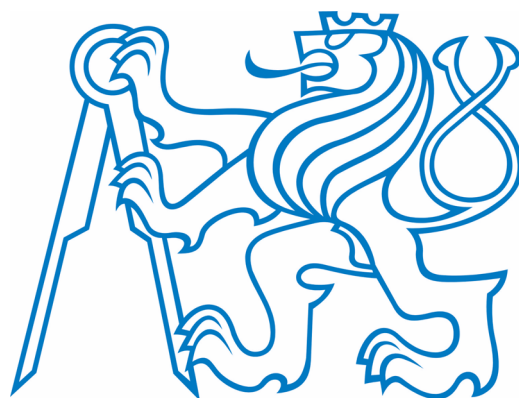


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDÍCÍ TECHNIKY



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Optimální nastavení PID regulátorů

Praha 2008

Adam Chalupa

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Adam Chalupa

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (bakalářský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: **Optimální nastavení PID regulátorů**

Pokyny pro vypracování:

1. Vytvořte soubor procedur pro návrh PID regulátorů, které budou zároveň co nejlépe splňovat požadavky na velikost amplitudové a fázové bezpečnosti, šířku přenášeného pásma a ustálené odchylky.
2. Porovnejte chování navržených regulátorů na systémech s různou dynamikou s PID regulátory navrženými frekvenčními metodami.


Seznam odborné literatury:

G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems, Prentice Hall, 2006

G.P. Liu, S. Daley: Optimal-tuning Controller Design in the Frequency Domain with Application to a Rotary Hydraulic System, Control Engineering Practice, 1999, pp. 821-830

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce zimního semestru 2008/2009


prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry




doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 25. 2. 2008

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 12. června 2008



.....
podpis

Poděkování

Tímto děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Petru Huškovi, Ph.D. za jeho pomoc a za čas, který mi věnoval při zpracování práce.

Abstrakt

Cílem bakalářské práce je navrhnout soubor funkcí, které by mohly být použity k optimálnímu nastavení PID regulátoru. Procedury jsou napsány v programu Matlab a optimalizovány pomocí vnitřních funkcí tohoto programu. Regulátory navržené tímto způsobem jsou následně porovnávány s regulátory, které jsou navržené klasickými frekvenčními metodami. Regulátory jsou aplikovány na systémy různých řádů, na kterých je posuzována kvalita jejich regulace.

Abstract

Objective of this bachelor thesis is to propose a set of procedures that can be utilized for PID controller optimum setup. Procedures are written using the Matlab computer program and optimized by internal Matlab functions. Controllers designed in this way are compared with controllers designed using common frequency methods. Controllers are applied with systems of different dynamics in order to evaluate the quality of their control functionality.

Obsah

KAPITOLA 1	1
1.1 ÚVOD.....	1
KAPITOLA 2	2
2.1 PID REGULÁTORY	2
2.2 NASTAVENÍ PID REGULÁTORU	4
2.3 FREKVENČNÍ METODY NÁVRHU PID REGULÁTORŮ.....	5
2.4 NÁVRH REGULÁTORU PRO ZVOLENOU FÁZOVOU BEZPEČNOST.....	6
KAPITOLA 3	10
3.1 OPTIMÁLNÍ NASTAVENÍ PID REGULÁTORU	10
3.1.1 Amplitudová bezpečnost.....	11
3.1.2 Fázová bezpečnost	12
3.1.3 Přejížděvací frekvence.....	12
3.1.4 Ustálená odchylka na vstupní signál rampa.....	12
3.1.5 Optimalizace	13
3.2 REALIZACE V MATLABU	14
3.2.1 fmincon()	14
3.2.2 fminimax()	14
3.2.3 fi()	15
3.2.4 fi2()	15
3.2.5 main().....	16
KAPITOLA 4	18
4.1 POROVNÁNÍ REGULÁTORŮ	18
4.1.1 Systém 1. řádu.....	18
4.1.2 Systém 2. řádu.....	19
4.1.3 Systém 3. řádu.....	19
4.1.4 Systémy vyšších řádů.....	23
KAPITOLA 5	27
ZÁVĚR	27
LITERATURA.....	29

Kapitola 1

1.1 Úvod

PID regulátor je běžný nástroj používaný v aplikacích průmyslového řízení. Může být použit k regulaci rychlosti, teploty, toku, tlaku a mnoha dalších procesních proměnných.

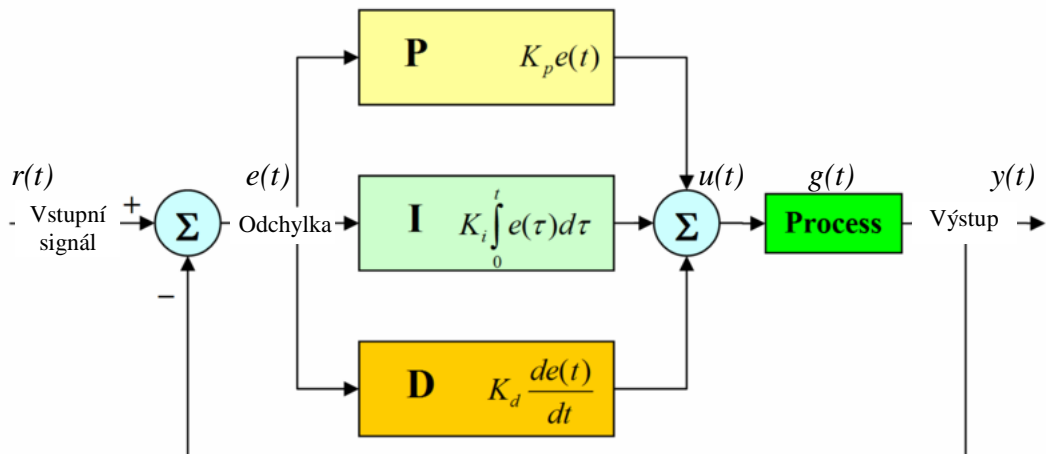
PID regulátory jsou nejběžnější formou zpětné vazby. V současnosti se PID regulace využívá ve více než 95% případech procesního řízení a to ve všech odvětvích, kde je řízení používáno. Své využití si našly jako zařízení čistě mechanické, pneumatické a samozřejmě elektronické.

V posledních letech se používají především číslicové PID regulátory využívající mikroprocesorů. Často jsou kombinovány s logickými obvody, sekvenčními funkcemi, voliči a jednoduchými funkčními bloky k vytvoření složitých automatizačních systémů používaných v energetice, dopravě či průmyslové výrobě.

Bakalářská práce se zabývá optimálním nastavením PID regulátoru. Inspirací k jejímu zrealizování byly články [2][3]. Svou bakalářskou práci jsem rozdělil do pěti kapitol. První kapitola obsahuje stručný úvod do problematiky PID regulátorů a rozvržení celé práce. Druhá část práce rozebírá PID regulátor více dopodrobna a rozebírá i jeho nastavení a standardní metody návrhu. Třetí kapitola je ústřední část mé práce. Zaměřil jsem se v ní na optimální nastavení PID regulátoru, zejména na funkce potřebné k optimalizaci a následnou implementaci v Matlabu. Ve čtvrté kapitole porovnávám vlastnosti regulátorů nastavených optimalizací s regulátory navrženými klasickými frekvenčními metodami. V závěrečné, páté kapitole se zabývám zhodnocením práce.

Kapitola 2

2.1 PID regulátory



Obr. 2.1 – Schéma zapojení PID regulátoru ve zpětné vazbě

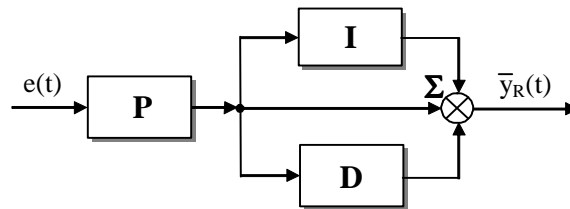
PID regulátory se snaží korigovat odchylku mezi aktuálním stavem řízeného procesu a žádaným ustáleným stavem. PID je zkratka pro 3 hlavní složky regulátoru – P-proporcionální, I-integrační a D-derivační. Regulační algoritmus (Obr. 2.1) můžeme popsat vztahem (2.1), kde K_p je zesílení proporcionální složky, K_i je zesílení integrační složky, K_d je zesílení derivační složky a $e(t)$ je regulační odchylka.

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Pokud tento výraz převedeme do Laplaceovy transformace a odchylku $e(t)$ převedeme na pravou stranu rovnice, dostaneme přenos pro PID regulátor ve tvaru (2.2), který dále používám jako obecný tvar ve své bakalářské práci.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \cdot s + K_d \cdot \frac{1}{s} \quad (2.2)$$

Zapojení na Obr. 2.1, které používám ve své bakalářské práci, však není jediným možným zapojením PID. Existuje např. zapojení s předsazenou proporcionální složkou (viz Obr.2.2) a mnoho dalších.



Obr. 2.2 – Schéma zapojení PID regulátoru s předsazenou P – složkou.

Nyní bych se blíže podíval, jaký vliv mají jednotlivé složky PID na systém.

P – Proporcionální složka je přímo úměrná regulační odchylce $e(t)$. Vysoké proporcionální zesílení nám zaručí velkou změnu na výstupu při změně odchylky. Příliš velká proporcionální složka však může způsobit nestabilitu systému.

I – Integrovaná složka není závislá pouze na velikosti odchylky, ale také na době jejího trvání. Přítomnost integrovaná složky způsobuje nulovou ustálenou regulační odchylku. Se zvětšováním integrovaná složky roste i riziko vzniku oscilací. V souvislosti s integrovaná složkou by bylo dobré zmínit tzv. windup. K windupu dochází ve chvíli, kdy řídicí signál už neroste, saturuje, ale výstup integrovaná složky se nadále zvyšuje. Když se pak změní znaménko regulační odchylky, začne opět klesat, ale trvá dlouho, než se dostane pod úroveň saturace. Důsledkem je velký překmit a špatná přechodová charakteristika.

D – Derivační složka ovlivňuje rychlost změny na výstupu regulátoru. Tento efekt je významný v blízkosti žádané hodnoty, jelikož díky němu můžeme zmenšit překmit. Nevýhodou je, že derivací signálu zesílíme i šum, což může vést až k nestabilitě systému. Tomuto efektu můžeme zabránit frekvenčním omezením, které nám sníží zesílení na vysokých frekvencích. Např. přidáním filtru typu dolní propust.

Celý zpětnovazební systém můžeme popsat rovnicí:

$$Y(s) = G(s).U(s) = G(s).C(s).E(s) = G(s).C(s).[R(s) - Y(s)] \quad (2.3)$$

kde $Y(s)$ je Laplaceův obraz výstupu, $R(s)$ Laplaceův obraz vstupního signálu, $G(s)$ je přenos regulované soustavy a $C(s)$ je přenos regulátoru.

Jednoduchou úpravou pak dostáváme známý přenos pro zpětnovazební systém:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s).C(s)}{1 + G(s).C(s)} \quad (2.4)$$

2.2 Nastavení PID regulátoru

V této podkapitole bych rád zmínil a stručně popsal nejpoužívanější metody k nastavení PID regulátoru.

První metodou je Ziegler-Nicholsovo pravidlo (1942). Toto a jemu podobná pravidla nám pomohou pomocí jednoduchých formulí nastavit náš PID regulátor. Říká nám, že máme zvyšovat zesílení proporcionální složky až do chvíle, kdy dosáhneme tzv. kritického zesílení K_c , při kterém výstup systému začne oscilovat. Poté je toto kritické zesílení společně s periodou kmitání P_c použito k dopočítání konstant regulátoru pomocí formulí (2.5) (použil jsem z [10]).

$$K_p = 0,6.K_c \quad , \quad K_i = 2.\frac{K_p}{P_c} \quad , \quad K_d = \frac{K_p.P_c}{8} \quad (2.5)$$

Často nám PID regulátor nastavený těmito metodami neposkytuje v uzavřené smyčce uspokojivou odezvu a výstup kmitá.

Druhou z možností, jak nastavit regulátor, je tzv. metoda pokusů a omylů (v angličtině trial-and-error). Funguje tak, že si zobrazíme přechodovou charakteristiku uzavřené smyčky a po letmém pohledu na charakteristiku ladíme regulátor stylem: „pokud je to pomalé, zvýším proporcionální zesílení, pokud mám nenulovou odchylku v ustáleném stavu, zvednu hodnotu integrační složky,

pokud mi výsledný systém moc kmitá, zvýším derivační složku.“ Výhodou této metody je, že k ní nepotřebujeme žádnou matematiku a že okamžitě vidíme, co změna konstant dělá s přechodovou charakteristikou.

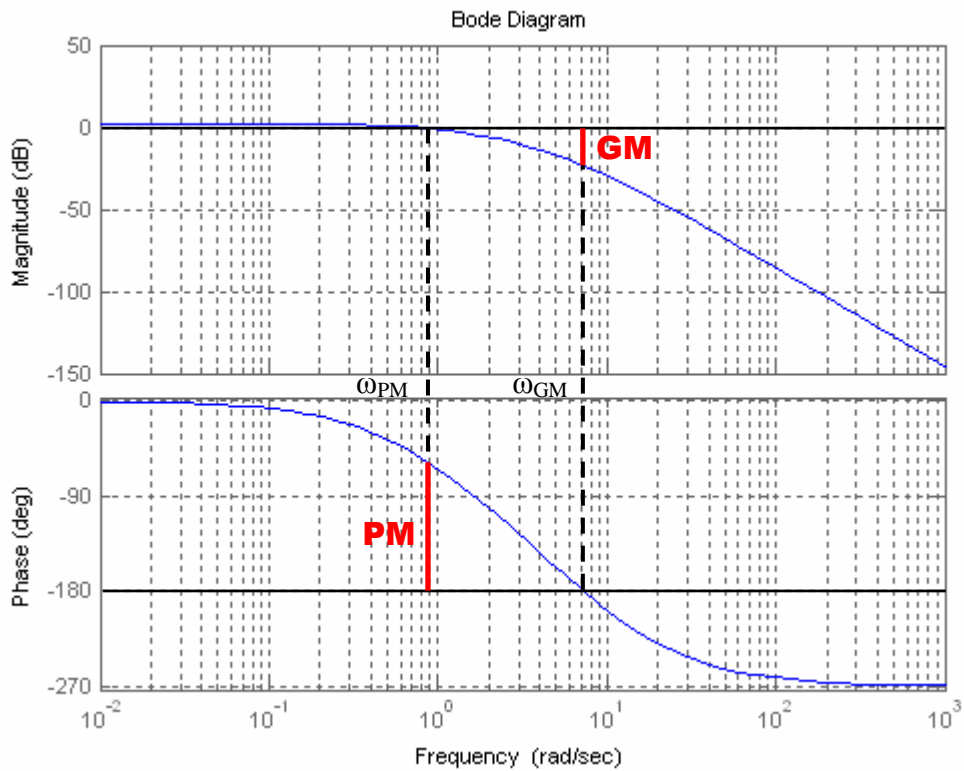
2.3 Frekvenční metody návrhu PID regulátorů

Ačkoliv pro metody typu Ziegler-Nichols atp. existují i jednoduchá pravidla využívající měření z jednoho až dvou bodů frekvenční charakteristiky, kvalita jejich regulace nemusí splňovat naše požadavky. Frekvenčními metodami návrhu se pokoušíme upravit frekvenční charakteristiku systému v otevřené smyčce, tak abychom dosáhli požadovaného tvaru frekvenční charakteristiky v uzavřené smyčce. Podmínkou pro úspěch těchto návrhů je, že řízený systém musí být stabilní.

Ve frekvenční oblasti jsou užívány dvě veličiny, kterými můžeme měřit mez stability systému. První je amplitudová bezpečnost (GM – gain margin), která říká, kolikrát se ještě může zvětšit zesílení v otevřené smyčce než se zpětnovazební systém dostane na mez stability. Tou druhou je fázová bezpečnost (PM – phase margin), která udává, o jak velkou fázi můžeme zpozdít vstupní signál než systém dosáhne -180° při jednotkovém zesílení a zpětnovazební systém se tak dostane na hranici stability. (viz Obr. 2.2). Má-li být systém stabilní, musí být fázová bezpečnost kladná.

Mimo zajištění stability by měl náš systém také vyhovovat požadavkům z hlediska rychlosti odezvy. Určujícím parametrem bývá v tomto případě šířka propustného pásma (ω_{BW}), což je frekvence, na níž poklesne zesílení o 3dB oproti zesílení na nízkých frekvencích. Širší propustné pásmo znamená kratší dobu náběhu, ale na druhou stranu i citlivost systému na vysokofrekvenční rušení.

Měřítkem kvality regulace je také velikost regulační odchylky v ustáleném stavu.



Obr. 2.3 - Fázová a amplitudová bezpečnost

2.4 Návrh regulátoru pro zvolenou fázovou bezpečnost

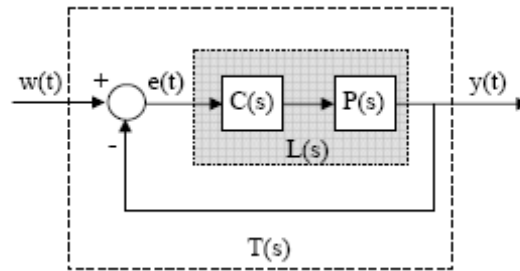
Fázová bezpečnost se při návrhu frekvenčními metodami užívá nejčastěji, protože neurčitost způsobená nelinearitami a zpožděními spíše ovlivňuje fázi než amplitudu.

Máme přenos řízeného systému $P(s)$, přenos regulátoru $C(s)$, přenos otevřené smyčky $L(s) = C(s) \cdot P(s)$ a přenos uzavřené smyčky, mezi nímž a přenosem otevřené smyčky je jednoznačný vztah (2.6).

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (2.6)$$

Přenos $C(s)$ můžeme vyjádřit vztahem (2.7) (použil jsem z článku [4]).

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = \frac{K_d}{s} \left(s^2 + \frac{K_p}{K_d} \cdot s + \frac{K_i}{K_d} \right) = \frac{K_d}{s} \cdot (s + \omega_i) \cdot (s + \omega_d) = \frac{K_d}{s} [s^2 + (\omega_i + \omega_d) \cdot s + \omega_i \cdot \omega_d] \quad (2.7)$$



Obr. 2.4 – Uzavřená smyčka

Z toho plynou vztahy mezi zlomovými frekvencemi a zesílením jednotlivých složek regulátoru (2.8).

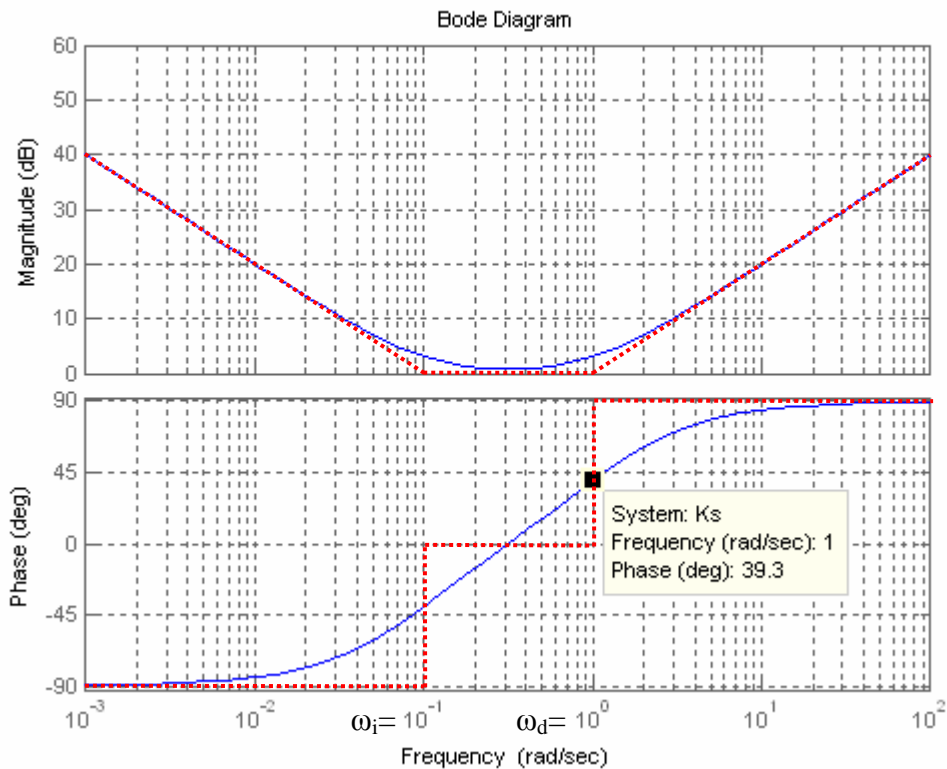
$$\frac{K_p}{K_d} = \omega_i + \omega_d \quad , \quad \frac{K_i}{K_d} = \omega_i \cdot \omega_d \quad (2.8)$$

Parametr ω_d volíme shodný se zatím neznámou frekvencí ω_{PM} , na které budeme odečítat fázovou bezpečnost výsledného přenosu otevřené smyčky. Volíme $\omega_d = \omega_{PM}$. Na této frekvenci zvýší derivační složka fázi systému o 45° .

Frekvenci ω_i volíme takovou, aby se vliv integrační korekce na frekvenci ω_d téměř neprojevil, typicky $\omega_i = 0,1 \cdot \omega_d$.

Na frekvenci ω_d by regulátor v případě absence integrační složky zvýšil fázi systému o 45° . Jak je patrné z frekvenční charakteristiky PID regulátoru (Obr. 2.4) integrační složka pro $\omega_d = 10 \cdot \omega_i$ způsobí úbytek nárůstu o $5,7^\circ$, a proto se fáze systému zvýší jen o $39,3^\circ$. Viz vztah (2.9), kde $\arg(L(j\omega_d))$ je fáze otevřené smyčky na frekvenci ω_d , $\arg(P(j\omega_d))$ je fáze řízeného systému na frekvenci ω_d a $\arg(C(j\omega_d))$ je fáze regulátoru na frekvenci ω_d .

$$\arg(L(j\omega_d)) = \arg(P(j\omega_d)) + \arg(C(j\omega_d)) = \arg(P(j\omega_d)) + 39,3^\circ \quad (2.9)$$



Obr. 2.5 – Frekvenční charakteristika PID regulátoru

Z Obr 2.2 je patrné, že fázová bezpečnost PM je definována výrazem (2.10).

$$-180^\circ + PM = \arg(L(j\omega_D)) \quad (2.10)$$

Tudíž kombinací vztahů (2.9) a (2.10) získáme (2.11)

$$\arg(P(j\omega_D)) = -180^\circ + PM - 39,3^\circ \quad (2.11)$$

Neznámou frekvenci ω_d tedy najdeme na frekvenční charakteristice řízeného systému $P(s)$ v místě, kde jeho fáze prochází $(PM - 219,3^\circ)$, kde PM je námi požadovaná fázová bezpečnost.

Dále víme, že na frekvenci ω_d , kde měříme fázovou bezpečnost, by mělo být zesílení systému v otevřené smyčce jednotkové. Z tohoto předpokladu a předpokladu, že $\omega_i = 0,1 \cdot \omega_d$ můžeme odvodit výpočet konstanty K_d . (2.12 a 2.13)

$$\begin{aligned}
|L(j\omega_D)| &= |P(j\omega_D)| \cdot |C(j\omega_D)| = \\
&= |P(j\omega_D)| \left| \frac{K_d}{j\omega_d} \cdot (j\omega_d + \omega_i) \cdot (j\omega_d + \omega_d) \right| = \\
&= |P(j\omega_D)| \left| \frac{K_d}{j\omega_d} \cdot (j\omega_d + 0,1 \cdot \omega_d) \cdot (j\omega_d + \omega_d) \right| = \\
&= |P(j\omega_D)| \cdot \frac{K_d}{\omega_d} \cdot \omega_d \sqrt{1,01} \cdot \omega_d \sqrt{2} = K_d \omega_d \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)| = 1
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Po zaokrouhlení $\sqrt{1,01} \cong 1$ dostaneme ze vztahu (2.12) vztah (2.13)

$$K_d = \frac{1}{\omega_d \sqrt{2} \cdot |P(j\omega_D)|} \tag{2.13}$$

Poté při využití vztahu (2.8) dostaneme vztahy pro ostatní konstanty regulátoru.

$$K_p = 1,1 \cdot \omega_d \cdot K_d \quad , \quad K_i = 0,1 \cdot K_d \cdot \omega_d^2 \tag{2.14}$$

Kapitola 3

3.1 Optimální nastavení PID regulátoru

V této kapitole se budu věnovat optimálnímu nastavení PID regulátoru. Je to stěžejní část mé práce. Inspirací mi byly články [2][3].

Návrh optimálně nastaveného PID regulátoru je realizován ve frekvenční oblasti. Můj návrh optimálně nastaveného regulátoru nepracuje pouze s fázovou bezpečností (případně jiným, ale vždy jen jedním parametrem) jako v případě frekvenčních metod, ale zohledňuje najednou fázovou (PM) a amplitudovou bezpečnost (GM), přechodovou frekvenci ω_c^1 , a velikost ustálené odchylky na vstupní signál rampa² (e_{ramp}). Zde jsem se odchýlil od původní myšlenky autorů článků [2][3], neboť oni ve svých návrzích použili ustálenou regulační odchylku odezvy na jednotkový skok (steady-state error). Jelikož nám ale každý PID regulátor, jehož integrační složka je nenulová, zajistí, že je tato odchylka nulová, zvolil jsem odchylku od rampy.

Nyní je potřeba stanovit funkce, do kterých bude Matlab při optimalizaci dosazovat parametry PID. Celkem budou 4 (pro amplitudovou bezpečnost, fázovou bezpečnost, přechodovou frekvenci a ustálenou odchylku na rampu). Tyto funkce by v ideálním případě měly být rovné nule ($GM=\infty$, $PM=180^\circ$, $\omega_c=\infty$, $e_{\text{ramp}}=0$).

Při každém návrhu si volíme přenos řízeného systému $G(s)$ (potažmo $G(j\omega)$ pro Bodeho tvar přenosu), požadované hodnoty amplitudové bezpečnosti $GM_{\text{ŽÁD}}$, fázové bezpečnosti $PM_{\text{ŽÁD}}$, přechodové frekvence $\omega_{c_ŽÁD}$ a ustálené odchylky na rampu $e_{\text{ramp_ŽÁD}}$. Přenos regulátoru je tvořen dle vztahu (3.1) z konstant PID, které při optimalizaci dosazuje Matlab.

$$K(j\omega) = K_p + K_i \cdot j\omega + \frac{K_d}{j\omega} \quad (3.1)$$

¹ Přechodová frekvence je frekvence, kdy amplitudová charakteristika prochází $0\text{dB} = 1$, její velikost ovlivňuje dobu náběhu (rise-time).

² Rampa je signál, který můžeme popsat funkcí $f(t) = t$

$$\phi_1(K_p, K_i, K_d) = \left\{ \frac{GM_{\check{Z}AD}}{1}, \angle K(j\omega_{GM}).G(j\omega_{GM}) = -180^\circ \right\} \quad (3.2)$$

$$\phi_2(K_p, K_i, K_d) = \left\{ \frac{\angle K(j\omega_{PM}).G(j\omega_{PM})}{-180 + PM_{\check{Z}AD}}, |K(j\omega_{PM}).G(j\omega_{PM})| = 1 \right\} \quad (3.3)$$

$$\phi_3(K_p, K_i, K_d) = \left\{ \frac{\omega_{c-\check{Z}AD}}{\omega_{PM}}, |K(j\omega_{PM}).G(j\omega_{PM})| = 1 \right\} \quad (3.4)$$

$$\phi_4(K_p, K_i, K_d) = \frac{1}{e_{ramp-\check{Z}AD} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} s.K(s).G(s)} \quad (3.5)$$

3.1.1 Amplitudová bezpečnost

Pro výpočet amplitudové bezpečnosti je určena funkce Φ_1 (3.2). Podmínka funkce nám říká, že frekvenci ω_{GM} , se kterou počítáme, odečítáme na frekvenční charakteristice tam, kde fázová charakteristika prochází -180° . Mezi amplitudovou bezpečností a zesílením otevřené smyčky na této frekvenci ω_{GM} je vztah (3.6).

$$GM = \frac{1}{|K(j\omega_{GM}).G(j\omega_{GM})|} \quad (3.6)$$

Proto je vlastně funkce Φ_1 (3.2) podílem žádané amplitudové bezpečnosti a amplitudové bezpečnosti otevřené smyčky pro daný přenos řízeného systému a daný regulátor.

3.1.2 Fázová bezpečnost

Fázovou bezpečnost zohledňuje funkce Φ_2 (3.3). Podmínka této funkce nám říká, že frekvenci ω_{PM} odečteme na frekvenční charakteristice, v místě, kde amplitudová charakteristika prochází 1 (0dB). V této funkci není počítána přímo amplitudová charakteristika, nýbrž fáze otevřené smyčky. Vztah (3.7) nám uvádí souvislost mezi fázovou bezpečností a fází otevřené smyčky při frekvenci ω_{PM} .

$$\angle K(j\omega_{PM}).G(j\omega_{PM}) = -180^\circ + PM \quad (3.7)$$

Fáze otevřené smyčky nabývá hodnot z intervalu $(-360^\circ, 0^\circ)$. Tudíž pro co největší fázovou bezpečnost potřebujeme, aby fáze $\angle K(j\omega_{PM}).G(j\omega_{PM})$ byla co nejbližší nule. Výraz v čitateli funkce (3.3) je přepočítaná požadovaná fázová bezpečnost na fázi, jakou by měl systém s danou PM.

3.1.3 Přechodová frekvence

Požadavek zajistit co největší přechodovou frekvenci ω_c plní funkce Φ_3 (3.4). Přechodová frekvence ω_c je definovaná jako frekvence, při které je zesílení otevřené smyčky jednotkové ($|K(j\omega).G(j\omega)|=1$). Jak je vidět, je to stejná frekvence jako ta, na které se měří fázová bezpečnost, a proto jsem tuto frekvenci označil ω_{GM} , stejně jako ve (3.3).

3.1.4 Ustálená odchylka na vstupní signál rampa

K výpočtu ustálené odchylky na rampu se používá vztah (3.8).

$$e_{ramp} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s.K(s).G(s)} \quad (3.8)$$

O minimalizaci této odchylky se stará funkce Φ_4 (3.5). Za předpokladu, že je přenos řízeného systému ve tvaru (3.9) a přenos regulátoru ve tvaru (2.2), můžeme pro jednodušší výpočet odchylky na rampu odvodit vztah (3.10).

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} e_{ramp} &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (K_i + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s) \cdot \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} (K_p \cdot s + K_i + K_d \cdot s^2) \cdot \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}} = \frac{1}{K_i \cdot \frac{b_0}{a_0}} = \frac{a_0}{K_i \cdot b_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Díky tomu mohu funkci (3.5) vyjádřit jednodušším vztahem (3.11).

$$\phi_4(K_p, K_i, K_d) = \frac{a_0}{e_{ramp_žAD} \cdot K_i \cdot b_0} \quad (3.11)$$

3.1.5 Optimalizace

Nyní máme definovány 4 funkce, které jsou v ideálním případě rovny 0, a pokud se vypočítaná hodnota parametru shoduje s hodnotou žádaného parametru, jsou rovny 1.

Naším cílem bude minimalizovat tyto funkce. Toho docílíme některou z optimalizačních funkcí v Matlabu. Tato optimalizační funkce bude podle určitého algoritmu vybírat konstanty PID a dosazovat je do optimalizované funkce Φ (ve tvaru 3.12 nebo 3.13). Výsledkem optimalizace by měly být ony 3 konstanty PID, pro které má optimalizovaná funkce Φ nejmenší hodnotu. Nabízejí se nám 2 možnosti. Buď můžeme minimalizovat tyto 4 funkce jako celek, což znamená že výsledná funkce, která se bude optimalizovat, bude váženým součtem funkcí (3.2-3.5) a bude dána vztahem (3.12) kde w_1 až w_4 jsou váhové koeficienty pro každou z funkcí Φ_1 až Φ_4 .

$$\phi(K_p, K_i, K_d) = w_1 \cdot \phi_1 + w_2 \cdot \phi_2 + w_3 \cdot \phi_3 + w_4 \cdot \phi_4 \quad (3.12)$$

Vah je zde použito z toho důvodu, abychom při optimalizaci mohli jasně určit, na které z parametrů bude třeba při optimalizaci klást důraz.

Druhou možností optimalizace je, že budeme minimalizovat každou z funkcí (3.2-3.5) zvlášť. Tudíž výstupem výsledné funkce bude vektor (3.13).

$$\phi(K_p, K_i, K_d) = [w_1 \cdot \phi_1, w_2 \cdot \phi_2, w_3 \cdot \phi_3, w_4 \cdot \phi_4] \quad (3.13)$$

3.2 Realizace v Matlabu

V Matlabu je pro optimalizaci využito optimalizačních funkcí z optimalizačního toolboxu. Optimalizační toolbox nám nabízí 2 optimalizační funkce, které se zdají být využitelné: `fmincon()` a `fminimax()`.

3.2.1 `fmincon()`

Tato funkce se snaží najít vázané minimum¹ skalární funkce několika proměnných a vychází z počátečního odhadu. Obecně je funkce `fmincon()` nazývána vázanou nelineární optimalizací. Hodnota vrácená optimalizovanou funkcí pak vypadá dle vztahu (3.11). Optimalizuje se tedy pouze jediné číslo, dané váženým součtem výstupu všech funkcí. Nevýhodou této metody může být, že se velmi dobře minimalizují tři funkce, ale je toho dosaženo na úkor čtvrté.

3.2.2 `fminimax()`

Tato funkce se aplikuje na soustavu funkcí více proměnných a minimalizuje hodnotu nejhoršího případu z těchto funkcí. Stejně jako `fmincon()` začíná v počátečním odhadu dodaném uživatelem. Této funkci se obvykle říká minimax problém. Optimalizovaná funkce pro `fminimax()` vrací vektor

¹ Vázané minimum musí vyhovovat dodatečné podmínce zadané rovnicí $g(x,y,z) = 0$,

dle vztahu (3.12). Funkce `fminimax()` pak z tohoto vektoru vybírá vždy tu největší složku, kterou se pokouší minimalizovat.

3.2.3 `fi()`

Optimalizovanou funkci jsem nazval ve svém programu `fi()`. Tato funkce dostává jako parametr vektor s třemi konstantami (K_p, K_i, K_d). Z těchto konstant vytvoří přenos regulátoru podle rovnice (2.2). V kódu funkce se zadává přenos řízeného systému, který je ve tvaru (3.9). Tento přenos se zadává pomocí vektoru pro čitatele ve tvaru ($b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$) a vektoru pro jmenovatele ve tvaru ($a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$). Dále se zadávají požadované parametry $GM_{\dot{z}AD}$, $PM_{\dot{z}AD}$, ω_{c_zAD} a e_{ramp_zAD} a jednotlivé váhové koeficienty pro každý z parametrů.

Následně se pomocí vnitřní funkce Matlabu `margin()` vypočítají hodnoty frekvencí ω_{GM} a ω_{PM} pro otevřenou smyčku. Tyto frekvence jsou následně dosazeny do funkcí (3.2)-(3.5). Pro výpočet amplitudy otevřené smyčky je v mém programu použita funkce `abs()` a pro výpočet fáze funkce `angle()`. Funkce `angle` vrací hodnotu fáze (argumentu komplexního čísla) v radiánech, a proto bylo potřeba tuto hodnotu převést na stupně.

Funkce (3.4) je v mém programu jednoduše realizována jako podíl žádané ω_{c_zAD} a ω_{PM} , vypočtené funkcí `margin()`.

Funkce zohledňující ustálenou odchylku na rampu je v programu počítána dle (3.11).

3.2.4 `fi2()`

Funkci `fi2()` jsem vytvořil jako rozšíření funkce `fi()`. Na rozdíl od ní pracuje s parametry uzavřené smyčky a je vylepšená o pátý parametr, kterým je šířka propustného pásma. Funkce zadané vztahy (3.2)-(3.5) jsem zjednodušil a rozšířil o funkci Φ_5 viz vztahy (3.14)-(3.18). Místo ustálené odchylky na vstupní signál rampa je ve `fi2()` počítáno s ustálenou regulační odchylkou (na jednotkový skok). Vztah (3.17) vychází z přenosu uzavřené smyčky ve tvaru

(3.9), kde podíl b_0/a_0 je zesílení uzavřené smyčky (mělo by být rovné 1 pro nulovou ustálenou regulační odchylku).

$$\phi_1(K_p, K_i, K_d) = \frac{GM_{\text{ŽÁD}}}{GM_{CL}} \quad (3.14)$$

$$\phi_2(K_p, K_i, K_d) = \frac{PM_{\text{ŽÁD}}}{PM_{CL}} \quad (3.15)$$

$$\phi_3(K_p, K_i, K_d) = \frac{\omega_{c_ŽÁD}}{\omega_{PM_CL}} \quad (3.16)$$

$$\phi_4(K_p, K_i, K_d) = 1 - \frac{b_0}{a_0} \quad (3.17)$$

$$\phi_5(K_p, K_i, K_d) = \frac{\omega_{BW_ŽÁD}}{\omega_{BW_CL}} \quad (3.18)$$

Kód funkce je podobný funkci `fi()` s rozdílem, že žádanými parametry jsou $GM_{\text{ŽÁD}}$, $PM_{\text{ŽÁD}}$, $\omega_{BW_ŽÁD}$ a $\omega_{c_ŽÁD}$ pro uzavřenou smyčku. Pátým parametrem je ustálená regulační odchylka na vstupní signál tvaru jednotkového skoku. Tuto odchylku se snažíme minimalizovat.

Funkce `fi2()` používá podobně jako v předchozím případě funkci `margin()` ke zjištění amplitudové bezpečnosti v uzavřené smyčce GM_{CL} , fázové bezpečnosti v uzavřené smyčce PM_{CL} a přechodové frekvence v uzavřené smyčce ω_{PM_CL} . Šířka propustného pásma ω_{BW_CL} v uzavřené smyčce je počítána funkcí Matlabu `bandwidth()`. U Φ_2 je ošetřena situace, kdy je PM_{CL} záporné a tudíž uzavřená smyčka je nestabilní. V takovém případě je Φ_2 rovno velkému kladnému číslu.

3.2.5 `main()`

Funkci `main()` jsem vytvořil pro spouštění optimalizace. Nastavují se zde intervaly, ve kterých se při optimalizaci budou hledat jednotlivé konstanty PID,

počáteční hodnoty, ze kterých optimalizace vychází a také je zde možné měnit různé parametry optimalizace (počet iterací atp.). Volba počátečních hodnot je velmi důležitá a ve značné míře ovlivňuje výsledek optimalizace.

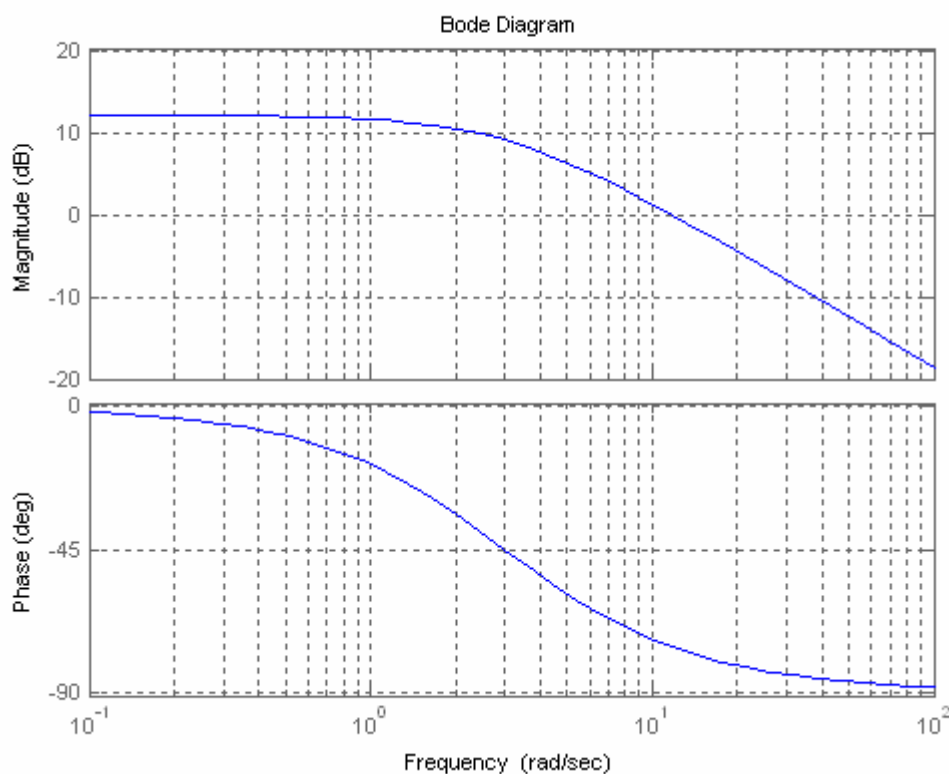
Výběr optimalizace pomocí `fmincon()` či `fminimax()` řeším odkomentováním příslušného řádku v kódu mého programu. Dále je stejným způsobem nutné ve funkci `fi()` (potažmo `fi2()`) vybrat, zda-li výstup funkce bude skalár či vektor.

Kapitola 4

4.1 Porovnání regulátorů

4.1.1 Systém 1. řádu

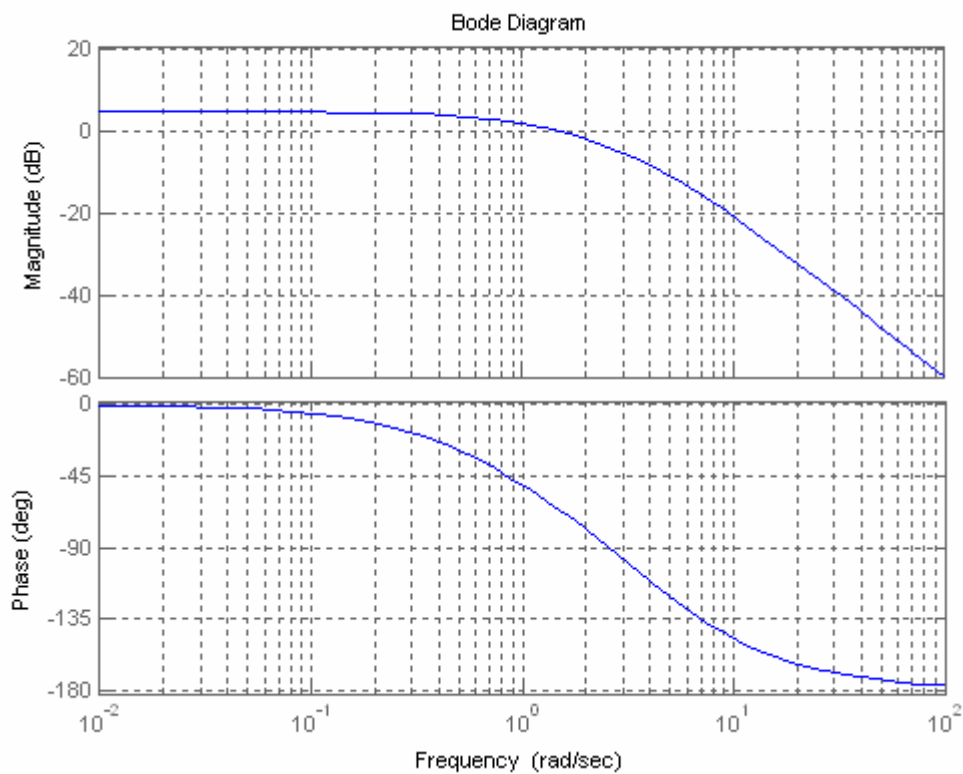
Pro systém prvního řádu není algoritmus pro vyhledávání optimálních parametrů ani návrh regulátoru frekvenčními metodami moc vhodný. Jak je vidět z obrázku 4.1, amplitudová bezpečnost je u systémů prvního řádu vždy nekonečno, neboť fáze nikdy nedosáhne -180° . Fázová bezpečnost není nikdy menší než 90° (z fázové charakteristiky), tudíž systém je i v uzavřené smyčce vždy stabilní. Jelikož se jedná pouze o simulaci, kde není omezený vstupní signál systému, nejlepší přechodové charakteristiky bych dosáhl nekonečným proporcionálním zesílením v uzavřené smyčce.



Obr. 4.1 – Frekvenční charakteristika systému 1. řádu

4.1.2 Systém 2. řádu

I systém druhého řádu má amplitudovou bezpečnost rovnou nekonečno. Fáze dosahuje -180° až při nekonečné frekvenci (viz. Obr 4.2). Fázová bezpečnost je vždy větší než 0° , tudíž je systém v uzavřené smyčce je také vždy stabilní. Ani systém druhého řádu se pro optimalizaci nebo návrh regulátoru frekvenčními metodami příliš nehodí.

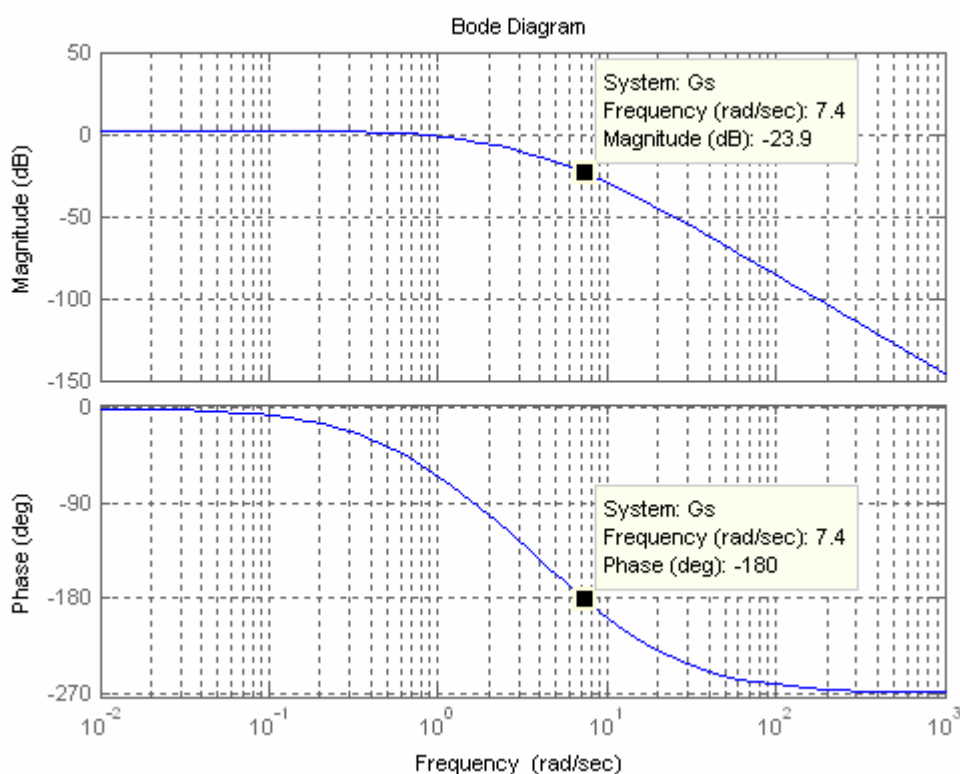


Obr. 4.2 – Frekvenční charakteristika systému 2. řádu

4.1.3 Systém 3. řádu

Z frekvenční charakteristiky systému třetího řádu (Obr. 4.3) už můžeme jednoznačně určit amplitudovou a fázovou bezpečnost, a proto se pro návrh PID regulátoru frekvenčními metodami a následnou optimalizaci hodí. Jako první k pokusu jsem zvolil systém vyjádřený přenosem (4.1).

$$G_1(s) = \frac{50}{(s+10)(s+4)(s+1)} \quad (4.1)$$

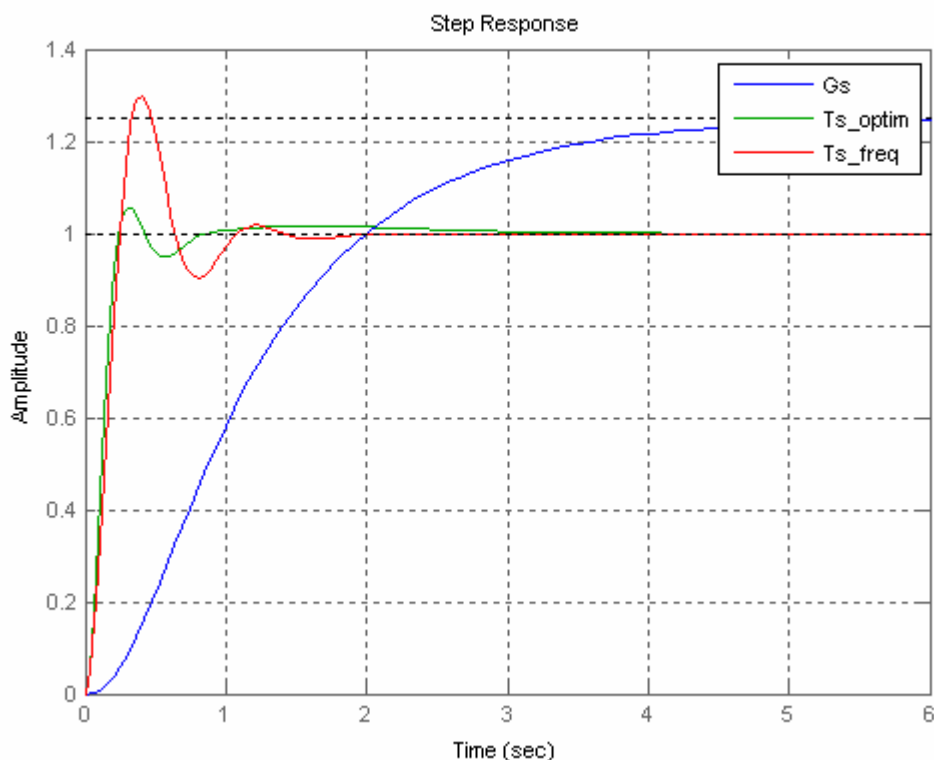


Obr. 4.3 – Frekvenční charakteristika systému 3. řádu s přenosem $G_I(s)$

Nejdříve jsem navrhl PID regulátor frekvenční metodou pro $PM=39,3^\circ$. Dle vztahu (2.11) při této fázové bezpečnosti odečítám z frekvenční charakteristiky frekvenci, kdy je fáze rovna 180° . Tuto frekvenci jsem určil jako $\omega_D = 7,4$ (viz Obr. 4.3), a dále jsem ze vztahů (2.13), (2.14) určil konstanty PID regulátoru (4.2).

$$K_{freq}(s) = 12,2 + \frac{8,12}{s} + 1,50s \quad (4.2)$$

Nyní přišla řada na optimalizace. V kódu jsem si do funkce fi2() zadal žádané hodnoty $PM_{\text{žAD}} = 50^\circ$, $GM_{\text{žAD}} = 25\text{dB}$, $\omega_{c_žAD} = 10$, $\omega_{BW_žAD} = 12$. Tyto hodnoty nejsou až tak moc důležité, jsou to jen jakési koeficienty, kterými jsou optimalizované funkce (3.2)-(3.5) vynásobeny, nebo vyděleny (podle toho, jestli chceme počítaný parametr maximalizovat, nebo minimalizovat). Váhové koeficienty jsem nastavil ve prospěch PM a GM.



Obr. 4.4 – Přejchodová charakteristika systému s přenosem $G_1(s)$ řízeným optimálně nastaveným regulátorem

Pro optimalizaci je nejdůležitější volba počátečního stavu. Zvolil jsem hodnoty regulátoru navrženého frekvenčními metodami. Po optimalizaci funkcí `fminimax()` jsem obdržel nové konstanty PID regulátoru (4.3).

$$K_{optim}(s) = 7,46 + \frac{7,79}{s} + 2,87s \quad (4.3)$$

Jak vypadaly výsledné přechodové charakteristiky je vidět na Obr. 4.4. Z přechodové charakteristiky můžeme vidět, že optimalizovaný systém má nižší překmit a kratší dobu ustálení¹ (settling-time). Z Tab. 4.1 je zřejmé, že jsme optimalizací zvýšili fázovou bezpečnost a šířku propustného pásma, což má kladný vliv na rychlost odezvy systému.

¹ Čas, za který se výstup přiblíží na 2% k ustálené hodnotě.

(closed-loop)	frekvenční metoda	optimálně nastavený PID
GM	∞	∞
PM	62,8°	168,5°
BW	10,2	14,1
ω_c	11,9	1,46
Překmit	30%	7%
Doba ustálení	1s	0,7s

Tab. 4.1 – Srovnání regulátoru navrženého frekvenční metodou a optimalizovaného pro systém G_1

Pro druhý systém, na kterém budu porovnávat kvalitu regulace, jsem si zvolil přenos (4.4).

$$G_2(s) = \frac{450(s+2)}{(s+1)(s+6)(s+8)(s+11)} \quad (4.4)$$

Pro zvolenou fázovou bezpečnost $PM=39,3^\circ$ jsem frekvenčními metodami navrhl regulátor (4.5). Dle vztahu (2.11) při této fázové bezpečnosti odečítám z frekvenční charakteristiky frekvenci, kdy je fáze rovna 180° .

$$K_{freq}(s) = 6,93 + \frac{8,50}{s} + 0,467s \quad (4.5)$$

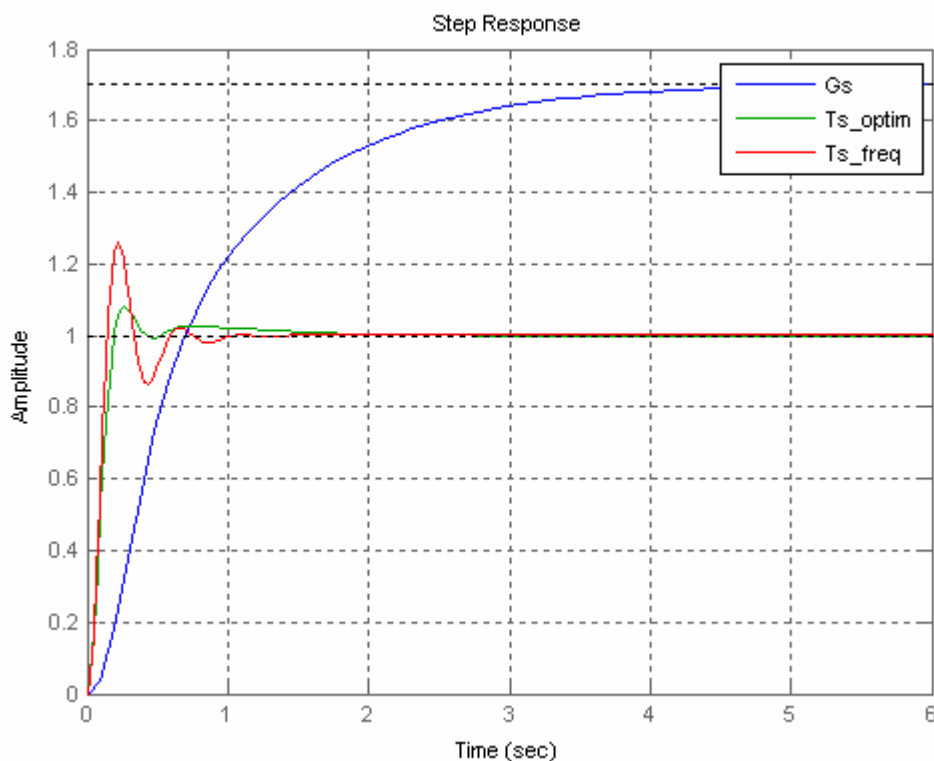
Jeho konstanty jsem opět použil jako počáteční stav optimalizace. Jako žádané hodnoty pro uzavřenou smyčku jsem nastavil $PM=70^\circ$, $GM=50\text{dB}$, $\omega_c = 0,5$ a $\omega_{BW} = 20$. Optimalizací jsem získal regulátor s přenosem (4.6).

$$K_{optim}(s) = 4,12 + \frac{8,32}{s} + 0,795s \quad (4.6)$$

Porovnání jednotlivých parametrů uzavřené smyčky pro oba regulátory můžeme vidět v Tab. 4.2. Porovnat jejich přechodové charakteristiky můžeme na Obr. 4.4. Optimalizací jsme dosáhli menšího překmitu, ale doba ustálení se nám dokonce prodloužila.

(closed-loop)	frekvenční metoda	optimálně nastavený PID
GM	∞	∞
PM	57,2°	158°
BW	18,6	17,2
ω_c	21,2	3,9
Překmit	26%	7%
Doba ustálení	0,54s	0,35s

Tab. 4.2 – Srovnání regulátoru navrženého frekvenční metodou a optimalizovaného pro systém G_2



Obr. 4.5 – Přeřodová charakteristika systému $G_2(s)$ řízeným optimálně nastaveným regulátorem

4.1.4 Systémy vyšších řádů

K řízení jsem si zvolil systém s přenosem (4.7).

$$G(s) = \frac{33750}{(s+17)(s+11)(s+8)(s+6)(s+3)(s+1)} \quad (4.7)$$

Frekvenčními metodami jsem mu navrhl regulátor pro $PM = 69,3^\circ$ s přenosem (4.8).

$$K(s) = 1,93 + \frac{0,874}{s} + 0,854s \quad (4.8)$$

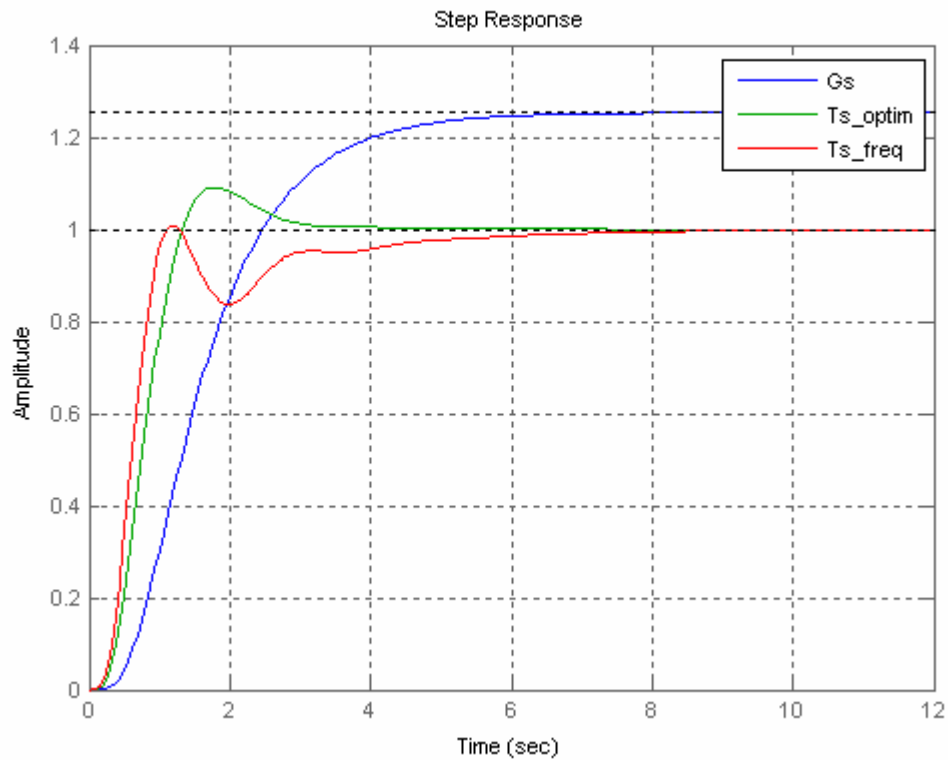
Pro optimalizaci jsem opět zvolil funkci $fi2()$ a žádané hodnoty $GM=10$, $PM=60$, $\omega_c = 3$ a $\omega_{BW} = 4$. Váhové koeficienty jsem zvolil nejvyšší pro PM , poloviční pro GM a čtvrtinové pro zbylé parametry. Optimalizací jsem získal regulátor o přenosu (4.9).

$$K(s) = 1,5576 + \frac{1,2127}{s} + 0,4728s \quad (4.9)$$

(closed-loop)	frekvenční metoda	optimálně nastavený PID
GM	8,92dB	11,67dB
PM	66,2°	107,5°
BW	3,3	1,61
ω_c	4,29	2,8
Překmit	2%	9%
Doba ustálení	5,2s	2,6s

Tab. 4.3 – Srovnání regulátoru navrženého frekvenční metodou a optimalizovaného pro systém s přenosem dle vztahu (4.7)

Na Obr. 4.5 vidíme, že regulátor navržený optimalizací má sice vyšší překmit, ale méně osciluje a rychleji se ustálí. Z Tab 4.3 můžeme zjistit, že jsme zlepšili fázovou i amplitudovou bezpečnost na úkor šířky propustného pásma a přechodové frekvence.



Obr. 4.6 – Přejchodová charakteristika systému s přenosem dle vztahu (4.7) řízeným optimálně nastaveným regulátorem

Poslední systém, který chci využít na porovnání, je zadán přenosem (4.10)

$$G(s) = \frac{16(s+10)(s+4)}{(s+11)(s+6)(s+3)(s+2)(s+1)^2} \quad (4.10)$$

Klasickými frekvenčními metodami jsem určil konstanty PID pro fázovou bezpečnost $PM=39,7^\circ$. Regulátor s těmito konstantami má přenos daný vztahem (4.11)

$$K(s) = 2,70 + \frac{0,414}{s} + 1,45s \quad (4.11)$$

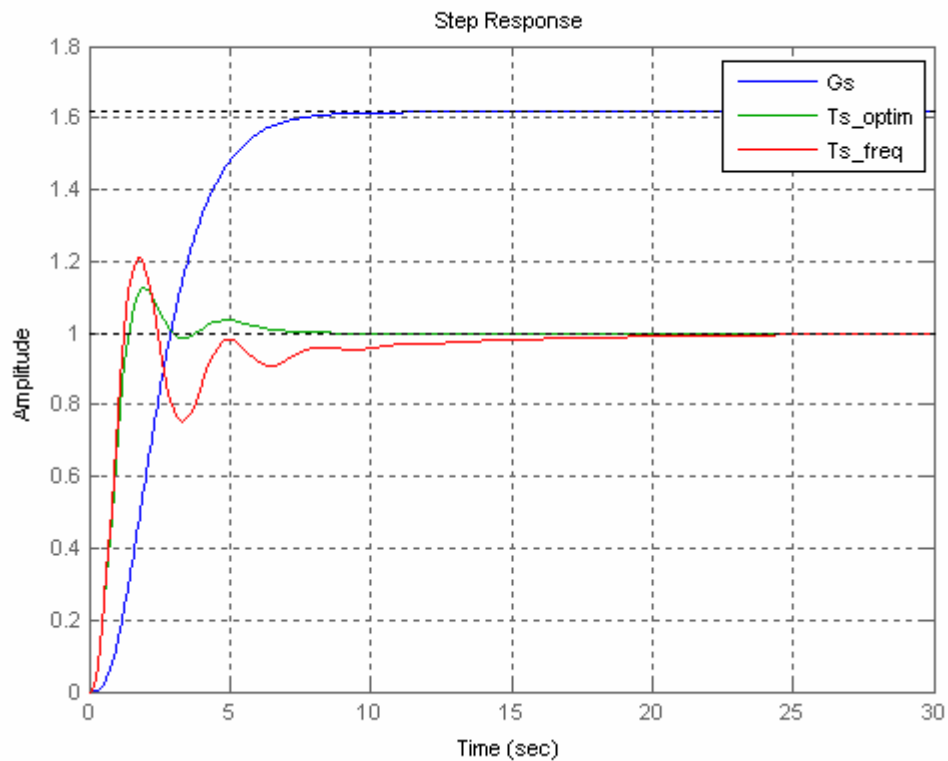
Optimalizace má opět počáteční hodnoty rovny konstantám PID ze vztahu (4.11), žádané hodnoty: $GM=11$, $PM=31$, $\omega_c = 2,5$ a $\omega_{BW} = 3$, váhové koeficienty $w_1=7$ pro GM , $w_2=7$; pro PM , $w_3=5$ pro ω_c , $w_4=3$ pro ustálenou regulační odchylku a $w_5=1$ pro šířku propustného pásma. Optimalizací jsem získal regulátor s přenosem (4.12)

$$K(s) = 1,8 + \frac{0,97}{s} + 1,52s \quad (4.12)$$

Porovnání regulátoru navrženého frekvenčními metodami a optimalizovaného regulátoru najdeme v Tab. 4.4 a na Obr. 4.7. Jak vidíme, větší váhy na GM a PM způsobily zvětšení těchto parametrů na úkor ostatních. Výsledná přechodová charakteristika regulátoru navrženého optimalizací má menší překmit a výrazně rychleji se ustálí na žádané hodnotě.

(closed-loop)	frekvenční metoda	optimálně nastavený PID
GM	10,47dB	13,83dB
PM	30,8°	78,9°
BW	2,49	1,96
ω_c	2,78	2,53
Překmit	21%	9%
Doba ustálení	12,7s	5,6s

Tab. 4.4 – Srovnání regulátoru navrženého frekvenční metodou a optimalizovaného pro systém s přenosem dle vztahu (4.10)



Obr. 4.7 – Přechodová charakteristika systému s přenosem dle vztahu (4.10) řízeným optimálně nastaveným regulátorem

Kapitola 5

Závěr

Má bakalářská práce vychází z článků [2][3]. V této literatuře se nacházely 4 funkce, které jsem původně pro optimalizaci chtěl použít, ale už při prvním testování jsem zjistil, že pro optimalizaci nejsou vyhovující. Problém byl v tom, že minimální hodnota funkcí nebyla vždy 0, ale např. funkce pro fázovou bezpečnost mohla mít i záporné hodnoty. Toto nejednotné chování funkcí by mohlo mít při optimalizaci nežádoucí efekty. Autoři článku se také snažili minimalizovat přechodovou frekvenci ω_c za účelem rychlejší odezvy. Z několika pokusů v Matlabu jsem zjistil, že pro zlepšení doby náběhu je potřeba tuto frekvenci naopak zvyšovat. Původní funkce jsem tedy upravil, aby vyhovovaly mým požadavkům (3.2)-(3.5). Nevýhodou těchto funkcí je, že mají stejnou strmost i po překročení meze stability. Optimalizační funkce překročení této meze proto nijak nezaznamená. V tomto směru vidím možné zlepšení. Pokud by se podařilo vymyslet funkce, které by po překročení meze stability strmě stoupaly, optimalizace by pak byla úspěšnější.

Pro optimalizaci se mi více osvědčila funkce `fminimax()`, která minimalizuje každou funkci zvlášť (resp. vždy tu, jejíž hodnota je nejvyšší). Proto jsou všechny regulátory v kapitole 4 navrženy optimalizací touto funkcí. Zároveň jsem jako optimalizovanou funkci používal `fi2()`, jelikož pracuje i s šířkou propustného pásma.

Jak jsem ze svých pokusů zjistil, pro optimalizaci je velice důležitý počáteční stav. Nejlépe optimalizace funguje, pokud jsou jako počáteční stav nastaveny parametry PID již fungujícího regulátoru. Je to způsobeno tím, že při zadání dobrých počátečních hodnot začíná optimalizace v blízkosti lokálního minima. Gradient má správný směr, tudíž se optimalizace velice rychle dostane do lokálního minima.

Výsledek optimalizace je také ovlivněn váhovými koeficienty. Jejich nastavování bych přirovnal k metodě pokus-omyl, neboť se mi při testování nepodařilo zjistit jejich ideální nastavení, které by platilo pro většinu systémů. Pokud nejsme s výstupem optimalizace spokojeni, je třeba tyto váhové koeficienty nastavit jinak.

Na začátku své práce jsem měl představu, že vytvořím v Matlabu funkci, do které zadám přenos systému a požadované hodnoty amplitudové bezpečnosti, fázové bezpečnosti, přechodové frekvence a ustálené odchylky a funkce mi během pár sekund vrátí regulátor. Takto bohužel optimalizace nefunguje. Autoři článku [2][3] zamýšleli

vytvořit soustavu, která bude zjišťovat přenos určitého procesu v reálném čase a podle jeho změn upravovat nastavení PID regulátoru. Myslím, že program, který jsem vytvořil by k tomuto účelu mohl být po menších úpravách použit.

Pokud porovnám výstup systému s regulátorem navrženým frekvenční metodou a regulátorem po optimalizaci, musím konstatovat, že zejména pro systémy vyšších řádu poskytují optimalizované regulátory lepší kvalitu regulace, hlavně co se týče doby ustálení. Pro systémy prvního a druhého řádu se naopak optimalizace vůbec nehodí.

Literatura

- [1] FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. David, EMAMI-NAEINI, Abbas. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 5th edition. New Jersey : Prentice Hall, 2006. 910 s. ISBN 0-13-149930-0.
- [2] LIU, G.P., DALEY, S.: *Optimal-tuning PID control for industrial systems*, Control Engineering Practice 9, 2001, pp.1185–1194
- [3] LIU, G.P., DALEY, S.: *Optimal-tuning PID controller design in the frequency domain with application to a rotary hydraulic system*, Control Engineering Practice 7, 1999, pp. 821-830
- [4] HAVEL, Petr: *Frekvenční metody syntézy*, 2005
- [5] ŠEBEK, Michael: *Slajdy k předmětu systémy a řízení*, 2006
- [6] ASTRÖM, K.J.: *Control System Design*, 2002, pp.216-251
- [7] PAZ, R. A.: *The Design of the PID Controller*, 2001
- [8] *Matlab R2006a: Help*
- [9] *Frequency Response Analysis and Design Tutorial:*
<http://www.engin.umich.edu/group/ctm/freq/freq.html>
- [10] *Wikipedia, the free encyclopedia:*
<http://en.wikipedia.org>
- [11] CREW, J.: *How Do PID Controllers Work: Application & Theory*
<http://ezinearticles.com/?How-Do-PID-Controllers-Work:-Application-and-Theory&id=97894>