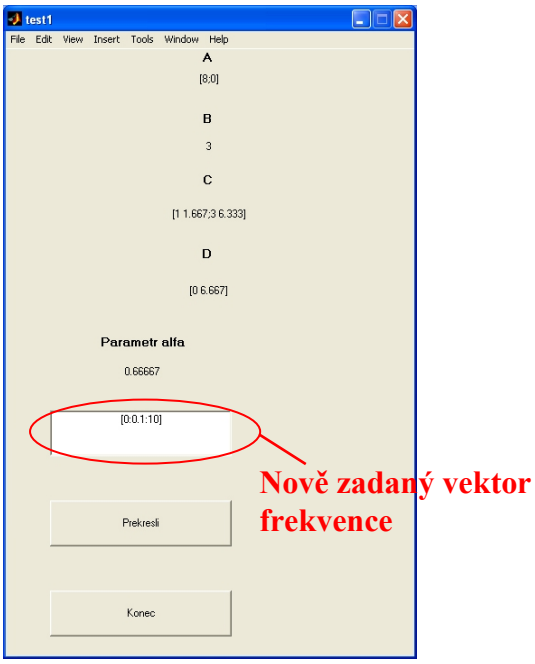
Pro ověření správnosti výpočtu je v tomto prostředí možnost grafické analýzy systému s nově vypočtenými mezemi neurčitosti. Tato analýza se aktivuje v hlavním okně pomocí tlačítka ***Test*** viz. Obr. 24. Po stisku tohoto tlačítka se otevře nové okno viz. Obr. 30 a vykreslí se průběh množiny hodnot v komplexní rovině viz. Obr. 31.

Obr. 30 Okno pro grafickou interpretaci výsledku

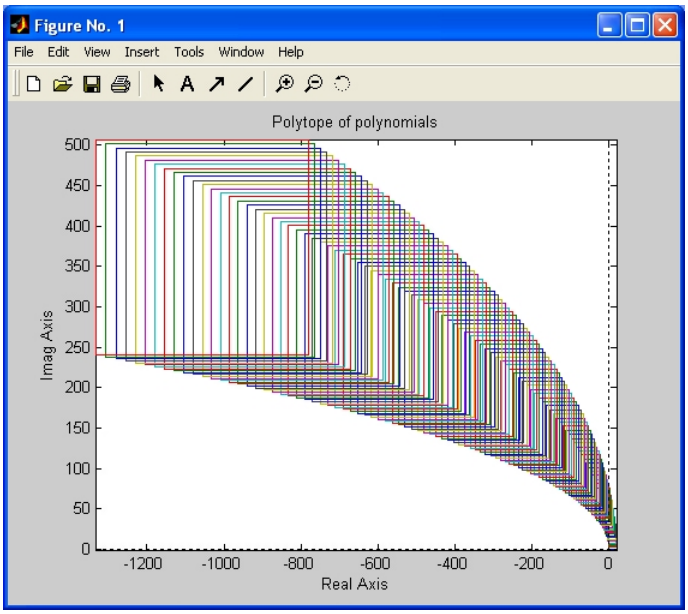


Obr. 31 Graf množiny hodnot výsledného systému

V nově otevřeném okně jsou uvedeny nové hodnoty mezí, vypočtený parametr α, dále je zde možné měnit rozsah frekvence ve kterém je frekvenční charakteristika vykreslena viz. Obr. 33. Po zadání nového rozsahu frekvence je pro překreslení charakteristiky zapotřebí stisknout tlačítko ***Překresli.*** Test lze použít i pro nově zadaný systém, aby se zabránilo zbytečnému zdlouhavému výpočtu v případě, že je celý systém stabilní.



Obr. 32 Změna rozsahu úhlové frekvence



Obr. 33 Graf množiny hodnot po změně úhlové frekvence

10 Testování algoritmů

Testování algoritmů jsem prováděl na různých systémech s měnícím se počtem parametrů neurčitosti, které byly různě rozmístěny v polynomech čitatele a jmenovatele. Při testování jsem se zajímal jak o správný výpočet parametru α tak i o porovnání délky výpočtu pro jednotlivé algoritmy. Výsledky testování jsou uvedeny v tabulce Tab. 2. Počet parametrů neurčitosti v jednotlivých polynomech odpovídá řádu polynomů.

Parametry neurčitosti			**Edge test**	**Generalizovaný Charitonov**
	Počet parametrů neurčitosti	Celkový počet parametrů neurčitosti	Doba výpočtu [s]	Doba výpočtu [s]
Polynom jmenovatele	1	**1**	3,235	52,856
Polynom čitatele	0			
Polynom jmenovatele	2	**2**	45,486	132,24
Polynom čitatele	0			
Polynom jmenovatele	1	**2**	42.521	205,51
Polynom čitatele	1			
Polynom jmenovatele	3	**3**	120,56	180,56
Polynom čitatele	0			
Polynom jmenovatele	2	**3**	89,038	214,28
Polynom čitatele	1			
Polynom jmenovatele	4	**4**	705,19	295,80
Polynom čitatele	0			
Polynom jmenovatele	3	**4**	643,22	303,55
Polynom čitatele	1			
Polynom jmenovatele	2	**4**	555,45	311,63
Polynom čitatele	2			

Tab. 2

Z výsledků v tabulce je zřejmé, že Edge test se vyplatí pro více parametrů neurčitosti (pro více než tři parametry neurčitosti). Pro testování hrany v algoritmech jsem použil vzorkování λ a to pro krok 0,01, výsledky jsou velice přesné i pro vzorkování, při výpočtu s neurčitým λ byly výsledky téměř totožné ovšem čas potřebný pro výpočet byl mnohem větší než pro vzorkované λ. Testování bylo prováděno na PC s následující hardwarovou konfigurací:

	procesor:	Intel Celeron 2,5 GHz
	Paměť RAM:	256 MB
	HDD:	60 GB ; 7200 ot./min.

11 Závěr

Hlavní náplní této práce byla implementace algoritmů pro analýzu robustní stability systémů obsahujících parametrickou neurčitost popsanou fuzzy funkcí. Systém který analyzujeme je složen ze soustavy a regulátoru zapojených do záporné zpětné vazby. Těmito algoritmy byly Edge teorém a generalizovaný Charitonovův teorém. Základním předpokladem pro implementaci těchto algoritmů bylo to, že neurčitost je obsažena pouze v přenosu soustavy, přenos regulátor je konstantní. V mnou navržených algoritmech může být neurčitost obsažena jak v přenosu soustavy tak v přenosu regulátoru s tím, že neurčitost nesmí být nejednou obsažena v polynomech čitatelů (jmenovatelů) jednotlivých přenosů.

K implementovaným algoritmům jsem zároveň naprogramoval grafické prostředí, ve kterém je možno zadávat vstupní data, volit metodu výpočtu, graficky editovat jednotlivé parametry a provádět grafickou kontrolu výpočtu. Této grafické kontroly je možno použít ještě před zahájením výpočtu, aby se zabránilo zbytečně dlouhému výpočtu v případě, že je systém stabilní i s obsaženou neurčitostí. Při testování stability jednotlivých hran jsem použil vzorkování hrany, protože při počítání s neurčitým parametrem hrany λ je výpočet mnohem delší a řešení bylo minimálně odlišné.

Při testování použitých algoritmů jsem porovnával přesnost výpočtu a dobu výpočtu pro tyto algoritmy. Pro testování jsem použil různý počet parametrů neurčitosti a různé rozmístění parametrů neurčitosti v rámci polynomů jednotlivých přenosů. Z výsledků je zřejmé, že Edge test se vyplatí použít pouze u systémů obsahujících maximálně tři parametry neurčitosti pro vyšší počet parametrů neurčitosti se vyplácí použít generalizovaný Charitonovův teorém.

Metoda použití fuzzy funkcí pro popis neurčitosti je velice dobrým způsobem jak řešit například přesnost výroby, kde nám parametr α říká s jakou přesností musí být daný prvek vyroben.

12 Literatura

[1] On-line přednášky předmětu Robustní řízení
URL: <dce.felk.cvut.cz/ror> [cit.2004-10-15]

[2] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat and L. H. Keel. Robust Control: The Parametric Approach. Prentice-Hall, Inc., 1995.

[3] J. Bondia and J. Picó. Analysis of Systems with Variable Parametric Uncertainty Using Fuzzy Functions. In: Proceedings of European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany, 1999.

[4] J. Bondia and J. Picó. Application of Functional Intervals to the Stability Analysis of Fuzzy Linear Systems. In: Proceedings of the 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Konference, Vancouver, Canada, pp. 1337-1342, 2001.

[5] P. Hušek and R. Dvořáková. Robust Stability of Polynomials with Polynomic of Coefficients. In: Proceedings of the 8th IEEE Mediterranean Conference on Control & Automation, Patras, Greece, 2000.

[6] D. Dubios and H. Prade. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, Inc., 1980.