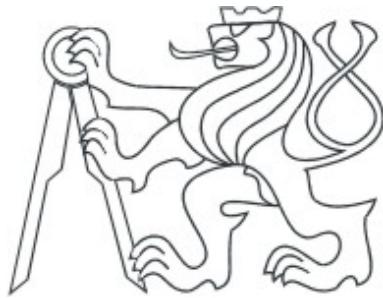


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDÍCÍ TECHNIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Waveletové báze

Praha, 2009

Autor: Váňa Zdeněk

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne

podpis

Poděkování

Rád bych vřele poděkoval Prof. RNDr. Janu Hamhalterovi, CSc., vedoucímu mé diplomové práce, který byl vždy ochotný konzultovat vzniklé problémy, a který vytvořil dokonalé podmínky pro zpracování této práce.

Musím také vyjádřit, jak jsem velmi vděčný svým rodičům, mé přítelkyni, mým příbuzným a kamarádům, kteří mě při práci podporovali, a kteří mě mnohdy inspirovali nejen při tvorbě této práce, ale i během celého studia.

Těm všem patří mé „DĚKUJÍ“.

Anotace

Tato práce volně navazuje na mou bakalářskou práci, která rozebírala waveletovou transformaci na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$. Zde je detailně zpracována teorie waveletů na prostorech $\ell^2(\mathbb{Z})$ a $L^2(\mathbb{R})$. Dále je zde zpracována obecná teorie koster včetně koster waveletových a teorie Rieszových bází.

V praktické části se zaobírám zpětnou rekonstrukcí signálu analyzovaného neortonormálním systémem pomocí Duffin-Schaefferova algoritmu jak teoreticky, tak i prakticky. Snažím se obejít nereálné výpočty a porovnávám praktické výsledky s teoretickými.

U čtenáře této práce se předpokládá alespoň základní znalost lineární algebry v rozsahu standardního jednosemestrálního kurzu.

Abstract

This diploma thesis follows my bachelor thesis, which described mathematical principle of wavelet transform on $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ space. This thesis includes wavelet transform on $\ell^2(\mathbb{Z})$ and $L^2(\mathbb{R})$ spaces with the inclusion of Fourier transform, frames and Riesz bases.

The thesis starts with a description of basic mathematical concepts which are indispensable for further exposition. Based on that the wavelet transform is built. Subsequently the thesis explains frames and their analogy to wavelets.

The objective of this diploma thesis is to implement Duffin-Schaeffer algorithm in matlab and compare practical results with theoretical solutions.

Obsah

Seznam obrázků	vi
Deklarace	vii
1 Úvod	1
1.1 Stručný obsah jednotlivých kapitol	1
2 Základní pojmy	3
2.1 Lineární prostor, skalární součin a unitární matice	3
2.2 Operátory na Hilbertových prostorech	6
3 Fourierova transformace na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$	15
3.1 Fourierova transformace v $\ell^2(\mathbb{Z})$	16
3.2 Základní operátory v $\ell^2(\mathbb{Z})$ a jejich vlastnosti	17
4 Waveletová báze na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$	19
4.1 Waveletová báze první úrovně	19
4.2 Waveletová báze p -té úrovně	25
5 Fourierova transformace na prostoru $L^2(\mathbb{R})$	33
5.1 Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R})$	33
5.2 Základní operátory a jejich vlastnosti	35
5.3 Fourierova transformace na prostoru $L^2(\mathbb{R})$	36
6 Waveletová báze na prostoru $L^2(\mathbb{R})$	40
6.1 MRA prostoru $L^2(\mathbb{R})$	40
6.2 Konstrukce waveletové báze	42
6.2.1 Nízkofrekvenční (low-pass) filtr a jeho vlastnosti	43
6.2.2 Waveletové filtry	48

6.3	Mallatův algoritmus	53
6.3.1	Analytická část	53
6.3.2	Rekonstrukční část	54
7	Kostry v Hilbertových prostorech a Rieszova báze	57
7.1	Kostry v Hilbertových prostorech	57
7.2	Rieszova báze	73
8	Waveletové kostry	75
9	Implementace Duffinova-Schaefferova algoritmu	78
9.1	Praktická omezení	78
9.2	Důsledky omezení	81
9.3	Dosažené výsledky a jejich zhodnocení	84
9.3.1	Norma chyby aproximace a její odhad	88
10	Závěr	93
Seznam použité literatury		94
A	Ukázka konečné waveletové kostry	I
B	Zdrojový kód pro MATLAB	II

Seznam obrázků

4.1	Analýza a syntéza vektoru z na první úrovni	26
4.2	MRA prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$	30
4.3	Obecná analýza vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$	32
4.4	Obecná rekonstrukce vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$	32
6.1	Mallatův algoritmus - analýza	54
6.2	Mallatův algoritmus - syntéza	55
7.1	Množina Φ - příklad 7.1	59
9.1	Mexický klobouk a jeho omezení	79
9.2	Omezení parametru k	80
9.3	Vektory v kostře	82
9.4	Testovací funkce	84
9.5	Rekonstrukce Gaussovy funkce	85
9.6	Ukázka zpřesňování approximace D-S algoritmem	85
9.7	Rekonstrukce funkce pila	86
9.8	Rekonstrukce skokové funkce	86
9.9	Rekonstrukce náhodné procházky	87
9.10	Pouze malé frekvence, $j = -4, -3, -2, -1, 0$	87
9.11	Pouze velké frekvence, $j = 0, 1, 2, 3, 4$	88
9.12	Možná nestabilita D-S algoritmu	89
9.13	Poměr norem chyby approximace a originálu f a odpovídající konstanta W	90
9.14	Rekonstrukce náhodné procházky - teoretické A, B	91
9.15	Pouze malé frekvence, $j = -4, -3, -2, -1, 0$ - teoretické A, B	91
9.16	Pouze velké frekvence, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ - teoretické A, B	92
A.1	Celá kostra, $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2$	I

Deklarace

Značka	Vysvětlivka
--------	-------------

\mathbb{N}	prostor přirozených čísel
\mathbb{N}_0	prostor přirozených čísel včetně 0
\mathbb{Z}	prostor celých čísel
\mathbb{R}	prostor reálných čísel
\mathbb{C}	prostor komplexních čísel
i	imaginární jednotka
$\Im(q)$	imaginární část čísla $q \in \mathbb{C}$
$\Re(q)$	reálná část čísla $q \in \mathbb{C}$
FT	Fourierova transformace
IFT	inverzní Fourierova transformace
ONB	ortonormální báze
■	konec důkazu
$\ell^1(\mathbb{Z})$	prostor komplexních summarizovatelných posloupností: $\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\langle (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n < \infty \right\rangle$
$\ell^2(\mathbb{Z})$	prostor komplexních posloupností summarizovatelných s druhou mocninou: $\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\langle (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n ^2 < \infty \right\rangle$
$L^1(\mathbb{R})$	prostor komplexních integrovatelných funkcí: $L^1(\mathbb{R}) = \left\langle f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty \right\rangle$
$L^2(\mathbb{R})$	prostor komplexních funkcí integrovatelných s druhou mocninou: $L^2(\mathbb{R}) = \left\langle f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt < \infty \right\rangle$

Kapitola 1

Úvod

Waveletová transformace slouží stejně jako Fourierova na analýzu signálu. Zatímco obecně známá Fourierova transformace analyzuje signál z pohledu frekvence a její blízká příbuzná, okénková Fourierova transformace, analyzuje signál stejným způsobem, pouze se omezuje na určité časové okno, waveletová transformace analyzuje signál jak v čase, tak i ve frekvenci. V principu je to tak, že analýza se provádí na několika úrovních, které mají přesně definovanou (a různé úrovně různou) velikost okna. V rámci každé úrovně se toto okno posouvá a signál je po každém posunu analyzován frekvenčně. Z tohoto je zřejmé, že waveletová analýza je mnohem dokonalejší než Fourierova a její využití v praxi stále roste.

1.1 Stručný obsah jednotlivých kapitol

Kapitola 2 : Základní pojmy - Kapitola čtenáři připomene základní pojmy z lineární algebry a seznámí ho s operátory a jejich vlastnostmi. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Frazier, 1999), (Rudin, 2003), (Buhagiar, 2006) a (Hamhalter, 2008).

Kapitola 3 : Fourierova transformace na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ - V této kapitole je shrnutá FT a IFT na diskrétním nekonečně-rozměrném prostoru. Jsou zde přehledně uvedeny základní vlastnosti této transformace a čtenář se zde seznámí s operátory konvoluce, translace a konjugované reflexe. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Najzar, 2004).

Kapitola 4 : Waveletová báze na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ - Kapitola stručně ukazuje princip waveletové analýzy na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ nejprve na 1. úrovni a následně na úrovni p -té. Z důvodu podobnosti s waveletovou analýzou na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ jsou zde uvedeny i jejich základní rozdíly. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Najzar, 2004).

Kapitola 5 : Fourierova transformace na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ - Podobně jako v kapitole 3 se zde zaobíráme FT a IFT, ale na spojitém prostoru. Čtenář se seznámí s těmito transformacemi nejprve na prostoru $L^1(\mathbb{R})$ a následně i na prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Ani zde nechybí operátory konvoluce, translace a konjugované reflexe. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Hamhalter, 2005) a (Frazier, 1999).

Kapitola 6 : Waveletová báze na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ - Tato kapitola detailně popisuje waveletovou analýzu na spojitém prostoru. Čtenář se zde seznámí s pojmy multiresoluční analýza prostoru a nízkofrekvenční (low-pass) filtr. Dále je zde ukázán Mallatův algoritmus převádějící problematiku analýzy na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ do prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Hamhalter, 2005) a (Frazier, 1999).

Kapitola 7 : Kostry v Hilbertových prostorech - Toto je stěžejní kapitola praktické části (kapitola 9). Rozebírá problematiku analýzy a syntézy pomocí neortogonální množiny mající určité vlastnosti (kostry). Právě kvůli neortogonalitě kostry není syntéza triviální, a proto zde jsou detailně ukázány možné postupy zpětné rekonstrukce. Jedním z nich je i Duffinův-Schaefferův algoritmus. Na konci kapitoly je základní seznámení s Rieszovými bázemi. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Hamhalter, 2006).

Kapitola 8 : Waveletové kostry - Poslední ryze matematická kapitola velmi stručně slučuje dvě předchozí kapitoly a má význam pouze pro neortogonální wavelety. Při zpracování této kapitoly jsem čerpal převážně z (Hamhalter, 2006).

Kapitola 9 : Implementace Duffinova-Schaefferova algoritmu - Poslední kapitola této diplomové práce ukazuje, jakým způsobem je možné prakticky implementovat Duffinův-Schaefferův algoritmus. Řeším zde prakticky nerealizovatelné problémy, jako jsou nekonečné součty, kostra obsahující nekonečně mnoho prvků apod. Dále ukazují dosažené výsledky rekonstrukcí a jejich chyb, porovnávám je s teoretickými předpoklady a zaobírám se odhadem chyby praktické realizace.

Kapitola 2

Základní pojmy

2.1 Lineární prostor, skalárni součin a unitární matice

Tato podkapitola poskytuje základní přehled o pojmech lineární prostor, skalárni součin a unitární matice, které jsou dále v práci používány. Pro podrobnější studium doporučuj literaturu (Frazier, 1999).

Definice 2.1: Skalárni součin

Nechť V je lineární (vektorový) prostor. Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ se nazývá skalárni součin, jestliže pro všechna $u, v, w \in V$ a všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ platí následující podmínky:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$
5. $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

Definice 2.2: Nechť V je lineární prostor, na němž je definován skalárni součin. Velikost (norma) libovolného vektoru $u \in V$ je na něm definována vztahem

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Prostor V pak nazýváme **lineární prostor se skalárním součinem** nebo též **normovaný lineární prostor**.

V práci budeme mluvit o prostorech $\ell^2(\mathbb{Z})$ a $L^2(\mathbb{R})$. Na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ je skalární součin definován

$$\langle (u_k), (v_k) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \overline{v_k} \text{ pro každé } (u_k), (v_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

tedy podobně, jako na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ (viz. (Váňa, 2007)). Na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ je skalární součin definován:

$$\langle u(t), v(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t) \overline{v(t)} dt \text{ pro každé } u(t), v(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

V následující větě uvedeme základní vlastnosti skalárního součinu.

Věta 2.1: *Nechť u, v jsou vektory z normovaného lineárního prostoru V .*

1. Kolmost

Vektory u, v nazvěme kolmé, jestliže $\langle u, v \rangle = 0$.

2. Pythagorova věta

Pro každé dva navzájem kolmé vektory u, v platí

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3. Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro všechny u, v platí

$$\|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u, v \rangle|.$$

Rovnost zřejmě nastává pro lineárně závislé vektory.

4. Trojúhelníková nerovnost

Pro všechny u, v platí

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

5. Rovnoběžníková nerovnost

Pro všechny u, v platí

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 (\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Důkazy jednotlivých bodů věty uvádět nebudeme, zájemce je nalezne například v (Frazier, 1999) nebo v (Váňa, 2007).

Definice 2.3: Nechť V je normovaný lineární prostor. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ se nazývá **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 \quad : \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Poznámka: Pokud má posloupnost limitu, pak je cauchyovská. Opačně to však platit nemusí!

Definice 2.4: Normovaný lineární prostor se nazývá **Hilbertův (úplný) prostor**, jestliže každá cauchyovská posloupnost v něm má limitu.

Podívejme se nyní na unitární matice. Tento pojem je používaný v teorii waveletové analýzy, ale setkáme se s ním i v následující kapitole o operátorech.

Definice 2.5: Nechť $A = [a_{ij}]$ je $m \times n$ matice nad \mathbb{C} .

Transpozice matice A je $n \times m$ matice $A^T = [a_{ji}]$ pro všechna i, j .

Konjugovaná transpozice matice A je $n \times m$ matice $A^* = [\overline{a_{ji}}]$ pro všechna i, j .

Definice 2.6: Nechť A je $n \times n$ matice. Matice A je **unitární**, jestliže existuje její inverze a jestliže $A^{-1} = A^*$.

Poznámka: Pro matice nad \mathbb{R} je transpozice totéž co konjugovaná transpozice. Tedy pro reálnou unitární matici platí $A^{-1} = A^T$ a taková matice se nazývá **ortogonální**.

Uved'me bez důkazu větu, která shrne vlastnosti unitární matice. Důkaz zájemce nalezne v (Frazier, 1999) nebo v (Rudin, 2003).

Věta 2.2: Nechť A je unitární $n \times n$ matice nad \mathbb{C} . Pak platí

- Sloupce matice A tvoří ONB prostoru \mathbb{C}^n .
- Řádky matice A tvoří ONB prostoru \mathbb{C}^n .
- Matice A zachovává skalární součin, tj. $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ pro všechna $u, v \in \mathbb{C}^n$.
- Matice A zachovává normu vektoru, tj. $\|Au\| = \|u\|$ pro všechna $u \in \mathbb{C}^n$.

2.2 Operátory na Hilbertových prostorech

Tuto podkapitolu zde uvedeme kvůli nezbytnému seznámení se s operátory na Hilbertových prostorech a jejich základními vlastnostmi. Pro podrobnější studium doporučují literaturu (Rudin, 2003).

Definice 2.7: Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak operátorem nazvěme lineární zobrazení $T : X \rightarrow Y$, tj. pro každé $x, y \in X$ a konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

Ponechme označení z definice 2.7 a zaved'me značení a pojmy, které nejsou všeobecně známé.

- Obor hodnot operátoru T značíme $R(T)$.
- Operátor T nazvěme **identický**, jestliže platí $x = Tx$ pro každé $x \in X$. Identický operátor značíme Id .

Tvrzení: Operátor T je prostý právě tehdy, když $\ker(T) = \{0\}$.

Důkaz: Předpokládejme, že operátor T je prostý. Pak platí $x \neq x' \Rightarrow Tx \neq Tx'$. Pokud tedy $x \neq 0$, pak $Tx \neq T(0) = 0$, z čehož ale ihned plyne $\ker(T) = \{0\}$. Naopak předpokládejme, že $\ker(T) = \{0\}$. Pak $x \neq x' \Rightarrow x - x' \neq 0$, tedy $T(x - x') = Tx - Tx' \neq 0$, odkud $Tx \neq Tx'$, neboli operátor T je prostý.

■

Definice 2.8: Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Operátor $T : X \rightarrow Y$ se nazývá **spojitý** v bodě $x_0 \in X$, jestliže pro každou posloupnost prvků $\{x_n\} \subset X$, pro kterou $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, platí $\|Tx_n - Tx_0\| \rightarrow 0$.

Věta 2.3: Operátor T je spojitý v každém bodě $x \in X$ právě tehdy, když je spojitý v některém bodě $x_0 \in X$.

Důkaz: Je triviální, že pokud je operátor spojitý ve všech bodech, je spojitý alespoň v jednom bodě. Dokažme ještě opačnou implikaci. Zvolme posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in X$, pro kterou pro $n \rightarrow \infty$ platí $x_n \rightarrow y$, $y \in X$. Potom zřejmě $x_n - y + x_0 \rightarrow x_0$, odkud pro $n \rightarrow \infty$ plyne $T(x_n - y + x_0) \rightarrow T(x_0)$. Z linearity dostáváme $T(x_n - y + x_0) = T(x_n - y) + T(x_0)$, odkud již $T(x_n - y) \rightarrow 0$ a proto $T(x_n) \rightarrow T(y)$. Tím jsme dokázali spojitost operátoru v libovolném bodě $y \in X$.

■

Definice 2.9: Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Operátor T se nazývá **omezený** (ohraničený) na X , jestliže existuje konstanta $c \geq 0$ taková, že platí

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \text{ pro každé } x \in X. \quad (2.1)$$

Věta 2.4: Operátor T je na X spojitý právě tehdy, když je na X omezený.

Důkaz: Zavedeme ε -okolí bodu x následovně:

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon\}.$$

Předpokládejme spojitost operátoru T . Díky větě 2.3 nám stačí vyjít ze spojitosti v bodě 0, v němž platí $T(0) = 0$. Jelikož je operátor v bodě 0 spojitý, existuje nějaké okolí $V_\varepsilon(0) \subseteq X$ bodu 0, které se zobrazí do okolí bodu $V_1(T(0))$. Jinými slovy můžeme říct, že existuje nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že jestliže $\|x\| \leq \varepsilon$, pak $\|T(x)\| < 1$. Zvolme $x' \in X$, $x' \neq 0$ a položme $x = \frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}$. Potom $\|x\| = \varepsilon$ a dostáváme

$$Tx = T\left(\frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}\right) = \frac{\varepsilon}{\|x'\|} T(x')$$

a jelikož $\frac{\varepsilon}{\|x'\|}$ je konstanta, tak

$$\|Tx\| = \frac{\varepsilon}{\|x'\|} \|T(x')\| < 1.$$

Tedy $\|T(x')\| < \frac{1}{\varepsilon} \|x'\|$ (omezenost) pro každé $x \in X$. Opačným postupem lze z předpokládané omezenosti operátoru T dospět k jeho spojitosti.

■

Definice 2.10: Norma operátoru

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a nechť $T : X \rightarrow Y$ je spojitý operátor. Dle věty 2.4 je T omezený. Definujme normu operátoru:

$$\|T\| = \inf\{c : \|Tx\| \leq c\|x\|, \text{ pro každé } x \in X\}.$$

Důsledek: Pro operátory T, S platí

$$\begin{aligned} \|T + S\| &\leq \|T\| + \|S\|, \\ \|TS\| &\leq \|T\| \|S\|. \end{aligned}$$

Jestliže $Y = \mathbb{F}$ (kde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} je prostor skaláru), pak operátor $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ se nazývá **funkcionál**.

Věta 2.5: Rieszova věta

Pro každý omezený funkcionál f na Hilbertově prostoru H existuje jediný prvek $y \in H$ takový, že

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \text{ pro všechna } x \in H.$$

Dále platí $\|y\| = \|f\|$.

Rieszovu větu nebudeme dokazovat, zájemce důkaz nalezne v (Rudin, 2003).

Věta 2.6: Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a nechť $T : X \rightarrow Y$ je spojitý operátor. Pak

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Důkaz: Označme $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = A$, $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = B$ a $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = C$ a dokažme, že platí nerovnost $\|T\| \leq C \leq B \leq A \leq \|T\|$.

Nejprve ukažme, že $A \leq \|T\|$. Dle definice normy operátoru víme, že $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Vezměme takové $x \in X$, že $\|x\| \leq 1$. Potom $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ a dosazením dostaváme

$$A = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T\|\|x\| = \|T\|.$$

Nerovnost $B \leq A$ je triviální a plyne z linearity, zameřme se nyní na nerovnost $C \leq B$. Zvolme $x \in X, x \neq 0$. Pak jelikož $x' = \frac{x}{\|x\|}$ splňuje $\|x'\| = 1$, platí $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|T(x')\| \leq B$ (B je supremum množiny). Neboli $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq B$ pro každé $x \neq 0$. Dosazením dostaváme

$$C = \sup_{\|x \neq 0\|} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq B.$$

Zbývá dokázat, že $\|T\| \leq C$. Pro $x \in X, x \neq 0$ platí $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C$, odkud $\|Tx\| \leq C\|x\|$. To je ale pravda i pro $x = 0$ a proto $\|Tx\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$. Podle definice normy operátoru potom $\|T\| \leq C$.

■

Věta 2.7: Adjungovaný operátor

Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory a $T : H \rightarrow K$ je omezený lineární operátor. Pak

existuje jediný operátor $T^* : K \rightarrow H$ takový, že

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \text{ pro každé } x \in H, y \in K.$$

Operátor T^* nazýváme **adjungovaný operátor** k operátoru T .

Důkaz: Zvolme pevné $y \in K$. Pak $x \rightarrow \langle Tx, y \rangle$ je spojitý funkcionál na H . Dle Rieszovy věty existuje právě jedno y^* takové, že

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \text{ pro každé } x \in H.$$

Pak můžeme definovat zobrazení $T^* : y \rightarrow T^*y = y^*$. Jelikož skalární součin je lineární, musí toto zobrazení být také lineární a tedy T^* je operátor. Ještě ukažme jeho jednoznačnost. Zvolme T_1^*, T_2^* tak, že platí $\langle x, T_1^*y \rangle = \langle x, T_2^*y \rangle$ pro každé $x \in H$. Potom ale musí platit

$$0 = \langle x, T_1^*y \rangle - \langle x, T_2^*y \rangle = \langle x, (T_1^* - T_2^*)y \rangle,$$

což je pro každé $x \in H$ splněno pouze tehdy, když $T_1^*y = T_2^*y$.

■

Poznámka: Díky jednoznačnosti adjungovaného operátoru zřejmě platí

$$T = (T^*)^* = T^{**}.$$

Následující větou se vratíme ke konjugované transpozici A^* matice A . Tuto větu včetně jejího důkazu můžeme chápát i jako příklad.

Věta 2.8: Nechť A je $m \times n$ matice nad \mathbb{C} . Pak pro každé $u \in \mathbb{C}^n$ a každé $v \in \mathbb{C}^m$ platí

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

Důkaz: Nechť $u = (u_i)_{i=1}^n$ a $v = (v_i)_{i=1}^m$. Nechť $A = [a_{ij}]$ je $m \times n$ a $A^* = [a_{ij}^*]$ je $n \times m$. Pak j -tý prvek součinu A^*v můžeme zapsat $(A^*v)_j = \sum_{i=1}^m a_{ji}^* v_i$ a tedy

$$\langle u, A^*v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j \overline{(A^*v)_j} = \sum_{j=1}^n u_j \overline{\sum_{i=1}^m a_{ji}^* v_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_{ji}^*} u_j \overline{v_i} =$$

Jelikož $a_{ji}^* = \overline{a_{ij}}$, platí $\overline{a_{ji}^*} = \overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$ a můžeme pokračovat

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} u_j \overline{v_i} = \sum_{j=1}^n (Au)_j \overline{v_i} = \langle Au, v \rangle.$$

■

Poznámka: Věta ukazuje, proč konjugovanou transpozici matice značíme stejně jako adjunkci operátoru.

Věta 2.9: Norma adjungovaného operátoru T^* je rovna normě operátoru T :

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Důkaz: Nechť $x, y \in X$. Normu vektoru můžeme vyjádřit následovně:

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|$$

(vektor y můžeme zvolit například $y = \frac{x}{\|x\|}$). Pak platí

$$\begin{aligned} \|T^*x\| &= \sup_{\|y\|=1} |\langle T^*x, y \rangle| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, Ty \rangle| = \sup_{\|y\|=1} |\langle Ty, x \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| \|x\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|T\| \|y\| \|x\| = \|T\| \|x\| \text{ pro každé } x \in X, \end{aligned}$$

neboli $\|T^*\| \leq \|T\|$. Analogicky platí $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ a tedy $\|T^*\| = \|T\|$.

■

Věta 2.10: Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a nechť T je prostý operátor. Operátor $T^{-1} : R(T) \rightarrow X$ je spojitý právě tehdy, když existuje konstanta $m > 0$ taková, že $\|Tx\| \geq m\|x\|$ pro každé $x \in X$.

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že T^{-1} je spojitý operátor. Pak pro každé $x \in X, y = Tx, y \in R(T)$ můžeme psát $\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\| \|y\|$. Dosazením získáme

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|,$$

odkud

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\| = m\|x\|, \text{ kde } m = \frac{1}{\|T^{-1}\|} > 0.$$

Naopak předpokládejme nyní, že platí $\|Tx\| \geq m\|x\|$ pro každé $x \in X$. Potom pro každé $y \in R(T)$ existuje $x = T^{-1}y$ a dosazením

$$\|y\| = \|T(T^{-1}y)\| \geq m\|T^{-1}y\|,$$

a proto $\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m} \|y\|$ pro každé $y \in Y$, neboli T^{-1} je omezený, tedy spojitý.

■

Poznámka: Pozor, věta 2.10 neříká, že inverzní operátor je spojitý, ale pouze kdy je spojitý. Tzn. že, inverze spojitého operátoru nemusí být spojitý operátor.

Definice 2.11: Jestliže $T = T^*$, nazýváme operátor T **samoadjungovaný**. V tomto případě platí

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \text{ pro každé } x, y \in X.$$

Jestliže $TT^* = T^*T$, nazýváme operátor T **normální**.

Jestliže $TT^* = T^*T = Id$, nazýváme operátor T **unitární** a platí $T^{-1} = T^*$.

Nyní uvedeme základní pravidla pro adjunkci.

- $(T + R)^* = T^* + R^*$.
- $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, \alpha \in \mathbb{C}$.
- $(T^*)^* = T$.
- $(TR)^* = R^*T^*$.
- Jestliže T je samoadjungovaný a má omezenou inverzi, pak T^{-1} je také samoadjungovaný.

Tvrzení: Nechť operátor $T : X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou Hilbertovy prostory. Pak platí

$$\|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Důkaz: Již víme, že $\|T\| = \|T^*\|$. Pro $x \in X$ platí

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*T\| \|x\|^2.$$

Nalezením suprema přes všechna $x \in X$, $\|x\| = 1$, dostaneme

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Odtud již plyne dokazovaná rovnost.

■

Věta 2.11: Nechť T_1, T_2 jsou operátory v komplexním Hilbertově prostoru H a nechť kvadratická forma Q_T operátoru T je dána předpisem $Q_T(x) = \langle Tx, x \rangle$ pro každé $x \in H$. Pak $Q_{T_1} = Q_{T_2}$ právě tehdy, když $T_1 = T_2$.

Důkaz: Nejprve uvedeme polarizační identitu

$$\langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - i\langle T(x-iy), x-iy \rangle,$$

která platí pro každý operátor $T \in H$. Jejím důsledkem je, že $\langle T_1x, x \rangle = \langle T_2x, x \rangle$ (tedy $Q_{T_1} = Q_{T_2}$) pro každé $x \in H$ platí pouze tehdy, když $T_1 = T_2$.

■

Věta 2.12: Nechť T je omezený lineární operátor v komplexním Hilbertově prostoru H . Pak operátor T je samoadjungovaný právě tehdy, když $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in H$.

Důkaz: Předpokládejme, že T je samoadjungovaný. Potom pro všechna $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle - \overline{\langle Tx, x \rangle} = \\ &= (\Re \langle Tx, x \rangle + i\Im \langle Tx, x \rangle) - (\Re \langle Tx, x \rangle - i\Im \langle Tx, x \rangle) = 2i\Im \langle Tx, x \rangle, \end{aligned}$$

což platí právě tehdy, když $\Im \langle Tx, x \rangle = 0$, neboli $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in X$.

Ještě dokážeme opačnou implikaci. Pokud $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, pak platí

$$\langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle Tx, x \rangle = (*). \quad (2.2)$$

Odtud a z jednoznačnosti adjungovaného operátoru plyne, že $T^* = T$. V rovnosti (2.2) můžeme pokračovat

$$(*) = \langle x, T^*x \rangle, \quad (2.3)$$

pak dle věty 2.11 rovnost nastane pouze v případě, že $T^* = T$. ■

Příklad 2.1: Ukažme, že diagonální $n \times n$ matice $D = \text{diag}\{(d_1, \dots, d_n)\}$ nad \mathbb{R} je samoadjungovaná (matice zobrazení je operátor) na prostoru \mathbb{C}^n , který je Hilbertův.

Nejprve ukažme, že D je omezený operátor. Pro každé $x \in \mathbb{C}^n$ platí

$$\|Dx\|^2 = \langle Dx, Dx \rangle = \sum_{i=1}^n d_i x_i \overline{d_i x_i} = \sum_{i=1}^n d_i^2 |x_i|^2 \leq \max_k(d_k^2) \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Po odmocnění platí

$$\|Dx\| \leq \max_k(|d_k|) \|x\|,$$

tedy D je omezený. Dle věty 2.12 otestujeme reálnost výrazu $\langle Dx, x \rangle$.

$$\langle Dx, x \rangle = \sum_{i=1}^n d_i x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n d_i |x_i|^2,$$

kde $d_i, |x_i| \in \mathbb{R}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Operátor D je tedy samoadjungovaný, což ověříme výpočtem $\langle x, Dx \rangle$.

$$\langle x, Dx \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{d_i x_i} = \sum_{i=1}^n \overline{d_i} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n d_i |x_i|^2 = \langle Dx, x \rangle.$$

Definice 2.12: Omezený operátor T na Hilbertově prostoru H se nazývá **pozitivní**, jestliže

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \text{ pro každé } x \in H.$$

Píšeme $T \geq 0$.

Definice 2.13: Uspořádání operátorů

Jestliže operátory T, R jsou na H samoadjungované, pak řekneme, že

$$T \leq R \Leftrightarrow \langle Tx, x \rangle \leq \langle Rx, x \rangle \text{ pro každé } x \in H.$$

Poznámka: Zřejmě platí

$$T \leq R \Leftrightarrow \langle R - T \rangle \geq 0,$$

čili můžeme i psát, že $T \leq R$, jestliže $R - T$ je pozitivní.

Tvrzení: Nechť T, R, Q jsou samoadjungované operátory na H . Pak platí

$$T \leq R \Rightarrow T + Q \leq R + Q.$$

Důkaz: Jestliže $T \leq R$, platí $R - T \geq 0$. Díky linearitě můžeme psát

$$\langle (T + Q)x, x \rangle = \langle Tx + Qx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle + \langle Qx, x \rangle \leq \langle Rx, x \rangle + \langle Qx, x \rangle = \langle (R + Q)x, x \rangle,$$

odkud plyne dokazovaná nerovnost.

■

Věta 2.13: Nechť existují konstanty A, B tak, že platí $0 < A \cdot Id \leq T \leq B \cdot Id$. Pak T má omezenou inverzi a platí

$$\frac{1}{B} Id \leq T^{-1} \leq \frac{1}{A} Id. \quad (2.4)$$

Důkaz věty je složitý, a proto jej nebudeme uvádět. Zájemci jej naleznou v (Kadison and Ringrose, 1983).

Kapitola 3

Fourierova transformace na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$

V této kapitole uvedeme základní pojmy, označení a vlastnosti FT a její inverze IFT v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Na tomto prostoru je FT velmi podobná FT na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, která je podrobně popisána v (Frazier, 1999) nebo v (Váňa, 2007). Nejprve připomeňme některé pojmy z funkcionální analýzy.

- Prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$ je Hilbertův a separabilní. Reprezentace prvku $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ je vektor $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.
- Prostor $\ell^1(\mathbb{Z})$ je Banachův a separabilní. ℓ^1 -norma je zde dána předpisem

$$\|z\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z(n)|.$$

- Prostor $L^2(-\pi, \pi)$ je prostor funkcí lesbegeovsky integrovatelných s kvadrátem na intervalu $(-\pi, \pi)$, kde skalární součin je dán vztahem

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega.$$

- Prostor $L^2(-\pi, \pi)$ je Hilbertův a separabilní.
- Zaved'me funkci $\delta_{k,j}$:

$$\delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.1)$$

- V základních pojmech byl definován skalární součin funkcí $f, g \in L^2(I), I \subseteq \mathbb{R}$ vztahem

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Prostor $L^2(I)$ je Hilbertův, tedy norma funkce f se spočítá

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

Dle tohoto vztahu norma funkce f existuje, pokud je funkce f definována na celém intervalu I . Pokud má ale funkce f nespojitosti v konečně mnoha bodech, integrál se nemění. To v důsledku znamená, že funkce f nemusí být nulová, aby $\|f\| = 0$. Zavedeme pojem **množina míry nula**, který můžeme chápout následovně.

Množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ nazveme množina míry nula, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}$ tak, že platí

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{délka}(I_i) < \varepsilon.$$

Potom funkce $f, g \in L^2(I)$ ztotožňujeme, jestliže platí $f(t) = g(t)$ pro všechna $t \in I \setminus M$ (říkáme **skoro všude**).

3.1 Fourierova transformace v $\ell^2(\mathbb{Z})$

Definice 3.1: Fourierova transformace vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ je funkce $z \in L^2(-\pi, \pi)$ definovaná předpisem

$$\hat{z}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(n) e^{int}, \quad \omega \in \langle -\pi, \pi \rangle. \quad (3.2)$$

Inverzní Fourierova transformace funkce $f \in L^2(-\pi, \pi)$ je vektor $\check{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ definovaný předpisem

$$\check{f}(n) = \langle f, e^{in\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-in\omega} d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Základní vlastnosti FT na $\ell^2(\mathbb{Z})$ shrneme do následující věty.

Věta 3.1: Zobrazení $\hat{\cdot}$, resp. $\check{\cdot}$ je lineární, spojité zobrazení $\ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{na}} L^2(-\pi, \pi)$, resp. $L^2(-\pi, \pi) \xrightarrow{\text{na}} \ell^2(\mathbb{Z})$. Pro všechny $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$ platí

1. $z = (\hat{z})\check{\cdot}$,
2. Parsevalova rovnost: $\langle z, w \rangle = \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle$,
3. Plancherelova formule: $\|z\|^2 = \|\hat{z}\|^2$.

3.2 Základní operátory v $\ell^2(\mathbb{Z})$ a jejich vlastnosti

Dále definujme operátory, jež budeme potřebovat při waveletové analýze.

Definice 3.2: Nechť $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Definujme

1. **Konvoluce:** $(z * w)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z(m-n)w(n)$, $m \in \mathbb{Z}$.
2. **Translace:** $R_k : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $R_k z(n) = z(n-k)$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. **Konjugovaná reflexe:** $\tilde{z}(n) = \overline{z(-n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. **Vektor z^* :** $z^*(n) = (-1)^n z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pro úplnost ještě uvedeme vlastnosti těchto operátorů.

Věta 3.2:

1. Nechť $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pak $z * w \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
2. Nechť $v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pak
 - (a) $(z * w)\hat{\cdot}(\omega) = \hat{z}(\omega)\hat{w}(\omega)$ skoro všude.
 - (b) Konvoluce je komutativní: $z * w = w * z$.
 - (c) Konvoluce je asociativní: $v * (w * z) = (v * w) * z$.
 - (d) $v * w \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
3. Nechť $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pak
 - (a) \tilde{z} , z^* , $R_k z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.
 - (b) $(\tilde{z})\hat{\cdot}(\omega) = \overline{\hat{z}(\omega)}$.

- (c) $(z + w)\tilde{ } = \tilde{z} + \tilde{w}$.
- (d) $(z^*)\hat{ }(\omega) = \tilde{z}(\omega + \pi)$.
- (e) $(R_k z)\hat{ }(\omega) = e^{ik\omega}\hat{z}(\omega)$.
- (f) $\langle R_j z, R_k w \rangle = \langle z, R_{k-j} w \rangle$, $j, k \in \mathbb{Z}$.
- (g) $\langle z, R_k w \rangle = z * \tilde{w}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (h) $\langle z, R_k \tilde{w} \rangle = z * w(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Nechť $w \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pak platí

- (a) Jestliže $R_k w = w$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, pak $w = 0$.
- (b) Jestliže $R_k w = R_j w$ pro nějaké $j, k \in \mathbb{Z}$, $j \neq k$, pak $w = 0$.
- (c) Množina $\{R_{2k} w\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální právě tehdy, když

$$\langle w, R_{2k} w \rangle = \delta_{k,0}.$$

Kapitola 4

Waveletová báze na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$

Waveletová transformace na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ je vybudována podobně jako na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ (zájemce nalezne v (Váňa, 2007)) až na některé zásadní rozdíly:

1. Na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ plynula maximalita množiny waveletových filtrů z její mohutnosti a ortonormálnosti. V prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ je však potřeba ortonormalitu i maximalitu množiny waveletových filtrů dokázat.
2. Fourierovým obrazem vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$ je funkce $f \in L^2(-\pi, \pi)$.
3. Aby konvoluce analyzovaného vektoru a waveletového filtru $z * w$ byla prvkem prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$, musí být $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, viz bod 1 věty 3.2.
4. Rozklad prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}) = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \dots$ obsahuje nekonečně mnoho direktivních sčítanců.
5. Jelikož je prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$ nekonečně dimenzionální, dá se v praxi konvoluce vektoru s waveletovým filtrem $z * w$ spočítat pouze přibližně. Je proto velmi důležité, aby waveletové filtry měly konečně mnoho nenulových složek (říkáme, že mají **konečný support**).

4.1 Waveletová báze první úrovně

Definice 4.1: Nechť $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ jsou takové vektory, že množina $B = \{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Množinu B nazýváme waveletovou bází na první úrovni pro $\ell^2(\mathbb{Z})$. Vektory u a v se nazývají generátory nebo též waveletové filtry.

Definice 4.2: Nechť $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

1. **Přidruženou matici** $A(\omega)$ k vektorům u, v definujeme pro $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$ předpisem

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(\omega) & \hat{v}(\omega) \\ \hat{u}(\omega + \pi) & \hat{v}(\omega + \pi) \end{bmatrix}.$$

2. **Downsampling operátor** $D : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definujeme předpisem

$$D(z)(n) = z(2n), \quad z \in \mathbb{Z}.$$

3. **Upsampling operátor** $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definujeme předpisem

$$U(z)(n) = \begin{cases} z\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ sudé}, \\ 0, & n \text{ liché}. \end{cases}$$

V následující větě uvedeme základní vlastnosti operátorů D, U a ověříme jejich platnost.

Věta 4.1:

1. Přidružená matici $A(\omega)$ je unitární pro dané ω , jestliže platí

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\omega)|^2 + |\hat{u}(\omega + \pi)|^2 &= 2, \\ |\hat{v}(\omega)|^2 + |\hat{v}(\omega + \pi)|^2 &= 2, \\ \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)} + \hat{u}(\omega + \pi)\overline{\hat{v}(\omega + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

2.

$$U \circ D(z)(n) = \frac{z(n) + z^*(n)}{2}. \quad (4.1)$$

Operátor D z vektoru z nejprve vynechá všechny liché členy a operátor U na jejich původní místo dosadí nuly. Dostáváme vektor $(\dots, z(-2), 0, z(0), 0, z(2), \dots)$.

Dosazením za $z^*(n) = (-1)^n z(n)$ do pravé strany rovnice dostáváme

$$\frac{z(n) + z^*(n)}{2} = \frac{1}{2} z(n) (1 + (-1)^n) = \begin{cases} z(n), & n \text{ sudé}, \\ 0, & n \text{ liché}. \end{cases}$$

Rovnost (4.1) tedy evidentně platí.

3.

$$D \circ U(z)(n) = z(n). \quad (4.2)$$

Důkaz analogicky dle bodu 2 ihned vede na rovnost.

4. Operátor D je zobrazení na celý prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$, které není prosté. Naopak operátor U není zobrazení na celý prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$, ale je prosté.

Mějme vektor $z = (\dots, a_{-3}, b_{-2}, a_{-1}, b_0, a_1, b_2, a_3, \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, kde liché prvky značíme a a sudé b . Potom $D(z) = (\dots, b_{-2}, b_0, b_2, \dots)$. Evidentně $D(z)$ může být libovolný vektor z prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Zobrazení ale není prosté, jelikož obraz není závislý na lichých koeficientech a (tedy stejný obraz mohou mít různé vektory). Analogicky je vektoru z přiřazen obraz $U(z) = (\dots, a_{-3}, 0, b_{-2}, 0, a_{-1}, 0, b_0, 0, a_1, 0, b_2, 0, a_3, 0, \dots)$. Množina všech takovýchto obrazů ale zřejmě nepokrývá celý prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$.

5.

$$D(z * \tilde{u})(k) = (z * \tilde{u})(2k) = \langle z, R_{2k}u \rangle. \quad (4.3)$$

První rovnost je zřejmá z definice operátoru D . Druhá rovnost je jedna z vlastností operátorů translace a konvoluce.

Nyní už můžeme odvodit nutnou a postačující podmínku ortonormality množin $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a $\{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Věta 4.2: Nechť $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pak platí

1. Množina $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální právě tehdy, když

$$|\hat{u}(\omega)|^2 + |\hat{u}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (4.4)$$

pro skoro všechna $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Důkaz: V bodě 4 věty 3.2 jsme zformulovali nutnou a postačující podmínku ortonormality množiny $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ve tvaru

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \delta_{k,0}.$$

Úpravami dle vztahu (4.3) dostaneme

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = (u * \tilde{u})(2k) = D(u * \tilde{u})(k) = D \circ U(D(u * \tilde{u})(k)) =$$

$$= D(U \circ D(u * \tilde{u})(k)) = D\left(\frac{(u * \tilde{u})(k) + ((u * \tilde{u})^*)(k)}{2}\right) = \delta_{k,0}.$$

Uvědomme si, že platí $U\delta_{k,0} = \delta_{k,0}$, čili můžeme psát

$$\frac{(u * \tilde{u})(k) + ((u * \tilde{u})^*)(k)}{2} = U \circ D\left(\frac{(u * \tilde{u})(k) + ((u * \tilde{u})^*)(k)}{2}\right) = U\delta_{k,0} = \delta_{k,0},$$

odkud již

$$(u * \tilde{u})(k) + ((u * \tilde{u})^*)(k) = 2\delta_{k,0}.$$

Fourierovou transformací tohoto vztahu dostáváme

$$(u * \tilde{u})^\wedge(\omega) + ((u * \tilde{u})^*)^\wedge(\omega) = 2$$

a pomocí identit

- $(u * \tilde{u})^\wedge(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{\tilde{u}}(\omega) = \hat{u}(\omega)\overline{\hat{u}(\omega)} = |\hat{u}(\omega)|^2$,
- $((u * \tilde{u})^*)^\wedge(\omega) = (u * \tilde{u})^\wedge(\omega + \pi) = \hat{u}(\omega + \pi)\hat{\tilde{u}}(\omega + \pi) = \hat{u}(\omega + \pi)\overline{\hat{u}(\omega + \pi)} = |\hat{u}(\omega + \pi)|^2$,

obdržíme hledanou podmínu

$$|\hat{u}(\omega)|^2 + |\hat{u}(\omega + \pi)|^2 = 2.$$

Jelikož identity byly odvozeny pomocí vztahu $(z * v)^\wedge(\omega) = \hat{z}(\omega)\hat{v}(\omega)$, který platí pro skoro všechna ω a jelikož $\hat{f}(\omega) \in L^2(-\pi, \pi)$, platí dokazovaná podmínka pro skoro všechna $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

■

2. Množiny $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a $\{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ jsou navzájem ortogonální právě tehdy, když

$$\hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)} + \hat{u}(\omega + \pi)\overline{\hat{v}(\omega + \pi)} = 0 \quad (4.5)$$

pro skoro všechna $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$.

Důkaz: Důkaz je analogický s předchozím bodem. Vyjdeme z předpokladu

$$\langle u, R_{2k}v \rangle = 0, \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{Z}.$$

Stejnými úpravami jako výše získáme

$$(u * \tilde{v})^\wedge(\omega) + ((u * \tilde{v})^*)^\wedge(\omega) = 0.$$

Identity mají tentokrát tvar

- $(u * \tilde{v})^\wedge(\omega) = \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}$,
- $((u * \tilde{v})^*)^\wedge(\omega) = \hat{u}(\omega + \pi)\overline{\hat{v}(\omega + \pi)}$.

Zpětným dosazením dostáváme dokazovanou podmínu, která z podobného důvodu jako podmínka v bodě 1 platí pro skoro všechna $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$.

■

Tato věta nám ukazuje waveletovou analýzu na první úrovni. Dokázali jsme, že množina $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální. Aby ale v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ tvořila bázi, musí být úplná. Trochu předběhneme a podíváme se na zpětnou rekonstrukci. Upravme vztah

$$\begin{aligned} (u * U \circ D(z * \tilde{u}))^\wedge(\omega) &= \left(u * \frac{1}{2} (z * \tilde{u} + (z * \tilde{u})^*) \right)^\wedge(\omega) = \\ &= \left[\frac{1}{2} (z * \tilde{u} * u) + \frac{1}{2} ((z * \tilde{u})^* * u) \right]^\wedge(\omega) = \frac{1}{2} \hat{z}(\omega) |\hat{u}(\omega)|^2 + \frac{1}{2} \hat{z}(\omega + \pi) \hat{u}(\omega) \overline{\hat{u}(\omega + \pi)}. \end{aligned}$$

Pomocí něj zapišme identitu

$$\begin{aligned} (u * U \circ D(z * \tilde{u}))^\wedge(\omega) + (v * U \circ D(z * \tilde{v}))^\wedge(\omega) &= \\ &= \frac{1}{2} \hat{z}(\omega) \underbrace{[|\hat{u}(\omega)|^2 + |\hat{v}(\omega)|^2]}_{=2} + \frac{1}{2} \hat{z}(\omega + \pi) \underbrace{[\hat{u}(\omega) \overline{\hat{u}(\omega + \pi)} + \hat{v}(\omega) \overline{\hat{v}(\omega + \pi)}]}_{=0}. \end{aligned}$$

Z této identity pomocí IFT dostaneme rekonstrukční rovnici

$$[u * U \circ D(z * \tilde{u}) + v * U \circ D(z * \tilde{v}) = z]. \quad (4.6)$$

Nyní formulujme a dokažme větu, která zaručí úplnost množiny $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Věta 4.3: Nechť $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pak $B = \{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální báze v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ právě tehdy, když přidružená matice $A(\omega)$ k této vektorům je unitární pro skoro všechna $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$.

Důkaz: Dle věty 4.2 jsou si unitárnost matice $A(\omega)$ pro skoro všechna $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$ a ortonormalita množiny B ekvivalentní, stačí nám tedy dokázat pouze úplnost množiny B . Důkaz úplnosti množiny provedeme sporem. Aby množina B nebyla úplná, musí existovat vektor $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $z \neq 0$, který je ortogonální na množinu B . To ale znamená, že

$$D(z * \tilde{u})(k) = \langle z, R_{2k}u \rangle = 0, \quad D(z * \tilde{v})(k) = \langle z, R_{2k}v \rangle = 0 \text{ pro každé } k \in \mathbb{Z}$$

a po dosazení do rekonstrukční rovnice (4.6) vyjde $z = 0$ což je spor s jeho nenulovostí.

■

Poznámka: Jelikož je množina B úplná a ortonormální, tvoří v $\ell^2(\mathbb{Z})$ ONB a rovnice (4.6) je rovnice perfektní rekonstrukce.

Definice 4.3: Nechť je množina $B = \{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ONB prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Pak definujme prostory V_1, W_1

$$V_1 = \overline{\mathcal{L}\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \quad W_1 = \overline{\mathcal{L}\{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}}.$$

$\overline{\mathcal{L}}$ značí uzavřený lineární obal.

Poznámka: Jelikož množina B je ONB, evidentně platí $V_1 \oplus W_1 = \ell^2(\mathbb{Z})$, neboli prostor W_1 je ortogonálním doplňkem V_1 v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Definice 4.4: Vektory u, v tvoří waveletový filtr 1. úrovně.

Následující větou ukážeme, jak pomocí vektoru u sestrojit vektor v .

Věta 4.4: Zvolme vektor $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tak, že množina $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální a sestrojme vektor $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Pak množina $B = \{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB v $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Důkaz: Dle věty 4.3 je množina B ONB právě tehdy, když je matice $A(\omega)$ pro skoro všechna $\omega \in \langle 0, \pi \rangle$ unitární. Ukažme nejprve, jak vypadá Fourierův obraz sestrojeného vektoru v .

$$\hat{v}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(n) e^{in\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{u(1-n)} e^{in\omega} =$$

Využitím rovnosti $e^{i\pi} = -1$ a přepsáním konjugované reflexe pokračujeme v úpravě

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n-1)+in\omega} \tilde{u}(n-1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\omega+\pi)-i\pi} \tilde{u}(n-1) =$$

Uděláme substituci $m = n - 1$ a vše nezávislé na m vytkneme před sumu

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{i(m+1)(\omega+\pi)-i\pi} \tilde{u}(m) = e^{i\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(m) e^{im(\omega+\pi)},$$

což je až na $e^{i\omega}$ FT konjugované reflexe v čase $\omega + \pi$. Poslední úpravou dostáváme

$$\hat{v}(\omega) = e^{i\omega} \overline{\hat{u}(\omega + \pi)}.$$

Substitucí $\omega = \omega + \pi$ dostáváme

$$\hat{v}(\omega + \pi) = -e^{i\omega} \overline{\hat{u}(\omega)}.$$

Dosazením do rovnic (4.4) a (4.5) ověříme unitárnost matice $A(\omega)$

$$\begin{aligned} |\hat{v}(\omega)|^2 + |\hat{v}(\omega + \pi)|^2 &= |e^{i\omega} \overline{\hat{u}(\omega + \pi)}|^2 + |-e^{i\omega} \overline{\hat{u}(\omega)}|^2 = |\hat{u}(\omega + \pi)|^2 + |\hat{u}(\omega)|^2 = 2, \\ \hat{u}(\omega) \overline{\hat{v}(\omega)} + \hat{u}(\omega + \pi) \overline{\hat{v}(\omega + \pi)} &= \hat{u}(\omega) \overline{e^{i\omega} \hat{u}(\omega + \pi)} + \hat{u}(\omega + \pi) \overline{-e^{i\omega} \hat{u}(\omega)} = \\ &= e^{-i\omega} \hat{u}(\omega) \hat{u}(\omega + \pi) - e^{-i\omega} \hat{u}(\omega + \pi) \hat{u}(\omega) = 0. \end{aligned}$$

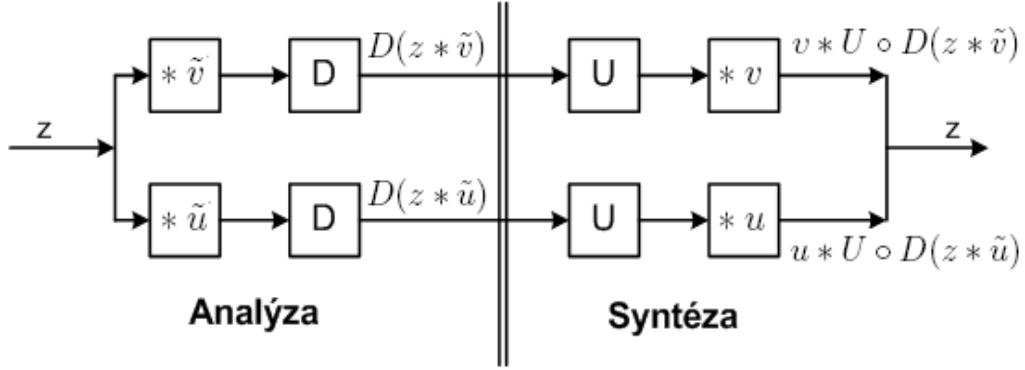
Unitárnost je tedy splněna.

■

Než se zaměříme na vyšší úrovně waveletové analýzy, vysvětlemo 1. úroveň prakticky. Máme měřený diskrétní signál $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$, což neznamená nic jiného, než že signál z přenáší konečnou energii. Tento signál analyzujeme waveletovými filtry u, v , čímž dostaneme vektory dva: $z_u = D(z * \tilde{u})$ a $z_v = D(z * \tilde{v})$. Tyto vektory jsou vektory koeficientů rozvoje vektoru z vzhledem k bázím $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a $\{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (viz vztah (4.3)). Evidentně $z_u \in V_1$ a $z_v \in W_1$. Jedná se vlastně o ortogonální projekci vektoru z do prostorů V_1 a W_1 . Syntéza pak probíhá podle vztahu (4.6).

4.2 Waveletová báze p -té úrovně

Uved'me větu, která je základem konstrukce waveletů na p -té úrovni.



Obrázek 4.1: Analýza a syntéza vektoru z na první úrovni

Věta 4.5: Nechť $g_{l-1} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, kde $l-1 \in \mathbb{N}$ je takový vektor, že množina $\{R_{2^{l-1}k}g_{l-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Nechť $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ je waveletový filtr v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ na 1. úrovni a nechť

$$f_l = g_{l-1} * U^{l-1}(v), \quad g_l = g_{l-1} * U^{l-1}(u).$$

Pak množina $\{R_{2^l k} f_l\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2^l k} g_l\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Důkaz: Z vlastností $(U(z))^\sim = U(\tilde{z})$ a $(z + w)^\sim = \tilde{z} + \tilde{w}$ plyne, že $\tilde{f}_l = \tilde{g}_{l-1} * U^{l-1}(\tilde{v})$. Ortonormalitu ověříme úpravou vztahu

$$\langle f_l, R_{2^l k} f_l \rangle = f_l * \tilde{f}_l(2^l k) = [(g_{l-1} * U^{l-1}(v)) * (\tilde{g}_{l-1} * U^{l-1}(\tilde{v}))](2^l k) =$$

Díky komutativitě konvoluce a vlastnosti $U(z * w) = U(z) * U(w)$ můžeme pokračovat

$$= [g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1} * U^{l-1}(v * \tilde{v})](2^l k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^l k - m) \cdot [U^{l-1}(v * \tilde{v})](m).$$

Jelikož ale vektor $U^{l-1}(v * \tilde{v})(m)$ má nenulový pouze každý 2^{l-1} -tý koeficient, stačí psát

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^l k - 2^{l-1}m) \cdot [U^{l-1}(v * \tilde{v})](2^{l-1}m) =$$

a po aplikaci operátoru U dostáváme

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^{l-1}(2k - m)) \cdot (v * \tilde{v})(m).$$

Víme, že platí

$$(g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^{l-1}(2k-m)) = \langle g_{l-1}, R_{2^{l-1}(2k-m)}g_{l-1} \rangle = \delta_{m,2k}$$

a tedy

$$\langle f_l, R_{2^l k} f_l \rangle = v * \tilde{v}(2k) = \langle v, R_{2k} v \rangle.$$

Analogická rovnost platí samozřejmě i pro vektor g_l a tímto dostáváme, že množiny $\{R_{2^l k} f_l\}$ a $\{R_{2^l k} g_l\}$ jsou ortonormální. Můžeme psát

$$\langle f_l, R_{2^l k} f_l \rangle = \langle g_l, R_{2^l k} g_l \rangle = \delta_{k,0}.$$

Stejně odvodíme i vzájemnou ortogonalitu.

$$\begin{aligned} \langle f_l, R_{2^l k} g_l \rangle &= f_l * \tilde{g}_l(2^l k) = [g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1} * U^{l-1}(v * \tilde{u})](2^l k) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^l k - 2^{l-1}m) \cdot [U^{l-1}(v * \tilde{u})](2^{l-1}m). \end{aligned}$$

Z důvodu $(g_{l-1} * \tilde{g}_{l-1})(2^{l-1}(2k-m)) = \delta_{m,2k}$ a z ortonormálnosti množiny $\{R_{2k} u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k} v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ můžeme psát

$$\langle f_l, R_{2^l k} g_l \rangle = \langle v, R_{2k} u \rangle = 0, \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{Z}.$$

Tím je věta kompletne dokázána.

■

Podívejme se nyní, jak zde vypadají prostory approximací a detailů.

Definice 4.5: Nechť vektory u, v, g_{l-1}, g_l, f_l jsou z předchozí věty. Definujme prostory:

$$V_{-l} = \overline{\mathcal{L}\{R_{2^l k} g_l\}_{k \in \mathbb{Z}}}, \quad W_{-l} = \overline{\mathcal{L}\{R_{2^l k} f_l\}_{k \in \mathbb{Z}}} \text{ pro každé } l \in \mathbb{N}.$$

Věta 4.6: Platí $V_{-l} \oplus W_{-l} = V_{-l+1}$.

Důkaz: Již jsme ukázali, že množina $\{R_{2^l k} f_l\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2^l k} g_l\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální, tedy nutně platí $V_{-l} \perp W_{-l}$. Nyní dokážeme, že V_{-l} a W_{-l} jsou podmnožinami prostoru V_{-l+1} . Upravme

$$R_{2^l k} f_l(n) = f_l(n - 2^l k) = [g_{l-1} * U^{l-1}(v)](n - 2^l k) =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{l-1}(n - 2^l k - m) U^{l-1}(v)(m) =$$

a opět z nenulovosti pouze každého 2^{l-1} -tého koeficientu vektoru $U^{l-1}(v)(m)$ můžeme psát

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{l-1}(n - 2^l k - 2^{l-1} j) U^{l-1}(v)(2^{l-1} j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v(j) R_{2^{l-1}(j+2k)} g_{l-1}(n).$$

Substitucí $m = j + 2k$ dostáváme rovnost

$$R_{2^l k} f_l(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v(m - 2k) R_{2^{l-1} m} g_{l-1}(n),$$

což po zobecnění pro každé $k \in \mathbb{Z}$ říká, že prostor $W_{-l} \subset V_{-l+1}$. Podobně odvodíme

$$R_{2^l k} g_l(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m - 2k) R_{2^{l-1} m} g_{l-1}(n)$$

a tedy i $V_{-l} \subset V_{-l+1}$, ve výsledku můžeme psát $V_{-l} \oplus W_{-l} \subseteq V_{-l+1}$. Musíme ale ještě dokázat, že $V_{-l+1} \subseteq V_{-l} \oplus W_{-l}$. Definujme standardní bázi $\{e_j(m)\}_{j \in \mathbb{Z}}$

$$e_j(m) = \delta_{m,j} \text{ pro každé } j \in \mathbb{Z}.$$

Pak můžeme psát

$$e_j(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_j, R_{2k} v \rangle R_{2k} v(m) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_j, R_{2k} u \rangle R_{2k} u(m) \text{ pro každé } m \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

Jelikož platí

$$\langle e_j, R_{2k} v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_j(n) \overline{v(n - 2k)} = \overline{v(j - 2k)} = \tilde{v}(2k - j)$$

a analogicky

$$\langle e_j, R_{2k} u \rangle = \tilde{u}(2k - j),$$

můžeme dosazením do (4.8) psát

$$e_j(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(2k - j) v(m - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(2k - j) u(m - 2k). \quad (4.9)$$

Nyní se již podívejme na jádro důkazu. Vztah

$$R_{2^{l-1} j} g_{l-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e_j(m) R_{2^{l-1} m} g_{l-1} =$$

upravíme dosazením vztahu (4.9) na

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j)v(m-2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j)u(m-2k) \right) R_{2^{l-1}m}g_{l-1} =$$

Rozdělením sum obdržíme

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j) \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} v(m-2k) R_{2^{l-1}m} g_{l-1}}_{R_{2^l k} f_l} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j) \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m-2k) R_{2^{l-1}m} g_{l-1}}_{R_{2^l k} g_l} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{v}(2k-j) R_{2^l k} f_l + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(2k-j) R_{2^l k} g_l. \end{aligned}$$

Tedy $R_{2^{l-1}j}g_{l-1} \in V_{-1} \oplus W_{-l}$ pro každé $j \in \mathbb{Z}$. Z toho již plyne $V_{-l+1} \subseteq V_{-1} \oplus W_{-l}$, což jsme chtěli dokázat.

■

Konečně se dostáváme k definici waveletové báze na p -té úrovni.

Definice 4.6: Waveletová báze

Nechť $p \in \mathbb{N}$ a nechť $f_1, \dots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$ je taková posloupnost vektorů, že množina

$$B = \{R_{2k}f_1\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{4k}f_2\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \dots \cup \{R_{2^p k}f_p\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2^p k}g_p\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

je ONB prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Pak množinu B nazveme waveletovou bází prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ na p -té úrovni, její prvky wavelety a vektory $f_i, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $i = 1, \dots, p$, generátory této báze.

Věta 4.7: Nechť $p \in \mathbb{N}$ a nechť $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z})$ jsou dvojice waveletových filtrů pro každé $l = 1, \dots, p$, (přidružená matice $A(\omega)$ ke každé dvojici je unitární pro skoro všechna $\omega \in (0, \pi)$). Sestrojme posloupnost dvojic $\{f_l, g_l\}$, $f_l, g_l \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $l = 1, \dots, p$, takto:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1, \quad g_1 = u_1 \\ a \text{ pro } l &= 2, \dots, p : \\ f_l &= g_{l-1} * U^{l-1}(v_l), \quad g_l = g_{l-1} * U^{l-1}(u_l). \end{aligned}$$

Pak $f_l, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $l = 1, \dots, p$, jsou generátory waveletové báze v prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Důkaz: Dle definice 4.5 je $V_{-j} = \overline{\mathcal{L}\{R_{2^j k}g_j\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ a $W_{-j} = \overline{\mathcal{L}\{R_{2^j k}f_j\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ pro $j = 1, \dots, p$.

Nyní již z věty 4.6, jejího důkazu a z definice waveletové báze dostáváme:

$$\begin{aligned} V_{-p} &\subset V_{p-1} \subset \cdots \subset V_{-1}, \\ W_{-p} \oplus V_{-p} &= V_{-p+1}, \\ &\dots \\ W_{-1} \oplus V_{-1} &= \ell^2(\mathbb{Z}), \\ W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \cdots \oplus W_{-p} \oplus V_{-p} &= \ell^2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

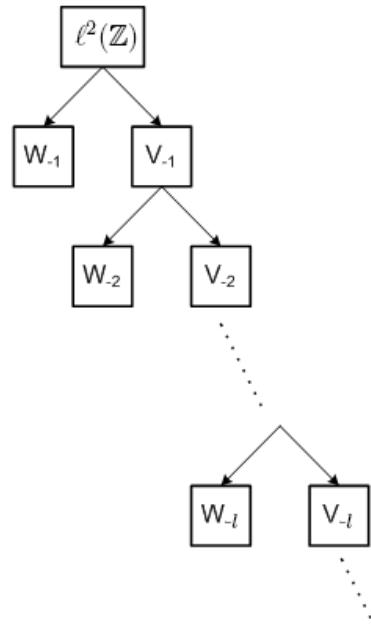
což tvrdí věta.

■

Poznámka: Uvědomme si, že díky nekonečnosti prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ můžeme psát

$$W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \cdots \oplus W_{-j} \oplus \cdots = \ell^2(\mathbb{Z}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

To je jeden z rozdílů od waveletové analýzy na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$, které byly zmíněny na začátku kapitoly. Rozdělení prostoru dle důkazu věty 4.7 se nazývá **multirezoluční analýza** (MRA) prostoru a její princip je na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: MRA prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$

Poznámka: Standardní označení pro wavelety.

V literatuře se používá značení

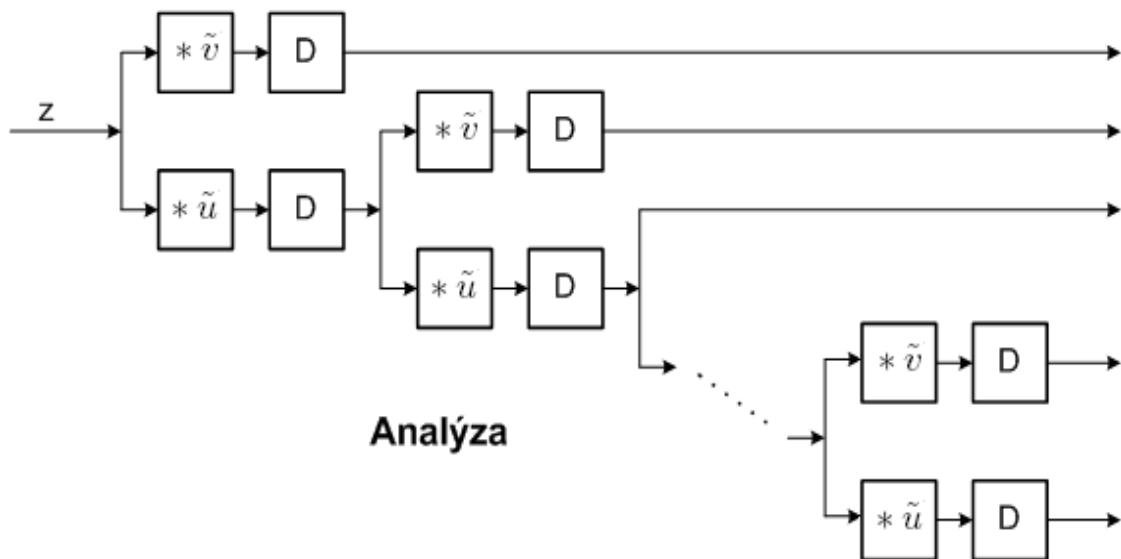
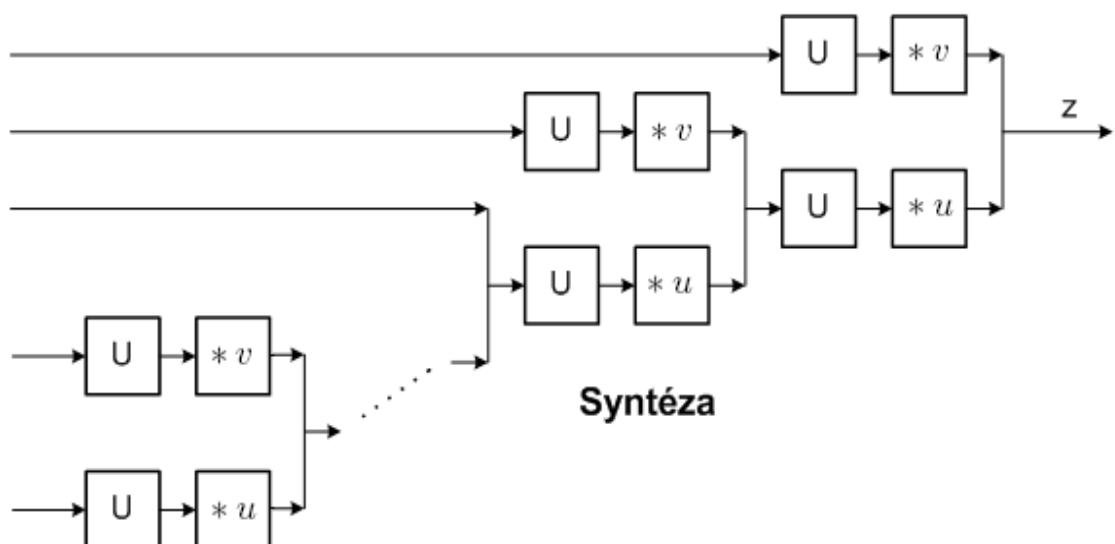
$$\psi_{-j,k} = R_{2^j k} f_j, \quad \varphi_{-j,k} = R_{2^j k} g_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad p = 1, \dots, +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vektory u_j, g_j , resp. $\varphi_{-j,k}$ se nazývají **otcův wavelet** nebo *filtr* a generují prostory V_{-j} .

Vektory v_j, f_j , resp. $\psi_{-j,k}$ se nazývají **matčin wavelet** nebo jen *wavelet* a generují prostory W_{-j} .

V závěru kapitoly shrneme podstatné. V analýze na 1. úrovni jsme celý prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$ rozdělili na 2 rovnocenné, navzájem kolmé podprostory V_{-1} a W_{-1} . Pro obecný rozklad je ale potřeba rozlišit, jelikož při další analýze jeden z nich dělíme stejným způsobem na prostory V_{-2} a W_{-2} a takto pokračujeme až do p -té úrovně. Zvolili jsme (viz. věta 4.6), že dělit se bude vždy podprostor V_{-j} a podle toho jsme jej nazvali *prostor approximací*. Prostor W_{-j} jsme nazvali *prostor detailů*. Rekonstrukce probíhá zpětně rekurzivní aplikací rovnice perfektní rekonstrukce (4.6).

Celý princip waveletové analýzy můžeme naznačit i následovně. Analyzovaný (nekonečný) vektor (z $\ell^2(\mathbb{Z})$) rozložíme na approximaci 1. úrovně (ortogonální projekce do prostoru approximací V_{-1}) a detaily 1. úrovně (ortogonální projekce do prostoru detailů W_{-1}). Následně vezmeme pouze approximaci 1. úrovně a rozložíme ji na approximaci a detaily 2. úrovně. Opět se jedná o ortogonální projekci, nyní ale na prostory V_{-2} a W_{-2} . Takto pokračujeme až do p -té úrovně. Zpětná rekonstrukce je pouze rekurzivní výpočet analyzovaného vektoru z approximace a detailů nejnižší úrovně, které máme k dispozici.


 Obrázek 4.3: Obecná analýza vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$

 Obrázek 4.4: Obecná rekonstrukce vektoru $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$

Kapitola 5

Fourierova transformace na prostoru $L^2(\mathbb{R})$

5.1 Fourierova transformace na prostoru $L^1(\mathbb{R})$

Definice 5.1: FT na prostoru $L^1(\mathbb{R})$.

Fourierovu transformaci funkce $f \in L^1(\mathbb{R})$ označme \hat{f} a definujme jí předpisem

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Inverzní Fourierovu transformaci funkce $g \in L^1(\mathbb{R})$ označme \check{g} a definujme jí předpisem

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definice 5.2: Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$. Řekněme, že bod $x \in \mathbb{R}$ je Lebesgueovým bodem této funkce, jestliže platí

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-h}^{+h} |f(x-y) - f(x)| dy = 0.$$

Vlastnosti: Jestliže $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak platí

1. Skoro všechny body v \mathbb{R} jsou Lebesgueovými body funkce f (až na množinu míry nula).
2. Každý bod spojitosti funkce f je jejím Lebesgueovým bodem.

Poznámka: Další vlastnosti FT a IFT platí pouze pro Lebesgueovy body funkce.

Pro zdůraznění této skutečnosti budeme říkat, že platí **skoro všude**. Můžeme tedy zavést implikaci

$$\text{platí v Lebesgueově bodě} \Rightarrow \text{platí skoro všude.}$$

Věta 5.1: Věta o IFT.

Nechť $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pak v každém Lebesgueově bodě funkce f platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt = f(t).$$

Věta 5.2: Věta o jednoznačnosti FT.

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ a $\hat{f} = \hat{g}$ skoro všude. Pak platí $f = g$ skoro všude.

Důkaz: Věta je důsledkem věty předchozí. Jelikož $\hat{f} = \hat{g}$, tak $\hat{f} - \hat{g} = (f - g)^{\wedge} = 0$. Ale potom platí $0 = \check{0} = ((f - g)^{\wedge})^{\wedge} = f - g$, neboli $f = g$.

■

V následující větě shrňme základní vlastnosti FT.

Věta 5.3: Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, nechť \hat{f}, \hat{g} jsou jím příslušné Fourierovy obrazy a nechť $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Symbolem \simeq značme příslušnost funkce a jejího Fourierova obrazu. Pak platí:

1. Jestliže $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, pak $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

2. **Linearita:**

$$\alpha f + \beta g \simeq \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}.$$

3. **Posun v čase:**

$$f(t - a) \simeq e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega).$$

4. **Změna měřítka:**

$$f(at) \simeq \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

5. **Posun ve frekvenci:**

$$e^{iat} f(t) \simeq \hat{f}(\omega - a).$$

6. Komplexně sdružený obraz:

$$\overline{f(-t)} \simeq \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

7. Plancherelova formule:

$$\|\hat{f}\| = \sqrt{2\pi}\|f\|,$$

z níž plyne rovnost

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle.$$

8. Obraz derivace:

Nechť $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pak Fourierův obraz derivace je:

$$(f^{(n)})^\wedge(t) \simeq (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

Lema 1: Riemannovo-Lebesgueovo lema

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak \hat{f} je spojitá a platí

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

5.2 Základní operátory a jejich vlastnosti

Podívejme se na již známé operátory konvoluce, translace a konjugované reflexe.

Definice 5.3:

1. Konvoluce.

Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ jsou takové funkce, že $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy < +\infty$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$. Množinu všech takových x označme \mathcal{K} . Definujme konvoluci funkcí f, g předpisem

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, & \text{pro } x \in \mathcal{K}, \\ 0, & \text{pro ostatní hodnoty } x. \end{cases}$$

2. Translace.

Pro $y \in \mathbb{R}$ definujme operátor translace $R_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $R_y f(x) = f(x - y)$.

3. Konjugovaná reflexe.

Konjugovanou reflexi funkce f značíme \tilde{f} a je dána předpisem

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}.$$

Základní vlastnosti těchto operátorů na spojitéch prostorech shrneme do věty.

Věta 5.4:

1. Existují $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ tak, že $f * g \notin L^2(\mathbb{R})$.

2. Konvoluce funkcí $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je komutativní

$$f * g = g * f.$$

3. Nechť $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ a $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$, pak

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

4. Neexistuje $\delta \in L^2(\mathbb{R})$ tak, že pro každé $f \in L^2(\mathbb{R})$ platí $\delta * f = f$.

5. Nechť $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned} \langle R_x f, R_y g \rangle &= \langle f, R_{y-x} g \rangle, \\ \langle f, R_y g \rangle &= f * \tilde{g}(y). \end{aligned}$$

5.3 Fourierova transformace na prostoru $L^2(\mathbb{R})$

Definujme FT na prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Označme $\mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ množinu všech komplexních diferencovatelných funkcí (tzn. funkce $f \in \mathbb{C}_C^\infty$ má všechny derivace) s konečným nosičem. Pro prostory $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ platí $\mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}), \mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Pak můžeme formulovat větu:

Věta 5.5: Nechť $f \in \mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R})$. Pak platí

1.

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

2.

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2.$$

Důkaz:

1. Jelikož $f(t) \in \mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, pak i $f''(t) \in \mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ a platí

$$(f'')^\wedge(t) = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega).$$

Dle Riemannova-Lebesgueova lematu platí $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \omega^2 \hat{f}(\omega) = 0$. Z toho vyplývá, že musí existovat konstanta $c > 0$ taková, že $|\omega^2 \hat{f}(\omega)| < c$, tudíž $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{c}{\omega^2}$.

Potom ale

$$\int_1^\infty |\hat{f}(\omega)| d\omega \leq \int_1^\infty \frac{c}{\omega^2} d\omega < \infty$$

a poněvadž je funkce $\hat{f}(\omega)$ omezená na intervalu $(-1, 1)$, je $(f'')^\wedge(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Dále dle bodu 1 věty 5.3 jelikož $f(t), \hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ a důkaz je hotov.

2. Vyjdeme z vlastnosti $\overline{f(-t)} \simeq \overline{\hat{f}(\omega)}$. Položme $h(t) = f(t) * \tilde{f}(-t)$. Můžeme psát

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{f(s-t)} ds.$$

Pro obraz funkce $h(t)$ platí

$$\hat{h}(t) = \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2$$

a podle věty 5.1 o IFT obdržíme identitu

$$\int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{f(s-t)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{i\omega t} dt \quad v \text{ každém bodě spojitosti.}$$

Konkrétně pro $t = 0$ dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 dt,$$

odkud

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

■

Věta 5.6: Věta o approximaci.

1. Pro každou funkci $f \in L^2(\mathbb{R})$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje funkce $g \in \mathbb{C}_C^\infty$ taková, že

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

2. Pro každou funkci $f \in L^1(\mathbb{R})$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje funkce $g \in \mathbb{C}_C^\infty$ taková, že

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Dle věty o approximaci existuje posloupnost $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že $g_n \in \mathbb{C}_C^\infty$, $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$ a že g_n konverguje k $f \in L^2(\mathbb{R})$ v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pak můžeme formulovat větu.

Věta 5.7: Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$ a nechť $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je taková posloupnost, že $f_n \in \mathbb{C}_C^\infty$ a $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ pro každé n a $f_n \rightarrow f$ v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pak

1. Posloupnost $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k nějakému F v prostoru $L^2(\mathbb{R})$.
2. Nechť $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je jiná posloupnost taková, že $g_n \in \mathbb{C}_C^\infty$ a $\hat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$ pro každé n a $g_n \rightarrow f$ v prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Dle části 1 konverguje $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ k nějaké funkci $G \in L^2(\mathbb{R})$. Pak $G = F$.
3. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ a nechť F je dle části 1. Pak $F = \hat{f}$.

Důkaz:

1. Jelikož $f_n(t) \in \mathbb{C}_C^\infty \subset L^1(\mathbb{R})$ a $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ pro každé n , pak dle věty 5.3 platí $\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ pro každé n . Dále jelikož posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v $L^2(\mathbb{R})$, je v tomto prostoru cauchyovská a dle věty 5.5 platí

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_m\| \text{ pro každé } m, n \in \mathbb{N}.$$

Proto posloupnost $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je také cauchyovská v $L^2(\mathbb{R})$ a jelikož prostor $L^2(\mathbb{R})$ je Hilbertův, existuje v něm nějaké $F \in L^2(\mathbb{R})$ takové, že $\hat{f}_n \rightarrow F$.

2. Dle trojúhelníkové nerovnosti můžeme psát

$$\|F - G\| \leq \|F - \hat{f}_n\| + \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| + \|\hat{g}_n - G\| \text{ pro každé } n \in \mathbb{N},$$

kam můžeme dosadit dle věty 5.5

$$\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - g_n\| \leq \sqrt{2\pi} (\|f_n - f\| + \|f - g_n\|) \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Limitou pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme $\|F - G\| = 0$, neboli $F = G$.

3. Důkaz poslední části věty je příliš složitý, a proto jej zde nebudeme uvádět. Zájemce jej nalezne včetně důkazů předešlých bodů v (Frazier, 1999).

■

Definice 5.4: Nechť $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sestrojme posloupnost $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}_C^\infty(\mathbb{R})$ tak, že $f_n \rightarrow f$. Definujme Fourierovu transformaci funkce f

$$\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n,$$

kde $\hat{f}_n = (f_n)^\wedge$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Analogicky definujme i inverzní Fourierovu transformaci jako limitu posloupnosti $\{\check{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Poznámka: Věta 5.7 říká, že v $L^2(\mathbb{R})$ existuje limita posloupnosti $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (bod 1) a že tato limita je nezávislá na výběru posloupnosti $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (bod 2). Tudíž \hat{f} je definována jednoznačně. Navíc v případě, že $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ nám věta 5.7 zaručuje, že \hat{f} dle definice 5.4 je stejná jako dle definice 5.1 (bod 3).

Nyní můžeme k vlastnostem operátorů konvoluce, translace a konjugované reflexe přidat vlastnosti:

1. Nechť $g \in L^1(\mathbb{R})$ a $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Pak

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}.$$

2. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Pak

$$(\tilde{f})^\wedge(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$.

Kapitola 6

Waveletová báze na prostoru $L^2(\mathbb{R})$

6.1 MRA prostoru $L^2(\mathbb{R})$

Multirezoluční analýza (MRA) prostoru je základní princip waveletové analýzy. MRA na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ je naznačena v důkazu věty 4.7. V prostoru $L^2(\mathbb{R})$ je zkonstruována podobně, ale pro úplnost uvedeme, jak vypadá.

Definice 6.1: Posloupnost uzavřených podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ tvoří multirozklad (MRA) prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pokud jsou splněny následující podmínky:

1. **Monotónnost:**

Posloupnost prostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je neklesající, tj.

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \text{pro všechna } j \in \mathbb{Z}.$$

2. **Existence škálové funkce:**

Existuje škálová funkce $\varphi \in V_0$ taková, že posloupnost $\{R_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB v prostoru V_0 , kde R_k je (stejně jako v kapitole 3) operátor translace, tedy platí

$$R_k \varphi(t) = \varphi(t - k) \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}.$$

Takovou funkci φ nazýváme též *otcovský wavelet*.

Poznámka: Uvědomme si, že potom každou funkci $f \in V_0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(k) R_k \varphi, \quad z = (z(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

kde z je posloupnost koeficientů funkce f vůči bázi $\{R_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

3. Dilatace:

Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_j.$$

4. Průnik:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

5. Hustota:

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Analogicky s MRA prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ definujme i prostory W_j .

Definice 6.2: Nechť posloupnost podprostorů $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tvoří MRA prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pak posloupnost podprostorů $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ je definována tak, že

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \text{ pro všechna } j \in \mathbb{Z}.$$

Poznámka: To znamená, že každá funkce $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ lze jednoznačně vyjádřit jako součet funkcí $f_j(t) \in V_j$ a $g_j(t) \in W_j$, kde $f_j(t), g_j(t)$ jsou ortogonální projekce funkce $f_{j+1}(t)$ do příslušných prostorů. Evidentně platí $V_j \perp W_j$ a kvůli monotónnosti MRA platí také $W_j \perp W_k$ pro každé $j \neq k, j, k \in \mathbb{Z}$.

Definovali jsme, že pokud posloupnost $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tvoří MRA prostoru $L^2(\mathbb{R})$, pak existuje škálovací funkce φ taková, že množina funkcí $\{R_k \varphi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB v prostoru V_0 . Později se ukáže, že pokud existuje funkce $\varphi \in V_0$, pak existuje funkce $\psi \in W_0$ taková, že množina $\{R_k \psi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tvoří ONB v prostoru W_0 . Funkci ψ nazveme *mateřský wavelet*.

Definice 6.3: Nechť množina $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$,

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k),$$

je pro nějaké $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ONB prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Pak tuto množinu nazýváme waveletová báze prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Podobně definujme množinu $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k),$$

která ale netvoří ONB prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Poznámka: Pokud ale pro dané j (úroveň, level) vezmeme množinu $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, tvoří tato množina ONB prostoru V_j .

Poznámka: Parametry funkcí $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$ zahrnují posun i změnu měřítka. Faktor $2^{\frac{j}{2}}$ je v definici kvůli zachování normy:

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(t)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} 2^j |\psi(2^j t - k)|^2 dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2^j}{2^j} |\psi(2^j t - k)|^2 2^j dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = \|\psi(t)\|^2. \end{aligned}$$

Tímto můžeme považovat výklad multirozkladu prostoru $L^2(\mathbb{R})$ za ukončený a podívejme se podrobněji na konstrukci waveletové báze.

6.2 Konstrukce waveletové báze

Konstrukce waveletové báze na prostoru $L^2(\mathbb{R})$ je v převážné míře založena na Plancherelově formuli, která říká, že pokud jsou funkce $f(t), g(t)$ kolmé, pak jsou kolmé i jejich obrazy $\hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega)$. To nám umožní budovat waveletovou teorii na $L^2(\mathbb{R})$ ve frekvenční oblasti.

Předpokládejme, že posloupnost $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ tvoří MRA prostoru $L^2(\mathbb{R})$ a tedy existuje škálovací funkce φ . Zabývejme se nyní, jak z otcovského waveletu φ získat materšský wavelet ψ .

6.2.1 Nízkofrekvenční (low-pass) filtr a jeho vlastnosti

Vezměme škálovací funkci $\varphi \in V_0 \subset V_1$. Jelikož víme, že ONB prostoru V_1 je množina $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, můžeme φ rozepsat podle báze $\varphi_{1,k}$

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \varphi_{1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \varphi_{1,k}, \quad (6.1)$$

kde $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ se nazývá **škálovací posloupnost**. Platí

$$\varphi_{1,k} = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \Big|_{j=1} = \sqrt{2} \varphi(2t - k).$$

Fourierovou transformací převedeme do frekvenční oblasti

$$(\varphi(2t - k))^{\wedge}(\omega) = e^{-ik\omega} (\varphi(2t))^{\wedge}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

a můžeme psát

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sqrt{2} \varphi(2t - k) \right)^{\wedge}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (6.2)$$

Definice 6.4: Nízkofrekvenční filtr (low-pass filter)

Nechť $\varphi \in V_0 \subset V_1$ a nechť množina $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB prostoru V_1 . Pak definujme nízkofrekvenční (low-pass) filtr

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}_k(-\omega), \quad (6.3)$$

kde $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Poznámka: Filtr $m_0(\omega)$ je z prostoru $L^2(-\pi, \pi)$. Díky exponenciální funkci ve vztahu 6.3 je funkce $m_0(\omega)$ definována pro všechna $\omega \in \mathbb{R}$ a je 2π -periodická. Sloučením těchto faktů můžeme psát i $m_0(\omega) \in L^2(0, 2\pi)$.

Vztah (6.2) můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(6.4)

Vztah (6.4) se nazývá **škálovací identita**.

Abychom mohli ukázat vlastnosti nízkofrekvenčního filtru, uved'me nejprve důležitou větu o ortogonalitě posloupnosti $(g(t - k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$, $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Věta 6.1: Nechť $g \in L^2(\mathbb{R})$ a $\Delta > 0$. Posloupnost posunů $(g(t - k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální právě tehdy, když platí identita

$$P(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{g} \left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta} l \right) \right|^2 = \Delta \text{ pro skoro všechna } \omega \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Funkce $P(\omega)$ je periodická s periodou $\frac{2\pi}{\Delta}$.

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že platí identita $P(\omega) = \Delta$ a dokažme ortonormalitu posloupnosti $(g(t - k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$. Aby posloupnost $(g(t - k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$ byla ortonormální, musí platit

$$\langle g(t), g(t - k\Delta) \rangle = \delta_{0,k}. \quad (6.5)$$

Rozepsáním skalárního součinu dostaváme

$$\langle g(t), g(t - k\Delta) \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) \overline{g(t - k\Delta)} dt =$$

a díky Plancherelově formuli přepíšeme do frekvenční oblasti

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega) \overline{e^{-ik\Delta\omega} \hat{g}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} e^{ik\Delta\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)|^2 e^{ik\Delta\omega} d\omega = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{l\frac{2\pi}{\Delta}}^{(l+1)\frac{2\pi}{\Delta}}}_{\int_{\mathbb{R}}} |\hat{g}(\omega)|^2 e^{ik\Delta\omega} d\omega = \end{aligned}$$

Provedeme substituci $\omega = \omega + \frac{2\pi}{\Delta} l$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} \left| \hat{g} \left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta} l \right) \right|^2 e^{ik\Delta\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{g} \left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta} l \right) \right|^2 e^{ik\Delta\omega} d\omega.$$

Dosad'me identitu $P(\omega) = \Delta$. Pro $k = 0$ dostaváme

$$\langle g(t), g(t - k\Delta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} \Delta d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{2\pi}{\Delta} = 1$$

a pro $k \neq 0$ dostaváme

$$\begin{aligned} \langle g(t), g(t - k\Delta) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} \Delta e^{ik\Delta\omega} d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{1}{ik\Delta} \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} ik\Delta e^{ik\Delta\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{k2\pi i} \left[e^{ik\Delta\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\Delta}} = \frac{1}{k2\pi i} (\underbrace{e^{k2\pi i}}_1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Tím je dokázána první implikace. Postup ale lze i otočit a ukázat, že vztah (6.5) platí pouze tehdy, když $P(\omega) = \Delta$.

■

Důsledek: Pro speciální případ $\Delta = 1$ je posloupnost $(g(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ortonormální právě tehdy, když

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega + 2\pi l)|^2 = 1 \text{ pro skoro všechna } \omega \in \mathbb{R}.$$

Podívejme se nyní na vlastnosti filtru. Posloupnost $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB prostoru V_0 . Tzn., že dle věty 6.1 platí

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \text{ pro skoro všechna } \omega \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Rozepsáním dle škálovací identity

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 =$$

a rozdelením sumy na součty sudých a lichých členů

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2 \cdot \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2k\pi\right) \right|^2.$$

Využitím platnosti (6.6) na skoro všech frekvencích a periodicity funkce $m_0(\omega)$ dostáváme

$$\left| m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 = 1 \text{ pro skoro všechna } \omega \in \mathbb{R}$$

a z důvodu platnosti na skoro všech frekvencích můžeme psát

$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$

(6.7)

opět pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$.

Dosadíme-li za $m_0(\omega)$ dle vztahu (6.3), dostaneme identitu

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}(\omega) \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}(\omega + \pi) \right|^2 = 1,$$

neboli

$$|\hat{u}(\omega)|^2 + |\hat{u}(\omega + \pi)|^2 = 2 \text{ pro skoro všechna } \omega \in \mathbb{R},$$

což dle věty 4.2 znamená, že množina $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální v $\ell^2(\mathbb{Z})$. Potom dle věty 4.4 můžeme spočítat takovou funkci $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$v(k) = (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)},$$

že množina $\{R_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{R_{2k}v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tvoří ONB prostoru V_0 . Analogicky s (6.1) a (6.2) můžeme psát

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \varphi_{1,k}, \quad (6.8)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (6.9)$$

Nyní můžeme definovat filtr

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) e^{-ik\omega}, \quad (6.10)$$

kde dle (6.8) $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle \psi, \varphi_{1,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$. Dále dle (6.9) platí identita

$$\boxed{\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),} \quad (6.11)$$

podle níž a podle ortogonality množiny $(\psi(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ platí

$$\boxed{|m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1} \quad (6.12)$$

pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$. Z identit (6.7), (6.12) a z kolmosti funkcí u, v (tedy i filtrů m_0, m_1) plyne, že matice

$$A = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

je unitární pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$.

Ještě se podívejme na vztah mezi filtry m_0 a m_1 . Do vztahu (6.10) pro filtr m_1 dosad'me dle vztahu 4.7.

$$m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{u(1-k)} e^{-ik\omega} =$$

Využitím platnosti $-1 = e^{-i\pi}$ a substitucí $k - 1 = -m, k = -m + 1$ upravujeme dále

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ik\pi} e^{-ik\omega} \tilde{u}(k-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-ik(\omega+\pi)} \tilde{u}(k-1) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{im(\omega+\pi)} e^{-i\omega} \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1} \tilde{u}(-m) = e^{-i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{u}(-m) e^{im(\omega+\pi)} = \\
 &= e^{-i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{u(m) e^{-im(\omega+\pi)}} = e^{-i\omega} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(m) e^{-im(\omega+\pi)}}_{\overline{m_0(\omega+\pi)}}.
 \end{aligned}$$

Odtud již plyne hledaný vztah

$$\boxed{m_1(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)}} \quad (6.14)$$

Nyní se vraťme ke škálovací identitě (6.4). Podle ní platí

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

To můžeme ale dosadit do (6.4) a dostáváme

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Takto můžeme rekurzivně pokračovat, až pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ obdržíme

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdots m_0\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right).$$

Předpokládejme konvergenci tohoto nekonečného součinu. Potom pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right),$$

kde zároveň požadujeme, aby $\hat{\varphi}$ bylo spojité v 0. Triviální řešení této rovnice je $\hat{\varphi}(0) = 0$, které ale implikuje $\hat{\varphi}(\omega) = 0$ pro každé $\omega \in \mathbb{R}$. Netriviální řešení tedy musí splňovat $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Později uvidíme, že aby množina $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ byla ortonormální, musí být $|\hat{\varphi}(0)| = 1$. Předpokládejme tedy, že $\hat{\varphi}(0) = 1$ a potom

$$\boxed{\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} \quad (6.15)$$

Podobným postupem obdržíme

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right) =$$

$$= m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) m_0\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdots m_0\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}.$$

Opět předpokládáme konvergenci nekonečného součinu a $\hat{\varphi}(0) = 1$. Dostáváme

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=2}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

(6.16)

6.2.2 Waveletové filtry

V předchozí podkapitole jsme naznačili, jak se waveletové filtry na jednotlivých úrovních dají sestrojit. V této kapitole ukážeme, jak vypadá obecný tvar waveletových filtrů na prostorech $V_j, W_j, j \in \mathbb{Z}$.

Podívejme se nejprve na prostor V_0 .

Věta 6.2: *Nechť $f \in V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$. Pak vždy existuje nějaká 2π -periodická funkce $d(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že platí*

$$\hat{f}(\omega) = d(\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

Důkaz: ONB prostoru V_0 je množina $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a funkci $f \in V_0$ tedy můžeme rozepsat

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi(t - k).$$

Pomocí FT převedeme do frekvenční oblasti

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{-ik\omega} \hat{\varphi}(\omega) = \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{-ik\omega} \right)}_{d(\omega)} \hat{\varphi}(\omega) = d(\omega) \hat{\varphi}(\omega).$$

Potom $d(\omega)$ je zřejmě 2π -periodická funkce a jelikož to je FT posloupnosti $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ v bodě $-\omega$, je z prostoru $L^2\langle 0, 2\pi \rangle$.

■

Důsledek: Pro normy dle Plancherelovy formule platí

$$\|d(\omega)\|^2 = \left\| \hat{d}_k \right\|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 = 2\pi \|f\|^2.$$

Potom pro každé $f, g \in V_0$ a jim odpovídající $d_f(\omega), d_g(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ platí

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle d_f(\omega), d_g(\omega) \rangle \quad \Rightarrow \quad f \perp g \Leftrightarrow d_f(\omega) \perp d_g(\omega).$$

Škálováním se z prostoru V_0 dostaneme do prostoru V_{-1} . Zvolme funkci $g(t) \in V_0$. Škálováním získáme funkci $f(t) = g\left(\frac{t}{2}\right)$, pak $f(t) \in V_{-1}$. Ve frekvenční oblasti můžeme psát

$$\hat{f}(\omega) = 2\hat{g}(2\omega) = 2d(2\omega)\hat{\varphi}(2\omega).$$

Použitím škálovací identity dostáváme

$$\hat{f}(\omega) = \underbrace{2d(2\omega)}_{\mu(2\omega)} m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

Zformulujme tedy tvrzení, které již nebudeme dokazovat.

Tvrzení: Nechť $f \in V_{-1}$. Pak existuje nějaká 2π -periodická funkce $\mu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že platí

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mu(2\omega)m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega).} \quad (6.17)$$

Dalším škálováním dostáváme podobný výsledek a tvrzení můžeme pomocí (6.15) zobecnit.

Tvrzení: Nechť $f \in V_p$. Pak existuje nějaká 2π -periodická funkce $\mu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že platí

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mu\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \prod_{j=p+1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^j}\right).}$$

Poznámka: Ke vztahu jsme dospěli rekurzivním dosazením škálovací identity do vztahu 6.17, předpokladem konvergence tím vzniklého nekonečného součinu a předpokladem $\varphi(0) = 1$.

Věta 6.3: Nechť $\nu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ je nějaká 2π -periodická funkce. Jestliže

$$\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{m_0(\omega + \pi)} \nu(2\omega)\hat{\varphi}(\omega),$$

pak $f \in W_{-1}$.

Poznámka: Podle (6.14) můžeme psát

$$\hat{f}(\omega) = m_1(\omega)\nu(2\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

Důkaz: Označme $d(\omega) = e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}\nu(2\omega)$. Platí identita

$$d(\omega)\overline{m_0(\omega)} + d(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0, \quad (6.18)$$

neboť dosazením za $d(\omega)$ dostaváme

$$e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}\nu(2\omega)\overline{m_0(\omega)} + \underbrace{e^{-i(\omega+\pi)}\overline{m_0(\omega + 2\pi)}}_{-e^{-i\omega}}\nu(2(\omega + \pi))\overline{m_0(\omega + \pi)} =$$

a díky 2π -periodičnosti funkcí $\nu(\omega)$ a $m_0(\omega)$ upravíme

$$= e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}\nu(2\omega)\overline{m_0(\omega)} - e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega)}\nu(2\omega)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0.$$

Zvolme $g \in V_{-1}$, tedy $\hat{g}(\omega) = \mu(2\omega)m_0(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$, kde $\mu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ je libovolná 2π -periodická funkce. Jelikož $V_{-1} \perp W_{-1}$, je i $g \perp f$ a potřebujeme ověřit, že $\langle f, g \rangle = 0$. Dále jelikož $\hat{f}(\omega) = d(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$, stačí ověřit, že platí $\langle d(\omega), \mu(2\omega)m_0(\omega) \rangle = 0$.

$$\langle d(\omega), \mu(2\omega)m_0(\omega) \rangle = \int_0^{2\pi} d(\omega)\overline{\mu(2\omega)m_0(\omega)}d\omega =$$

Rozdělíme integrál na různé intervaly

$$= \int_0^\pi d(\omega)\overline{\mu(2\omega)m_0(\omega)}d\omega + \int_\pi^{2\pi} d(\omega)\overline{\mu(2\omega)m_0(\omega)}d\omega =$$

a druhý integrál upravíme substitucí $\omega = \omega + \pi$

$$= \int_0^\pi \left[d(\omega)\overline{\mu(2\omega)m_0(\omega)}d\omega + d(\omega + \pi)\underbrace{\overline{\mu(2\omega + 2\pi)m_0(\omega + \pi)}}_{\overline{\mu(2\omega)}} \right] d\omega =$$

Dosazením identity (6.18) dostaneme hledaný výsledek

$$= \int_0^\pi \overline{\mu(2\omega)} \underbrace{\left[d(\omega)\overline{m_0(\omega)}d\omega + d(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} \right]}_0 d\omega = 0.$$

■

Škálováním se z prostoru W_{-1} dostaneme do prostoru W_0 . Zvolme funkci $g(t) \in W_{-1}$. Škálováním získáme funkci $f(t) = g(2t)$, pak $f(t) \in W_0$. Ve frekvenční oblasti můžeme psát

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \nu(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Konstantu $\frac{1}{2}$ zahrňme do funkce $\nu(\omega)$ a zformulujme tvrzení.

Tvrzení: Nechť $f \in W_0$. Pak existuje nějaká 2π -periodická funkce $\nu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že platí

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \nu(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).}$$

Poznámka: Podle (6.14) můžeme psát

$$\hat{f}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \nu(\omega) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (6.19)$$

Dalším škálováním a dle (6.15) můžeme opět zobecnit.

Tvrzení: Nechť $f \in W_p$. Pak existuje nějaká 2π -periodická funkce $\nu(\omega) \in L^2\langle 0, 2\pi \rangle$ taková, že platí

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2^{p+1}}\right) \nu\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \prod_{j=p+1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right).}$$

Poznámka: Ke vztahu jsme dospěli rekurzivním dosazením škálovací identity do vztahu 6.19, předpokladem konvergence tím vzniklého nekonečného součinu a předpokladem $\varphi(0) = 1$.

Nyní již víme, jak vypadá Fourierův obraz funkce $f \in W_0$ a dostáváme se k sestrojení mateřského waveletu z waveletu otcovského.

Věta 6.4: *Funkce $\psi \in W_0$ je mateřský wavelet právě tehdy, když $|\nu(\omega)| = 1$ pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$.*

Důkaz: Předpokládejme, že funkce $\psi \in W_0$ je mateřský wavelet a dokažme, že $|\nu(\omega)| = 1$ pro skoro všechna $\omega \in \mathbb{R}$. Mateřský wavelet tvoří ortonormální posloupnost $(\psi(t-k))_{k \in \mathbb{Z}}$, což dle věty 6.1 znamená, že $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + k2\pi)|^2 = 1$. Do této podmínky dosadíme obecný předpis $\hat{\psi}(\omega)$ pro $\psi \in W_0$.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + k2\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi + \pi\right) \right|^2 \cdot |\nu(\omega + 2k\pi)|^2 \cdot \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 =$$

$$= |\nu(\omega)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + k\pi + \pi \right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} + k\pi \right) \right|^2 =$$

Rozdělíme sumu na sudá a lichá k

$$\begin{aligned} &= |\nu(\omega)|^2 \cdot \left[\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi + \pi \right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi \right) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi + \pi \right) \right|^2 \cdot \left| \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi \right) \right|^2 \right] = \end{aligned}$$

Využijeme 2π -periodičnosti filtru $m_0(\omega)$ a jelikož posloupnost $(\varphi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ je orto-normální, můžeme využít věty 6.1

$$\begin{aligned} &= |\nu(\omega)|^2 \cdot \left[\underbrace{\left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \cdot \left| \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi \right) \right|^2}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \cdot \left| \hat{\varphi} \left(\frac{\omega}{2} + (2l+1)\pi \right) \right|^2}_1 \right] = \end{aligned}$$

Dle vlastnosti (6.12) nízkofrekvenčního filtru

$$= |\nu(\omega)|^2 \cdot \underbrace{\left[\left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \right|^2 + \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \right]}_1.$$

Odtud dostáváme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(\omega + k2\pi) \right|^2 = |\nu(\omega)|^2 = 1,$$

což jsme chtěli dokázat. Postup lze otočit a ukázat, že platí i opačná implikace, tj. že pokud $|\nu(\omega)| = 1$, pak posloupnost $(\psi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální.

■

Dle této věty tedy umíme zkonstruovat mateřský wavelet z otcovského.

6.3 Mallatův algoritmus

Pro waveletovou analýzu potřebujeme, obecně vzato, celé množiny $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. Na rozdíl od předchozího výkladu provádí Mallatův algoritmus waveletovou analýzu v časové oblasti. Jeho výhodou je především potřeba znalosti pouze základního otcovského a mateřského waveletu, z něhož celá analýza probíhá rekursivně.

6.3.1 Analytická část

Připomeňme, že pro $\varphi(t) \in V_0$ platí

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k),$$

kde $h_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ a $\{\varphi_{1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ je ONB v prostoru V_1 . Spočítejme si, jak vypadá $\varphi_{j,k}(t)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \underbrace{\varphi(2^j t - k)}_{\varphi(t) \text{ pro } t=2^j t-k} = 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi(2(2^j t - k) - m) = \\ &= 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \varphi(2^{j+1} t - \underbrace{(2k + m)}_l) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \varphi(2^{j+1} t - l). \end{aligned}$$

Dostáváme vyjádření φ na j -té úrovni pomocí φ na $(j+1)$ -ní úrovni

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j+1,l},$$

což je zobecněná škálovací identita v časové oblasti. To samé můžeme udělat s mateřským waveletem.

$$\psi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\overline{h_{1-m}} (-1)^{m-1}}_{g_m} \varphi_{1,m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \varphi_{1,m}$$

a potom

$$\psi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \varphi_{j+1,l}.$$

Na základě těchto identit spočítajme waveletové koeficienty. Mějme $f \in L^2(\mathbb{R})$. Označme $\mathbf{c}_j = (c_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle f, \varphi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ vektor koeficientů vůči bázi prostoru V_j a $\mathbf{d}_j = (d_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\langle f, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$ vektor koeficientů vůči bázi prostoru W_j . Pak platí

$$\langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \left\langle f, \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j+1,l} \right\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-2k}} \langle f, \varphi_{j+1,l} \rangle,$$

neboli

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-2k}} \mathbf{c}_{j+1,l}.$$

Podobně to platí i pro mateřský wavelet

$$d_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g_{l-2k}} \mathbf{c}_{j+1,l}$$

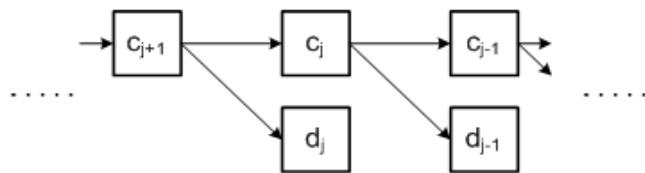
a využitím operátoru D z kapitoly 3 můžeme dále upravovat

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2k-l} c_{j+1,l} = (\mathbf{c}_{j+1} * \tilde{h})(2k) = D(\mathbf{c}_{j+1} * \tilde{h})(k).$$

Taktéž pro $\mathbf{d}_{j,k}$. Analytickou část Mallatova algoritmu tedy můžeme zapsat

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{c}_j &= D(\mathbf{c}_{j+1} * \tilde{h})(k), \\ \mathbf{d}_j &= D(\mathbf{c}_{j+1} * \tilde{g})(k). \end{aligned}} \quad (6.20)$$

Uvědomme si, že waveletové koeficienty na jednotlivých úrovních jsou výsledkem waveletové analýzy. Proto jsou tyto vztahy velmi důležité. Popisují totiž rekurzivní výpočet waveletových koeficientů bez nutnosti výpočtu všech waveletových filtrů. Stačí pouze znát základní waveletové filtry (včetně jejich posunů), díky nimž spočítáme koeficienty $(h_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ a $(g_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

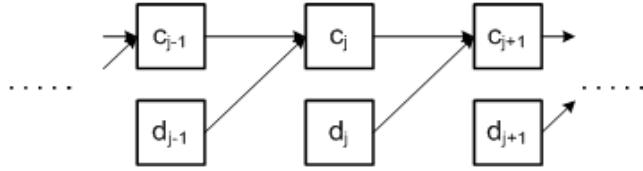


Obrázek 6.1: Mallatův algoritmus - analýza

6.3.2 Rekonstrukční část

Vezměme si $\varphi_{1,k} \in V_1$. Jelikož $V_1 = V_0 \oplus W_0$, musí platit

$$\varphi_{1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l \varphi_{0,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta_l \psi_{0,l} \quad (6.21)$$



Obrázek 6.2: Mallatův algoritmus - syntéza

pro nějaké nenulové vektory $(\alpha_l)_{l \in \mathbb{Z}}, (\beta_l)_{l \in \mathbb{Z}}$. Pro koeficienty platí

$$\alpha_l = \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{0,l} \rangle = \left\langle \varphi_{1,k}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{2l-m} \varphi_{1,m} \right\rangle = \left\langle \varphi_{1,k}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m-2l}} \varphi_{1,m} \right\rangle = \overline{\overline{h_{k-2l}}} = h_{k-2l}$$

a analogicky

$$\beta_l = g_{k-2l}.$$

Dosazením do (6.21) dostáváme

$$\varphi_{1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \varphi_{0,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \psi_{0,l},$$

což škálováním přejde na identitu

$$\varphi_{j+1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \varphi_{j,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \psi_{j,l}.$$

Skalárním součinem s f obdržíme vztah pro rekonstrukci koeficientů

$$c_{j+1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2l}} c_{j,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2l}} d_{j,l}.$$

Využitím operátoru U („upsampling“)

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l} h_{k-2l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} U(c_{j,l})(l) h_{k-l} = (U(c_j)(l) * h)(k)$$

a_tedv

$$c_{j+1,k} = (U(c_j)(l) * h)(k) + (U(d_j)(l) * g)(k). \quad (6.22)$$

Poznámka: Sloučením (6.20) a (6.22) dostáváme rovnici perfektní rekonstrukce (4.6), pouze aplikovanou na waveletové koeficienty.

Poznámka: Uvědomme si, že waveletové koeficienty jsou vektory z prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$ a tedy Mallatův algoritmus převádí problematiku waveletové analýzy ze spojitého prostoru $L^2(\mathbb{R})$ do jednodušej implementovatelného prostoru $\ell^2(\mathbb{Z})$. Právě kvůli tomu je tento algoritmus velmi důležitý a používaný.

Kapitola 7

Kostry v Hilbertových prostorech a Rieszova báze

7.1 Kostry v Hilbertových prostorech

Označme H separabilní Hilbertův prostor a \mathcal{N} spočetnou indexovou množinu ($|\mathcal{N}| < \infty$). Pak můžeme definovat kostru (frame) a její základní vlastnosti.

Definice 7.1: Posloupnost vektorů $(\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$, $\varphi_n \neq 0$ se nazývá **kostra** prostoru H , jestliže existují kladné konstanty $A, B : 0 < A \leq B < \infty$ takové, že platí

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \text{ pro každé } f \in H. \quad (7.1)$$

Zaved'me značení $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$. Pak říkáme, že Φ je $(A, B) - kostra$. Pokud $A = B$, nazývá se **těsná kostra** (tight frame). Pro těsnou kostru evidentně platí

$$\|f\|^2 = \frac{1}{A} \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2, \text{ pro každé } f \in H.$$

Tvrzení: Je-li $\Phi \subset H$ kostra, tvoří úplný systém, neboli

$$\overline{\mathcal{L}\{\Phi\}} = H,$$

kde $\overline{\mathcal{L}}$ značí uzavřený lineární obal.

Důkaz: Kdyby Φ nebyl úplný systém, pak existuje nenulové $f \in H$ takové, že

$$\langle f, \varphi_n \rangle = 0, \text{ pro každé } n \in \mathcal{N}.$$

Dosazením do vztahu (7.1) dostáváme

$$0 < A\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} 0 = 0,$$

což je evidentně spor.

■

Tvrzení: Každý úplný systém vektorů $\{\varphi_n\}_{n=1}^N, \varphi_n \neq 0$, v konečně dimenzionálním prostoru H tvoří kostru.

Důkaz: Vezměme posloupnost vektorů $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ tvořící kostru prostoru H a zaved'me spojitou funkci F

$$F(f) = \sum_{n=1}^N |\langle f, \varphi_n \rangle|^2,$$

která na množině $\{F(f) : \|f\| = 1\}$ nabývá minimální hodnoty A a maximální hodnoty B . Evidentně tedy platí $0 \leq A \leq B < \infty$.

Předpokládejme, že $A = 0 = \sum_{n=1}^N |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$. Jelikož $\|f\| = 1$, neboli $f \neq 0$, bude $A = 0$ splněno pouze v případě, že $\varphi_n = 0$, což je ale spor s definicí 7.1. Tudíž $A \neq 0$ a platí dokazované tvrzení $0 < A \leq B < \infty$.

Poznámka: Množinu $\{F(f)\}$ jsme sice volili pro $\|f\| = 1$, uvědomme si ale, že tvrzení platí obecně pro každé $f \in H$. Námi nalezené konstanty A, B pak stačí pouze dělit normou $\|f\|$.

■

Věta 7.1: *Těsná 1-kostra složená z jednotkových vektorů je ONB.*

Důkaz: Pro těsnou 1-kostru platí $A = B = 1$. Po dosazení do vztahu (7.1) pro $f = \varphi_m$ dostáváme

$$\|\varphi_m\|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle|^2 = \|\varphi_m\|^2 + \sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n \neq m}} |\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle|^2,$$

odkud zřejmě

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0 , \text{ pro každé } n \in \mathcal{N}, n \neq m.$$

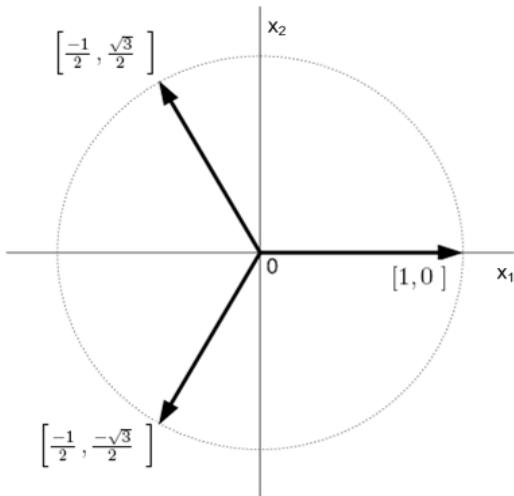
Tím je ukázána ortogonalita těsné 1-kostry, normalita je zajištěna jednotkovými velikostmi vektorů.

■

Příklad 7.1: Mějme množinu $\Phi = \left\{ [1, 0], \left[\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \left[\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right] \right\}$. Ukažme, že množina tvoří kostru prostoru \mathbb{C}^2 . Zvolme obecný prvek $x \in \mathbb{C}^2$, $x = [x_1, x_2]$ a dosad'me

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 &= |x_1|^2 + \left| \overline{\left(\frac{-1}{2} \right)} x_1 + \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} x_2 \right|^2 + \left| \overline{\left(\frac{-1}{2} \right)} x_1 - \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} x_2 \right|^2 = \\ &= |x_1|^2 + \left| \frac{-1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right|^2 + \left| \frac{-1}{2} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right|^2 = \\ &= x_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} x_1^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} x_2^2 = \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 = \frac{3}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Množina Φ je kostra (dokonce těsná) a evidentně tvoří úplný systém. Její konstanty $A = B = \frac{3}{2} \neq 1$ potvrzují, že prvky množiny Φ nejsou kolmé.



Obrázek 7.1: Množina Φ - příklad 7.1

Nyní se podívejme na dva základní operátory, pomocí nichž spočítáme rozvoj funkce podle dané kostry.

Definice 7.2: Nechť H je separabilní Hilbertův prostor a $\ell^2(\mathcal{N}), \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$ je prostor komplexních posloupností summarizovatelných s druhou mocninou. Pak zobrazení $T_\Phi : H \rightarrow \ell^2(\mathcal{N})$ dané předpisem

$$T_\Phi f = (\langle f, \varphi_n \rangle)_{n \in \mathcal{N}}$$

se nazývá **operátor koeficientů**.

Věta 7.2: T_Φ je omezený operátor s omezenou inverzí na svém oboru hodnot $R(T_\Phi)$. $R(T_\Phi)$ je uzavřený podprostor v $\ell^2(\mathcal{N})$. Dále platí

$$\sqrt{A} \leq \|T_\Phi\| \leq \sqrt{B}, \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{B}} \leq \|T_\Phi^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}. \quad (7.3)$$

Pro každou posloupnost $\mathbf{c} = (c_n) \in \ell^2(\mathcal{N})$ řada $\sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$ konverguje v H a adjunkce $T_\Phi^* : \ell^2(\mathcal{N}) \rightarrow H$ je dána vztahem

$$T_\Phi^* \mathbf{c} = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n.$$

Důkaz:

1. Nejprve dokážeme omezenost operátoru T_Φ a jeho inverze. Definice 7.1 přímo říká

$$A\|f\|^2 \leq \|T_\Phi f\|^2 \leq B\|f\|^2 \text{ pro každé } f \in H. \quad (7.4)$$

Odtud plyne

$$\|T_\Phi f\| \leq \sqrt{B}\|f\| \text{ pro každé } f \in H,$$

neboli

$$\|T_\Phi\| \leq \sqrt{B}.$$

Analogicky odvodíme

$$\|T_\Phi\| \geq \sqrt{A}.$$

Vztah (7.4) si můžeme rozepsat do dvou nerovností

$$A\|f\|^2 \leq \|T_\Phi f\|^2 \Rightarrow \|f\|^2 \leq \frac{1}{A} \|T_\Phi f\|^2,$$

$$B\|f\|^2 \geq \|T_\Phi f\|^2 \Rightarrow \|f\|^2 \geq \frac{1}{B} \|T_\Phi f\|^2.$$

Jelikož operátor T_Φ je invertibilní, můžeme psát

$$\frac{1}{B} \|T_\Phi f\|^2 \leq \|f\|^2 = \|T_\Phi^{-1}(T_\Phi f)\|^2 \leq \frac{1}{A} \|T_\Phi f\|^2$$

a substitucí $T_\Phi f = g$ dostáváme

$$\frac{1}{B} \|g\|^2 \leq \|T_\Phi^{-1}g\|^2 \leq \frac{1}{A} \|g\|^2,$$

odkud již plyne omezenost inverze operátoru (nerovnost (7.3)).

2. Dále dokážeme, že obor hodnot $R(T_\Phi)$ je uzavřený podprostor. Definujme posloupnost $(T_\Phi f_n)$, $f_n \in H$, takovou, že $(T_\Phi f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Pak platí

$$\|T_\Phi f_n - T_\Phi f_m\| \geq \sqrt{A} \|f_n - f_m\|.$$

Tedy posloupnost (f_n) je cauchyovská a konverguje k $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$. Vzhledem ke spojitosti operátoru T_Φ můžeme psát

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_\Phi f_n) = T_\Phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = T_\Phi f,$$

což znamená, že limita F posloupnosti $T_\Phi f_n$ patří do oboru hodnot $R(T_\Phi)$ a tedy že $R(T_\Phi)$ je uzavřený podprostor.

3. Dokážeme konvergenci řady $\sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$ v Hilbertově prostoru H pro $(c_n)_{n \in \mathcal{N}} \in \ell^2(\mathcal{N})$, $c_n \neq 0$. Zvolme konečnou podmnožinu $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ tak, že

$$f = \frac{\sum_{n \in \mathcal{N}'} c_n \varphi_n}{\left\| \sum_{n \in \mathcal{N}'} c_n \varphi_n \right\|}.$$

Tedy $\|f\| = 1$. Pak můžeme psát

$$\left\| \sum_{n \in \mathcal{N}'} c_n \varphi_n \right\| = \left(\sum_{n \in \mathcal{N}'} c_n \varphi_n, f \right) = \left| \sum_{n \in \mathcal{N}'} c_n (\varphi_n, f) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}'} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \in \mathcal{N}'} |(f, \varphi_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}'} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot B^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\| = \\ &= B^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n \in \mathcal{N}'} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

A jelikož posloupnost $(\sum |c_n|^2)$ je cauchyovská, je cauchyovská i posloupnost částečných součtů $(\sum_{n=1}^N c_n \varphi_n)_N$, neboť pro $N \leq M$ máme

$$\left\| \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M c_n \varphi_n \right\|^2 \leq B \cdot \left(\sum_{n=N+1}^M \|c_n\|^2 \right).$$

4. Odvod'me nyní tvar adjungovaného operátoru T_Φ^* . Připomeňme, že obecně pro něj platí

$$\langle T_\Phi f, \mathbf{c} \rangle = \langle f, T_\Phi^* \mathbf{c} \rangle \text{ pro každé } f \in H, \mathbf{c} \in \ell^2(\mathcal{N}),$$

kde $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$. Úpravami dostaneme

$$\langle T_\Phi f, \mathbf{c} \rangle = \langle \langle f, \varphi_n \rangle, \mathbf{c} \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{c_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, c_n \varphi_n \rangle = \langle f, \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n \rangle,$$

tedy $T_\Phi^* \mathbf{c} = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$, což jsme chtěli dokázat.

■

Definice 7.3: Nechť H je separabilní Hilbertův prostor a $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$ je (A, B) -kostra. Pak zobrazení $S_\Phi : H \xrightarrow{na} H$ dané předpisem

$$S_\Phi = T_\Phi^* T_\Phi,$$

neboli

$$S_\Phi f = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

se nazývá **operátor kostry** (frame operator).

Poznámka: Je-li Φ ONB, pak S_Φ je identita. Obecně ne, jelikož φ_n nemusí být ortogonální vektory.

Příklad 7.2: Skutečnost, že S_Φ obecně není identita, ukážeme následovně. Zvolme ONB $\Phi' = (\varphi'_n)_{n \in \mathcal{N}}$ a udělejme z ní neortonormální vynásobením konstantou $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Pak můžeme psát $\varphi_n = \alpha \varphi'_n$ a platí

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \alpha \varphi'_n \rangle \alpha \varphi'_n = \alpha^2 \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi'_n \rangle \varphi'_n = \alpha^2 f \neq f.$$

Zvolme $f = (f_1, f_2)$ a ukažme to samé i na množině Φ z příkladu (7.1).

$$\begin{aligned} S_\Phi f &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \\ &= f_1(1, 0) + \left[-\frac{1}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 \right] \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left[-\frac{1}{2} f_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 \right] \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \left(f_1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 - \frac{1}{2} f_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 \right) \right) = \\ &= \left(f_1 - \frac{1}{2} (-f_1), \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} f_2) \right) = \left(\frac{3}{2} f_1, \frac{3}{2} f_2 \right) \neq (f_1, f_2). \end{aligned}$$

Věta 7.3: S_Φ je pozitivní omezený operátor na s omezenou inverzí. Platí následující odhad:

$$A \cdot Id \leq S_\Phi \leq B \cdot Id,$$

$$\frac{1}{B} \cdot Id \leq S_\Phi^{-1} \leq \frac{1}{A} \cdot Id.$$

Důkaz:

1. Platí

$$\langle S_\Phi f, f \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, f \rangle = \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 = \|T_\Phi f\|^2.$$

Z toho a z definice kostry plyne první nerovnost a dle věty 2.13 platí i odhad operátoru S_Φ^{-1} .

2. Ještě zbývá dokázat, že operátor S_Φ je na. Důkaz provedeme sporem. Kdyby operátor nebyl na, existovalo by takové $g \neq 0$, že $g \perp R(S_\Phi)$. Potom by ale platilo

$$0 = \langle S_\Phi g, g \rangle = \langle T_\Phi^* T_\Phi g, g \rangle = \langle T_\Phi g, T_\Phi g \rangle = \|T_\Phi g\|^2 \geq A \|g\|^2 \neq 0,$$

což je evidentní spor.

■

Definice 7.4: Množina $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathcal{N}}$ definovaná předpisem

$$\boxed{\tilde{\varphi}_n = S_\Phi^{-1} \varphi_n}$$

je **duální kostra** (dual frame) ke kostře $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$.

Poznámka: Operátor koeficientů a operátor duální kostry pak mají tvar

$$\boxed{T_{\tilde{\Phi}} f = (\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle)_{n \in \mathcal{N}}, \quad T_{\tilde{\Phi}}^* \mathbf{c} = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \tilde{\varphi}_n,}$$

$$\boxed{S_{\tilde{\Phi}} f = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \tilde{\varphi}_n.}$$

Věta 7.4: Duální kostra

$\tilde{\Phi}$ je $(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$ -kostra. Dále platí

$$T_{\tilde{\Phi}}^* c = \begin{cases} T_\Phi^{-1} \mathbf{c} & \mathbf{c} \in T_\Phi(H) \\ 0 & \mathbf{c} \in T_\Phi(H)^\perp \end{cases}.$$

Duální kostra k duální kostře je kostra původní, tj. $\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi$.

Důkaz:

1. Jelikož S_Φ^{-1} je pozitivní (a tedy samoadjungovaný) operátor, pro každé $f \in H$ platí

$$T_{\tilde{\Phi}} f = (\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle)_n = (\langle f, S_\Phi^{-1} \varphi_n \rangle)_n = (\langle S_\Phi^{-1} f, \varphi_n \rangle)_n = T_\Phi \langle S_\Phi^{-1} f \rangle = T_\Phi S_\Phi^{-1} f.$$

Můžeme tedy psát

$$\|T_{\tilde{\Phi}} f\|^2 = \|T_\Phi S_\Phi^{-1} f\|_{\ell^2(\mathcal{N})}^2 = \langle T_\Phi S_\Phi^{-1} f, T_\Phi S_\Phi^{-1} f \rangle_{\ell^2(\mathcal{N})} =$$

$$= \langle S_\Phi^{-1}f, T_\Phi^* T_\Phi S_\Phi^{-1}f \rangle_H = \langle S_\Phi^{-1}f, f \rangle_H$$

a dle věty 7.3 je tedy $\tilde{\Phi}(\frac{1}{B}, \frac{1}{A})$ – kostra, což znamená

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \|T_{\tilde{\Phi}}f\|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2.$$

2. V bodě 1) jsme odvodili

$$T_{\tilde{\Phi}} = T_\Phi S_\Phi^{-1} : H \xrightarrow{na} T_\Phi(H).$$

Platí tedy

$$T_{\tilde{\Phi}}^* = S_\Phi^{-1} T_\Phi^*.$$

Pokud položíme $\mathbf{c} = T_\Phi f$, pak úpravami dostáváme:

$$T_{\tilde{\Phi}}^* \mathbf{c} = S_\Phi^{-1} T_\Phi^* T_\Phi f = S_\Phi^{-1} S_\Phi f = f = T_\Phi^{-1} \mathbf{c}.$$

Na druhou stranu je-li $\mathbf{c} \perp T_\Phi(H)$, pak pro všechna $f \in H$ je

$$\langle T_{\tilde{\Phi}}^* \mathbf{c}, f \rangle = \langle \mathbf{c}, T_{\tilde{\Phi}} f \rangle = \langle \mathbf{c}, T_\Phi S_\Phi^{-1} f \rangle = 0,$$

a proto $T_{\tilde{\Phi}}^* \mathbf{c} = 0$.

3. Nakonec dokážeme, že $\tilde{\Phi} = \Phi$.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n &= S_{\tilde{\Phi}}^{-1} \tilde{\varphi}_n = (T_{\tilde{\Phi}}^* T_{\tilde{\Phi}})^{-1} \tilde{\varphi}_n = ((T_\Phi S_\Phi^{-1})^* (T_\Phi S_\Phi^{-1}))^{-1} \tilde{\varphi}_n = \\ &= (S_\Phi^{-1} T_\Phi^* T_\Phi S_\Phi^{-1})^{-1} \tilde{\varphi}_n = (S_\Phi^{-1} S_\Phi S_\Phi^{-1})^{-1} \tilde{\varphi}_n = S_\Phi \tilde{\varphi}_n = S_\Phi S_\Phi^{-1} \varphi_n = \varphi_n, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov.

■

Věta 7.5: Rozvoj podle kostry

Nechť Φ a $\tilde{\Phi}$ jsou navzájem duální kostry. Pak platí

$$f = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n.$$

Důkaz: Dle věty 7.4 platí $T_\Phi^{-1}\mathbf{c} = T_\Phi^*\mathbf{c}$ pro každé $\mathbf{c} \in T_\Phi(H)$. Využitím toho můžeme psát

$$f = T_\Phi^{-1}T_\Phi f = T_{\tilde{\Phi}}^*T_\Phi f = T_{\tilde{\Phi}}^*(\langle f, \varphi_n \rangle) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n.$$

Vzhledem k dualitě máme i druhou rovnost.

■

Před dalším postupem interpretujme dosud napsanou teorii. Funkce f reprezentuje analyzovanou funkci (např. změřený signál) a vektory φ_n jsou funkce, jimiž analyzujeme (např. wavelety). Operátor T_Φ nám z funkce f udělá vektor koeficientů příslušící vektorům φ_n . Operátor T_Φ^* z těchto koeficientů a všech vektorů φ_n udělá „lineární kombinaci“ (každý vektor s jemu příslušným koeficientem). Celá tato operace je shrnutá v operátoru S_Φ . Samotná analýza funkce f probíhá právě nad koeficienty získanými operátorem T_Φ . Ve výsledku můžeme některé koeficienty ponechat (důležité vlastnosti f) a některé můžeme anulovat (potlačení rušivých složek v f). Pro další činnost ale potřebujeme z koeficientů zpětně zrekonstruovat analyzovanou funkci. To můžeme provést dle věty 7.5, ale zde potřebujeme znát i duální kostru $\tilde{\Phi}$, kterou z původní kostry spočítáme pomocí operátoru S_Φ^{-1} . Jenže ten zatím neznáme a právě jeho výpočtem se budeme nadále zabývat.

Uvedeme větu, kterou nebudeme dokazovat, čtenář nalezne důkaz v (Rudin, 2003).

Věta 7.6: Nechť R je operátor na Hilbertově prostoru H takový, že $\|R\| < 1$. Pak $Id - R$ je operátor mající omezenou inverzi $(Id - R)^{-1}$, pro kterou platí

$$(Id - R)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n.$$

Poznámka: Všimněme si, že vztah je analogický se součtem nekonečné geometrické řady s koeficientem menším než 1. Tady ale řada konverguje v operátorové normě.

Pokusme se nyní najít vhodné vyjádření operátoru S_Φ^{-1} ve tvaru $(Id - R)^{-1}$ (viz věta 7.6).

$$S_\Phi^{-1} = (Id - R)^{-1} = [Id - (Id - S_\Phi)]^{-1}.$$

Potřebujeme, aby $\|R\| < 1$, proto vztah upravíme

$$S_\Phi^{-1} = q [Id - (Id - qS_\Phi)]^{-1},$$

kde $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ je konstanta, která splňuje $\|R\| < 1$. Operátor R je tedy

$$R = Id - qS_\Phi.$$

Poznámka: Jelikož operátor S_Φ je omezený (tedy samoadjungovaný), je operátor R také omezený a tedy také samoadjungovaný.

Zvolme například

$$q = \frac{2}{B + A}$$

a ukažme, že splňuje podmínu $\|R\| < 1$. Operátory S_Φ^{-1} a R mají tvar

$$S_\Phi^{-1} = \frac{2}{B + A} \left[Id - \left(Id - \frac{2S_\Phi}{B + A} \right) \right]^{-1}, \quad (7.5)$$

$$R = Id - \frac{2S_\Phi}{B + A}. \quad (7.6)$$

Jelikož platí

$$A \cdot Id \leq S_\Phi \leq B \cdot Id,$$

platí pro odhadu operátoru R

$$R \leq Id - \frac{2A}{B + A} Id = \frac{B - A}{B + A} Id,$$

$$R \geq Id - \frac{2B}{B + A} Id = -\frac{B - A}{B + A} Id,$$

čili

$$-\frac{B - A}{B + A} Id \leq R \leq \frac{B - A}{B + A} Id.$$

Pro jeho normu tedy platí

$$\|R\| \leq \frac{B - A}{B + A} < 1.$$

Důsledek: Rozvoj S_Φ^{-1} v řadu

Je-li $\Phi(A, B) - kostra$, pak aplikací věty 7.6

$$S_\Phi^{-1} = \frac{2}{B + A} \sum_{k=0}^{\infty} R^k, \text{ kde } R = Id - \frac{2S_\Phi}{B + A}$$

v operátorové normě.

Takto jsme dospěli k operátoru S_Φ^{-1} , který je vyjádřen pomocí již známých operátorů a konstant. Při technické aplikaci však narazíme na problém nekonečného součtu. Je tedy nutné operátor S_Φ^{-1} , případně kostru $(\tilde{\varphi}_n)$ approximovat a odhadnout chybu vzniklou touto approximací. Zavedeme si nejprve značení.

Definice 7.5: Aproximaci $(N + 1)$ -ního řádu rekonstrukce funkce f označme $f^{(N+1)}$ a definujme jí

$$f^{(N+1)} = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k S_\Phi f. \quad (7.7)$$

Aproximaci $(N + 1)$ -ního řádu kostry $\tilde{\varphi}_n$ označme $\tilde{\varphi}_n^{(N)}$ a definujme jí

$$\tilde{\varphi}_n^{(N)} = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_n. \quad (7.8)$$

Poznámka: Aproximace vzešly z operátoru S_Φ^{-1} , ve kterém jsme sumu approximovali částečným součtem

$$(S_\Phi^{-1})^{(N)} = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k.$$

Dosazením do

$$f^{(N)} = (S_\Phi^{-1})^{(N)} (S_\Phi f), \quad (\tilde{\varphi}_n)^{(N)} = (S_\Phi^{-1})^{(N)} \varphi_n$$

již dostáváme definované vztahy. Aproximaci $(N + 1)$ -ního řádu rekonstrukce funkce můžeme upravit

$$\begin{aligned} f^{(N+1)} &= \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k S_\Phi f = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \right) = \\ &= \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \sum_{k=0}^N R^k \varphi_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n^{(N)}. \end{aligned}$$

Tím je zároveň ukázán důvod označení $\tilde{\varphi}_n^{(N)}$ u $(N + 1)$ -ní approximace. Také platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f^{(N+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k S_\Phi f = f.$$

Aproximaci 1. řádu dosáhneme triviálními úpravami vztahu

$$f = \left(Id - \frac{2}{B+A} S_\Phi + \frac{2}{B+A} S_\Phi \right) f = \left(R + \frac{2}{B+A} S_\Phi \right) f = Rf + \frac{2}{B+A} S_\Phi f,$$

odkud využitím omezenosti operátoru R dostáváme

$$f^{(1)} = \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

a chybu

$$f - f^{(1)} = Rf,$$

$$\|f - f^{(1)}\| \leq \frac{B-A}{B+A} \|f\|.$$

Poznámka: Uvážíme-li rozvoj 1. approximace ($N = 0$) $f^{(1)}$ dle věty 7.5, pak

$$f^{(1)} = \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \frac{2}{B+A} \varphi_n,$$

odkud

$$\tilde{\varphi}_n^{(0)} = \frac{2}{B+A} \varphi_n,$$

což přesně odpovídá definici 7.5.

Pro approximaci duální kostry ($N + 1$)-ního rádu platí

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n^{(N)} &= \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_n = \tilde{\varphi}_n - \frac{2}{B+A} \sum_{k=N+1}^{\infty} R^k \varphi_n = \\ &= \tilde{\varphi}_n - \frac{2}{B+A} R^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_n = \tilde{\varphi}_n - R^{N+1} S_{\Phi}^{-1} \varphi_n = (Id - R^{N+1}) \tilde{\varphi}_n, \end{aligned}$$

odkud

$$\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_n^{(N)} = R^{N+1} \tilde{\varphi}_n.$$

A v úpravách pokračujeme

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n^{(N)} &= (Id - R^{N+1}) S_{\Phi}^{-1} \varphi_n = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_n - R^{N+1} \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_n = \\ &= \frac{2}{B+A} \left(\sum_{k=0}^{\infty} R^k - R^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \right) \varphi_n = \frac{2}{B+A} \left(Id + \sum_{k=1}^{\infty} R^k - \sum_{k=0}^{\infty} R^{k+N+1} \right) \varphi_n = \\ &= \frac{2}{B+A} \varphi_n + \frac{2}{B+A} \left(\sum_{k=0}^{\infty} R^{k+1} - \sum_{k=N}^{\infty} R^{k+1} \right) \varphi_n = \frac{2}{B+A} \varphi_n + \frac{2}{B+A} R \sum_{k=0}^{N-1} R^k \varphi_n \end{aligned}$$

Ve výsledku dostáváme

$$\tilde{\varphi}_n^{(N)} = \frac{2}{B+A} \varphi_n + R\tilde{\varphi}_n^{(N-1)}, \quad (7.9)$$

což je rekurzivní výpočet duální kostry, který startujeme z definovaného

$$\tilde{\varphi}_n^{(0)} = \frac{2}{B+A} \varphi_n.$$

Ještě nás zajímá odhad chyby $(f - f^{(N+1)})$ obecné approximace $f^{(N+1)}$, tedy odhad její normy.

$$\begin{aligned} \|f - f^{(N+1)}\| &= \left\| f - \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n^{(N)} \right\| = \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle f - \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n^{(N)}, g \right\rangle \right| = \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \underbrace{(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}_n^{(N)})}_{R^{N+1}\tilde{\varphi}_n}, g \right\rangle \right| = \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle R^{N+1} \tilde{\varphi}_n, g \right\rangle \right| = \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle R^{N+1} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n, g \right\rangle \right| = \sup_{\|g\|=1} |\langle R^{N+1} f, g \rangle|. \end{aligned}$$

Víme, že platí $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ a jelikož $\|g\| = 1$, můžeme psát

$$\sup_{\|g\|=1} |\langle R^{N+1} f, g \rangle| \leq \|R\|^{N+1} \cdot \|f\| \cdot \|g\| = \left(\frac{B-A}{B+A} \right)^{N+1} \cdot \|f\|.$$

Pro přehled shrňme do jedné nerovnosti:

$$\|f - f^{(N+1)}\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right)^{N+1} \cdot \|f\|. \quad (7.10)$$

Poznámka: Předchozí výsledek říká, že s každou dalsí approximací se nám chyba odhadu zmenší $\frac{B-A}{B+A}$ -krát (jelikož $\frac{B-A}{B+A} < 1$).

Tentýž výsledek (1. approximace, $N = 0$) pro chybu odhadu jsme již dostali výše. Říká nám, že čím těsnější kostra Φ je (čím menší je $|B - A|$), tím menší počet iterací rekursivního výpočtu potřebujeme pro výpočet postačující approximace. Navíc definujeme-li si maximální velikost chyby approximace, umíme tímto vztahem spočítat, do jaké hloubky je potřeba iterovat.

Platí

$$f^{(N+1)} = \frac{2}{B+A} \sum_{k=0}^N R^k S_\Phi f = \frac{2}{B+A} \left(Id + R \sum_{k=0}^{N-1} R^k \right) S_\Phi f = \frac{2}{B+A} S_\Phi f + R f^{(N)} =$$

a po dosazení za operátor R dle vztahu (7.6)

$$= \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n + f^{(N)} - \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f^{(N)}, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Výsledkem je rekurzivní vztah

$$f^{(N+1)} = f^{(N)} + \frac{2}{B+A} \sum_{n \in \mathcal{N}} [\langle f, \varphi_n \rangle - \langle f^{(N)}, \varphi_n \rangle] \varphi_n, \quad (7.11)$$

který startujeme z

$$f^{(1)} = \frac{2}{B+A} S_\Phi f.$$

Poznámka: Rekurzi můžeme startovat již z approximace „nultého“ řádu $f^{(0)} = 0$, která po první iteraci dá právě $f^{(1)} = \frac{2}{B+A} S_\Phi f$. To je z pohledu praktické aplikace výhodnější.

Vztah (7.9) nám ukazuje, jak rekurzivně spočítat duální frame $\tilde{\varphi}_n^{(N)}$. Approximace funkce

$$f^{(N+1)} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n^{(N)}$$

obsahuje nekonečný součet stejně jako rekurzivní vztah (7.11).

Věta 7.7: Duffinův - Schaefferův rekonstrukční algoritmus

Nechť Φ je (A, B) -kostra. Předpokládejme, že $T_\Phi f = (\langle f, \varphi_n \rangle)_{n \in \mathcal{N}}$ je dán. Platí rekurze

$$f^{(0)} = 0 \quad , \quad f^{(1)} = \frac{2}{B+A} S_\Phi f,$$

$$f^{(K)} = 2f^{(K-1)} - f^{(K-2)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi (f^{(K-1)} - f^{(K-2)}), \quad K \geq 2. \quad (7.12)$$

Dále platí

$$\|f - f^{(K)}\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right) \cdot \|f - f^{(K-1)}\|. \quad (7.13)$$

Důkaz:

1. Z definice operátoru R je zřejmé, že operátor S_Φ komutuje s operátrem R a tedy komutuje i s operátorem R^K . Připomeňme, že

$$f^{(N+1)} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n^{(N)},$$

a proto díky komutativitě S_Φ a R

$$f^{(K)} = \frac{2}{B+A} S_\Phi(f + Rf + \cdots + R^{K-1}f) = \frac{2}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-1} R^k f.$$

Dosazením do pravé strany (7.12) máme

$$\begin{aligned} & 2f^{(K-1)} - f^{(K-2)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi(f^{(K-1)} - f^{(K-2)}) = \\ & = \frac{4}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-2} R^k f - \frac{2}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-3} R^k f - \frac{2}{B+A} S_\Phi \left[\frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-2} f \right] = (*). \end{aligned}$$

Hranatou závorku si upravíme

$$\begin{aligned} \frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-2} f &= \left(\frac{2}{B+A} S_\Phi - Id + Id \right) R^{K-2} f = \\ &= (-R + Id) R^{K-2} f = -R^{K-1} f + R^{K-2} f. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět a upravíme

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{2}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-3} R^k f + \frac{4}{B+A} S_\Phi R^{K-2} f + \frac{2}{B+A} S_\Phi (R^{K-1} f - R^{K-2} f) = \\ &= \frac{2}{B+A} S_\Phi \left(\sum_{k=0}^{K-3} R^k f + R^{K-2} f + R^{K-1} f \right) = \frac{2}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-1} R^k f = f^{(K)}. \end{aligned}$$

Důkaz samotný se vztahuje pouze pro $K \geq 3$ (kvůli sumě), ale výsledek je korektní i pro $K = 2$.

2. Dokažme odhad (7.13), nejprve si ale indukcí ukážeme, že

$$R^K f = f - f^{(K)}. \quad (7.14)$$

Pro $K = 0$ rovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro $(K-1)$ a ověřme platnost pro K . Upravme levou stranu rovnice (7.14).

$$R^K f = \left(Id - \frac{2}{B+A} S_\Phi \right) R^{K-1} f = R^{K-1} f - \frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-1} f =$$

a dle vztahu (7.14) pro $(K-1)$

$$= f - f^{(K-1)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-1} f.$$

Úpravou pravé strany rovnice (7.14) dostaneme

$$\begin{aligned} f - f^{(K)} &= f - \frac{2}{B+A} S_\Phi \sum_{k=0}^{K-1} R^k f = f - \frac{2}{B+A} S_\Phi \left(\sum_{k=0}^{K-2} R^k + R^{K-1} \right) f = \\ &= f - f^{(K-1)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-1} f \end{aligned}$$

dostáváme stejný výraz. Vztah (7.14) tedy platí a dostáváme se k důkazu nerovnosti (7.13).

$$\begin{aligned} \|f - f^{(K)}\| &= \left\| f - f^{(K-1)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi R^{K-1} f \right\| = \\ &= \left\| f - f^{(K-1)} - \frac{2}{B+A} S_\Phi (f - f^{(K-1)}) \right\| = \left\| \left(Id - \frac{2}{B+A} S_\Phi \right) (f - f^{(K-1)}) \right\| \leq \\ &\leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right) \cdot \|f - f^{(K-1)}\|, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

■

Poznámka: Rekurzivním použitím vztahu (7.13) dostáváme

$$\|f - f^{(K)}\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right) \cdot \|f - f^{(K-1)}\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right) \cdot \left(\frac{B-A}{B+A} \right) \cdot \|f - f^{(K-2)}\| \leq \dots$$

To vede na již známý vztah (7.10).

7.2 Rieszova báze

V této podkapitole z důvodu složitosti pouze naznačíme problematiku Rieszových bází. Nebudeme uvádět žádné důkazy, zájemce je nalezne v (Köllzow, 1994). Nejprve se podívejme na optimalitu kostry.

Věta 7.8: Optimalita duální kostry

Nechť $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$ je kostra v Hilbertově prostoru H . Nechť $f \in H$ má rozvoj

$$f = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n,$$

kde $\mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathcal{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, pak

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle - c_n|^2.$$

Věta 7.9: Vynecháním jednoho členu z kostry vznikne buď kostra nebo neúplný systém.

Na základě předchozí věty můžeme definovat přesnou kostru.

Definice 7.6: Kostra Φ se nazývá **exaktní (přesná, minimální)**, jestliže pro každé $n_0 \in \mathcal{N}$ není $\Phi \setminus \{\varphi_{n_0}\}$ kostra.

Tvrzení: Je-li Φ přesná kostra, pak kostry $\Phi, \tilde{\Phi}$ tvoří biortogonální systém, tj.

$$\langle \varphi_m, \tilde{\varphi}_n \rangle = \delta_{n,m} \text{ pro každé } m, n \in \mathcal{N}.$$

Definice 7.7: Rieszova báze

Úplný systém (φ_n) v Hilbertově prostoru H se nazývá **(A, B)-Rieszova báze**, existují-li konstanty $0 < A \leq B$ takové, že pro každé $\mathbf{c} = (c_n)_{n \in \mathcal{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ je

$$A\|\mathbf{c}\|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n \right\|^2 \leq B\|\mathbf{c}\|^2.$$

Poznámka: Definice Rieszovy báze implicitně vyžaduje konvergenci řady $\sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$.

Věta 7.10: $\Phi = (\varphi_n)_{n \in \mathcal{N}}$ je Rieszova báze právě tehdy, když Φ je přesná kostra.

Potom je-li $f = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$, pak c_n jsou jednoznačně dány (biortogonalita) a platí

$$c_n = \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle = \langle S_\Phi^{-1} f, \varphi_n \rangle.$$

Odtud pak

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle S_\Phi^{-1} f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|S_\Phi^{-1} f\|^2 \leq \frac{B}{A^2} \|f\|^2.$$

Vynásobením konstantou A^2/B a dosazením za $f = \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n$ dostáváme

$$\frac{A^2}{B} \|\mathbf{c}\|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathcal{N}} c_n \varphi_n \right\|^2.$$

Kapitola 8

Waveletové kostry

Pojem kostra již známe z předchozí kapitoly. Waveletová kostra (wavelet frame) je kostra, kde funkce $\psi(t)$ je waveletový filtr a nebudeme rozlišovat, jestli otcův nebo matčin.

Nejprve zobecněme systém waveletových filtrů. Zavedeme posun o b ($b \in \mathbb{R}$) a změnu měřítka a -krát ($a \in \mathbb{R}^+$) funkce $\psi(t)$

$$\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right). \quad (8.1)$$

Udělejme substituci $a = a_0^{-j}$, $b = a_0^{-j} b_0 k$, $a_0 \in \mathbb{R}^+$, $b_0 \in \mathbb{R}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, a po dosazení do (8.1) dostáváme

$$\boxed{\psi_{j,k}^{a_0,b_0}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j t - b_0 k)}.$$

Poznámka: Dle kapitoly 6 (waveletová báze na prostoru $L^2(\mathbb{R})$) tvoří waveletové filtry ortonormální systém. V obecném případě však množina filtrů ortonormální být nemusí a potom analýzu i syntézu provádíme tak, jak je popsáno v kapitole 7 (kostry na Hilbertových prostorech). Stejně postupujeme i v případě, kdy waveletové filtry netvoří ortonormální množinu. Klasickým představitelem takového filtru je mexický klobouk.

Poznámka: V klasickém pojetí waveletových filtrů je množina $\Psi = \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ těsná waveletová kostra a Rieszův wavelet (Ψ tvoří Rieszovu bázi).

V této kapitole se budeme zabývat hlavně výpočtem duální waveletové kostry, která je nezbytná pro rekonstrukci.

Definice 8.1: Funkce $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ je duální wavelet k ψ pro a_0, b_0 , jestliže platí

$$\left(\tilde{\psi} \right)_{j,k}^{a_0,b_0} = \widetilde{\psi}_{j,k}^{a_0,b_0}.$$

Věta 8.1: Konstrukce duální kostry

Nechť $\Psi = \left\{ \psi_{j,k}^{a_0,b_0} \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je waveletová kostra pro a_0, b_0 a $S_\Phi^{a_0,b_0}$ je jí odpovídající operátor kostry. Pak

$$\widetilde{\psi}_{j,k}^{a_0,b_0}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \widetilde{\psi}_{0,k}^{a_0,b_0}(a_0^j t).$$

Poznámka: Výpočet duální kostry (viz kapitola 7) není jednoduchá záležitost. Dle této věty nám bude stačit spočítat $\widetilde{\psi}_{0,k}^{a_0,b_0}$ pro potřebná k a zbytek kostry dopočítáme škálováním.

Důkaz: Pro $j \in \mathbb{Z}$ definujme operátor $D_j^{a_0} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) : f(t) \mapsto a_0^{\frac{j}{2}} f(a_0^j t)$. Ukažme, že $D_j^{a_0} \widetilde{\psi}_{0,k}^{a_0,b_0}(t)$, $j, k \in \mathbb{Z}$, definuje duální kostru. Pro $j = 0$ je platnost věty zřejmá. Podívejme se na případ $j \neq 0$. Z definice 7.4 duální kostry platí

$$\widetilde{\psi}_{j,k}^{a_0,b_0} = \left(S_\Phi^{a_0,b_0} \right)^{-1} \psi_{j,k}^{a_0,b_0} = \left(S_\Phi^{a_0,b_0} \right)^{-1} D_j^{a_0} \psi_{0,k}^{a_0,b_0}.$$

Pokud bychom předpokládali, že věta platí, platilo by

$$\widetilde{\psi}_{j,k}^{a_0,b_0} = D_j^{a_0} \widetilde{\psi}_{0,k}^{a_0,b_0} = D_j^{a_0} \left(S_\Phi^{a_0,b_0} \right)^{-1} \psi_{0,k}^{a_0,b_0}. \quad (8.2)$$

Ale aby vztah (8.2) platil (tedy i dokazovaná věta), je potřeba ukázat, že operátory $D_j^{a_0}$ a $\left(S_\Phi^{a_0,b_0} \right)^{-1}$ komutují. Bude ale stačit, když ukážeme komutativitu operátorů $D_j^{a_0}$ a $S_\Phi^{a_0,b_0}$.

Zvolme $f \in L^2(\mathbb{R})$. Platí

$$\begin{aligned} S_\Phi^{a_0,b_0} D_j^{a_0} f(t) &= S_\Phi^{a_0,b_0} a_0^{\frac{j}{2}} f(a_0^j t) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left\langle a_0^{\frac{j}{2}} f(a_0^j t), \psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t) \right\rangle \psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t) = \\ &= \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} a_0^{\frac{j}{2}} f(a_0^j t) \overline{\psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t)} dt \right] \psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} a_0^{\frac{j}{2}} f(a_0^j t) \overline{a_0^{\frac{i}{2}} \psi(a_0^i t - kb_0)} dt \right] \psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t) = \end{aligned}$$

V integrálu provedeme substituci $u = a_0^j t : t = a_0^{-j} u, dt = a_0^{-j} du$ a dostaneme

$$= \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} a_0^{\frac{j}{2}} f(u) a_0^{\frac{i}{2}} \overline{\psi(a_0^i a_0^{-j} u - kb_0)} a_0^{-j} du \right] \psi_{i,k}^{a_0,b_0}(t) =$$

$$= \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(u) \overline{a_0^{\frac{i-j}{2}} \psi(a_0^{i-j} u - kb_0)} du \right] \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) =$$

„Zpětnou“ substitucí $u = t$ dostáváme

$$= \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left\langle f(t), \psi_{i-j,k}^{a_0, b_0}(t) \right\rangle \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) =$$

Změníme měřítko $i = i + j$ celé rovnice

$$= \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left\langle f(t), \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) \right\rangle \psi_{i+j,k}^{a_0, b_0}(t) = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left\langle f(t), \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) \right\rangle D_j^{a_0} \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) =$$

a před sumu vytkneme na i nezávislý operátor $D_j^{a_0}$

$$= D_j^{a_0} \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \left\langle f(t), \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) \right\rangle \psi_{i,k}^{a_0, b_0}(t) = D_j^{a_0} S_{\Phi}^{a_0, b_0} f(u).$$

Tím jsme dokázali komutativitu operátorů $D_j^{a_0}$ a $S_{\Phi}^{a_0, b_0}$, tedy i větu.

■

Uved’me větu, která nám ukáže odhady konstant A, B pro výpočet duální waveletové kostry. Její důkaz je složitý a proto jej nebudeme uvádět. Zájemce jej nalezne v (Köllzow, 1994).

Věta 8.2: Nutná podmínka pro (A, B) -kostru.

Je-li ψ (A, B) -waveletová kostra pro a_0, b_0 , pak

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \ln(a_0)} \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq B,$$

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \ln(a_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq B.$$

Kapitola 9

Implementace Duffinova-Schaefferova algoritmu

Duffinův-Schaefferův algoritmus (dále jen D-S algoritmus) je popsán a dokázán v kapitole 7, věta 7.7. Jedná se o rekurzivní algoritmus, který z rozvoje funkce f vůči kostře Φ zpětně zrekonstruuje původní rozkládanou funkci. Z praktického hlediska jsou zde ale problémy s nekonečnými součty nebo s nekonečně početnou kostrou.

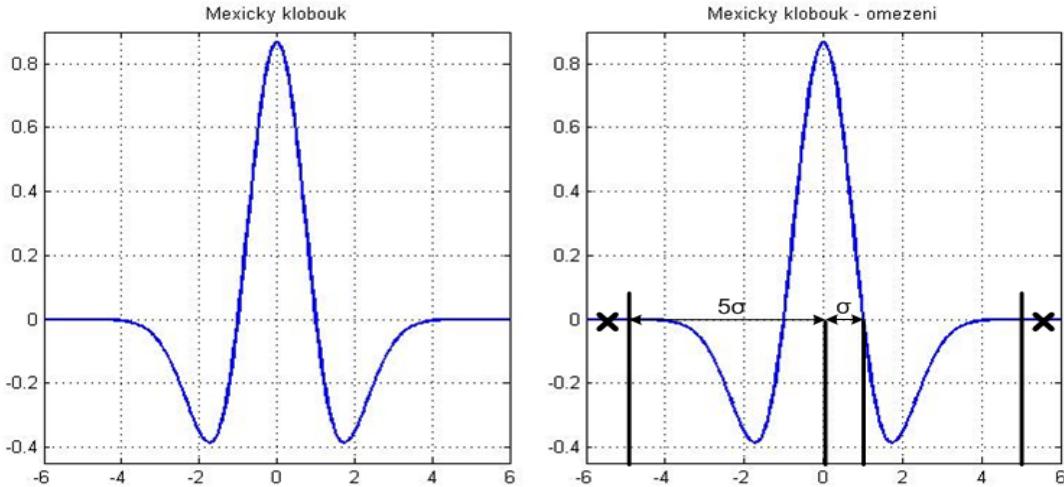
9.1 Praktická omezení

Samotný D-S algoritmus předpokládá již provedený rozklad funkce f vůči kostře Φ . Takový rozklad je ale prakticky nerealizovatelný, protože kostra obsahuje nekonečně mnoho prvků. Zabývejme se tedy nejprve vhodnými omezeními pro tvorbu kostry. Jelikož se zabýváme wavelety, ukážeme celou implementaci na waveletové kostře tvořenou waveletovými filtry zvanými „mexický klobouk“. Mexický klobouk (obrázek 9.1 vlevo) je waveletový filtr, který není ortogonální, a proto s ním nelze dělat klasická waveletová analýza. Obecný předpis je dán parametrem σ , pro naše účely ale stačí normalizovaný tvar ($\sigma = 1$)

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Definiční obor funkce $\varphi(t)$ je celé \mathbb{R} , a proto budeme muset nejprve omezit samotný mexický klobouk. To lze udělat například tak, že zvolíme nějaké malé $\varepsilon > 0$ a pokud je hodnota $\varphi(t) < \varepsilon$, tak jí vynulujeme. Tuto metodu použijeme například i při požadavku co nejlepšího zachování normy signálu. My využijeme symetrického tvaru funkce. Lze

ukázat, že funkce $\varphi(t)$ protíná osu t v bodech $\pm\sigma$ (v našem případě $t = \pm 1$). Ponechme funkci $\varphi(t)$ nenulovou pouze na intervalu $\langle -5\sigma, +5\sigma \rangle$ (obrázek 9.1 vpravo). Takto jsme dosáhli dobré aproximace původní funkce, jelikož $\varphi(\pm 5\sigma) < 10^{-4} = \varepsilon$.



Obrázek 9.1: Mexický klobouk a jeho omezení

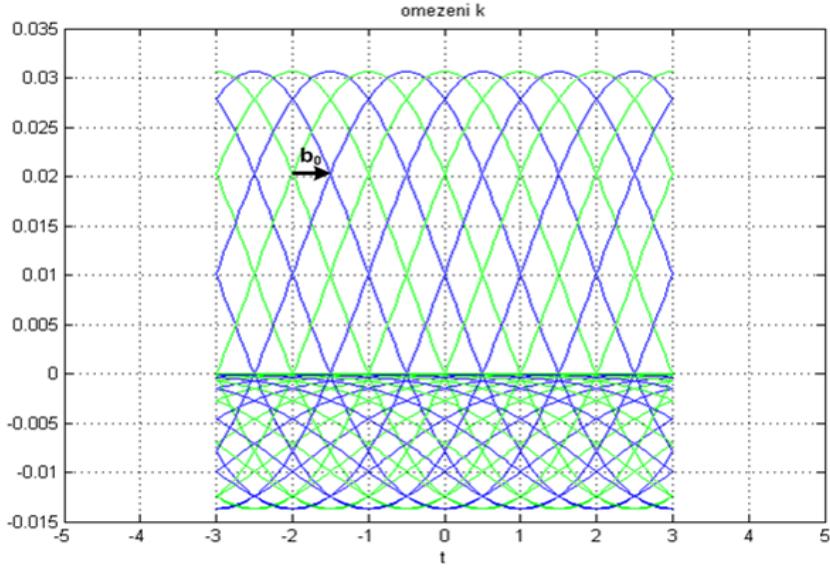
Tím jsme omezili waveletový filtr a podívejme se na omezení celé kostry. V kapitole 8 jsme zobecnili systém waveletových filtrov

$$\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \varphi(a_0^j t - b_0 k),$$

kde $a_0 \in \mathbb{R}^+, b_0 \in \mathbb{R}, j, k \in \mathbb{Z}$. Tento systém je neortogonální a můžeme jej považovat za kostru. Konstanty a_0, b_0 jsou dány pro celý systém, omezení se tedy bude týkat parametrů j, k .

Parametr k způsobuje posun funkce. Jelikož má nyní funkce $\varphi(t)$ konečný nosič a jelikož ho všechny změřené funkce v praxi mají také, je přirozené volit parametr k tak, aby funkциemi $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$ byl pokryt pouze definiční obor měřené funkce f . Situace je znázorněna na obrázku 9.2.

Poznámka: Obrázek 9.2 nezobrazuje celou kostru. Zobrazuje sice všechny uvažované posuny, ale pouze jedné úrovně (parametr j). Pro názornost obrázku je jako definiční obor měřené funkce zvolen pouze interval $\langle -3, 3 \rangle$. Dále je vidět, že do kostry nejdou vždy celé funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$, ale pouze ty jejich části, které se překrývají s definičním oborem funkce f .


 Obrázek 9.2: Omezení parametru k

Omezení parametru j (měřítko funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$) již tak snadné není. Uvědomme si totiž, že tento parametr určuje frekvenční spektrum funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$. S rostoucím j se funkce „zužuje“ (vysoké frekvence) a roste její maximum, se snižujícím se j naopak její maximum klesá a funkce se „rozšířuje“ (nízké frekvence). Velmi tedy záleží na typu měřené funkce. Mějme například pozvolně se měnící signál, na němž je nabalený šum. Volbou malých j pro tvorbu kostry Φ dostaneme po rekonstrukci approximaci původního signálu. Naopak volbou velkých j po rekonstrukci obdržíme approximaci šumu. Všechny tyto poznatky budou dále v práci názorně ukázány v grafech.

Oba parametry, j i k , mohou být dále omezeny i z důvodů hardwareových. Řekněme, že každá funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$ je dána polohou svého maxima a velikostí nosiče. Pak díky konstantnímu posunu b_0 je v definičním oboru funkce f stále stejný počet maxim funkcí $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$. Ale do kostry dáváme i takové funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$, jejichž nosič se s definičním oborem funkce f alespoň částečně překrývá. A jelikož při každém zmenšení parametru j se nosič funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$ zdvojnásobí, počet funkcí v kostře narůstá exponenciálně. Toto se ale projeví až v momentě, kdy nosič funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$ je větší než dvojnásobek základního posunu. Do té doby se vně definičního oboru funkce f nachází nejvýše jedna funkce $\varphi_{j,k}^{a_0 b_0}(t)$ a ta se ihned prvním posunem dostane do něj.

Na konci kapitoly o praktických omezeních připomeňme, že samotný D-S algoritmus slouží pro výpočet approximace K -tého řádu, což samo o sobě již nějaké omezení zahrnuje.

9.2 Důsledky omezení

V této části se podívejme, jak se nám díky omezením zjednoduší celková implementace.

Již jsme řekli, že analyzovaná funkce f má konečný nosič a všechny prvky $\varphi_{j,k}, j \in \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{Z}, k \in \mathcal{N}_2 \subset \mathbb{Z}$ kostry Φ také, dokonce stejný jako má f . Jelikož i počet prvků v kostře je díky parametrym j, k omezen, můžeme kostru přepsat do matice, označme jí M . Předpokládejme, že definiční obor funkce f je $\langle -N, N \rangle$ a funkce je vzorkovaná frekvencí $f_{VZ} = 1/T_{VZ}$. Tím se dostáváme do diskrétního prostoru a všechny délky jsou vyjadřovány přirozenými čísly v jednotkách T_{VZ} . Pak nosič funkce f má délku $L = (2N/T_{VZ} + 1)$. Dále předpokládejme, že počet prvků v kostře Ψ je $P \in \mathbb{N}$ a značme je $\varphi_p, p = 1, \dots, P$. Matice M je potom

$$M = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_P],$$

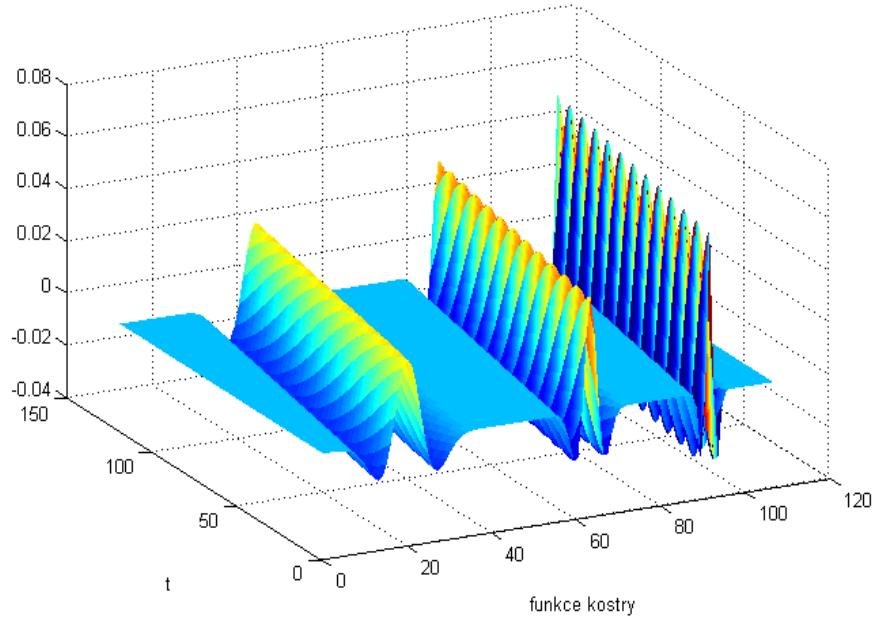
kde $\varphi_p, p = 1, \dots, P$ jsou sloupcové vektory (navzorkované funkce) délky L . Matici M můžeme detailně rozepsat

$$M = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_P(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_P(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(L) & \varphi_2(L) & \cdots & \varphi_P(L) \end{bmatrix}.$$

Vykreslením matice M dostáváme obrázek 9.3 (případ $j = -1, 0, 1$). Každý řez rovnoběžný s časovou osou t je jeden z vektorů. Na obrázku je dobře patrný jejich tvar i vzájemné posuny. V příloze A je na obrázku A.1 ukázáno jiné znázornění kostry.

V D-S algoritmu figuruje operátor kostry S_Φ . Podívejme se nyní, jak ho implementovat. Platí $S_\Phi = T_\Phi^* T_\Phi$, odvodme si tedy nejprve operátor T_Φ . Jelikož se v našem případě jedná o jeho approximaci, označme ho T_Φ^a (podobným způsobem budeme značit i ostatní approximované operátory). Operátor T_Φ^a je definován jako posloupnost skalárních součinů $(\langle f, \varphi_p \rangle)_{p=1, \dots, P} = (q_p)_{p=1, \dots, P}$. Skalární součin dvou vektorů je ale pouze jejich maticové násobení, tedy operátor T_Φ^a je násobení maticí M zprava:

$$T_\Phi^a f = f \cdot M = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_L] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_P(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_P(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(L) & \varphi_2(L) & \cdots & \varphi_P(L) \end{bmatrix} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_P].$$



Obrázek 9.3: Vektory v kostře

Dále $(T_\Phi^a)^* (T_\Phi^a f) = \sum_{p=1}^P q_p \varphi_p$. To můžeme přepsat

$$\left((T_{\Phi,i}^a)^* (T_\Phi^a f) \right)_{i=1,\dots,L} = \sum_{p=1}^P q_p (\varphi_{p,i})_{i=1,\dots,L}$$

a jelikož součet posloupností lze zapsat jako posloupnost součtů, můžeme psát

$$\left((T_{\Phi,i}^a)^* (T_\Phi^a f) \right)_{i=1,\dots,L} = \left(\sum_{p=1}^P q_p \varphi_{p,i} \right)_{i=1,\dots,L}.$$

Součet $\sum_{p=1}^P q_p \varphi_{p,i}$ je skalární součin vektoru $T_\Phi^a f$ a vektoru i -tých prvků vektorů φ_p . To ale znamená, že operátor $(T_\Phi^a)^*$ můžeme zapsat jako násobení vektoru maticí M^T zprava. Tedy

$$(T_\Phi^a)^* (T_\Phi^a f) = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_P] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_1(2) & \cdots & \varphi_1(L) \\ \varphi_2(1) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_2(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_P(1) & \varphi_P(2) & \cdots & \varphi_P(L) \end{bmatrix}$$

a jelikož $T_\Phi^a f = f \cdot M$, tak operátor kostry lze implementovat jako maticové násobení

$$S_\Phi^a f = (T_\Phi^a)^* (T_\Phi^a f) = f \cdot M \cdot M^T.$$

Dále se v D-S algoritmu vyskytují i konstanty A, B , které je pro implementaci potřeba znát. Na konci kapitoly 8 ve větě 8.2 je uvedena nutná podmínka pro waveletovou kostru. Existují i jiné odhady konstant A, B , ale jejich odvození je nad rámec matematiky uvedené v této práci, a proto jsme je neuváděli. My však můžeme využít toho, že operátor T_Φ^a je matici. Pro tento operátor dle teorie můžeme psát

$$A\|f\|^2 \leq \|T_\Phi^a f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

A protože platí i

$$\|T_\Phi^a f\| \leq \|T_\Phi^a\| \|f\|,$$

můžeme psát

$$\|T_\Phi^a f\|^2 \leq \|T_\Phi^a\|^2 \|f\|^2.$$

To znamená, že konstantu B můžeme odhadnout jako druhou mocninu normy operátoru T_Φ^a (normy matice M). Podobným postupem dostáváme odhad konstanty A jako převrácenou hodnotu druhé mocniny normy inverzního operátoru k operátoru T_Φ^a . Matematicky zapsáno, odhady konstant A, B jsou

$$B = \|M\|^2, \quad A = \frac{1}{\|M^{-1}\|^2}.$$

Poznámka: Jelikož operátor T_Φ^a je prostý, existuje jeho inverze a k matici M tedy také musí existovat inverze M^{-1} . Poněvadž ale matice M obecně není čtvercová, musíme jí na čtvercovou doplnit nulami.

Bez detailního výkladu poznamenejme, že lze použít i pseudoinverzi matice.

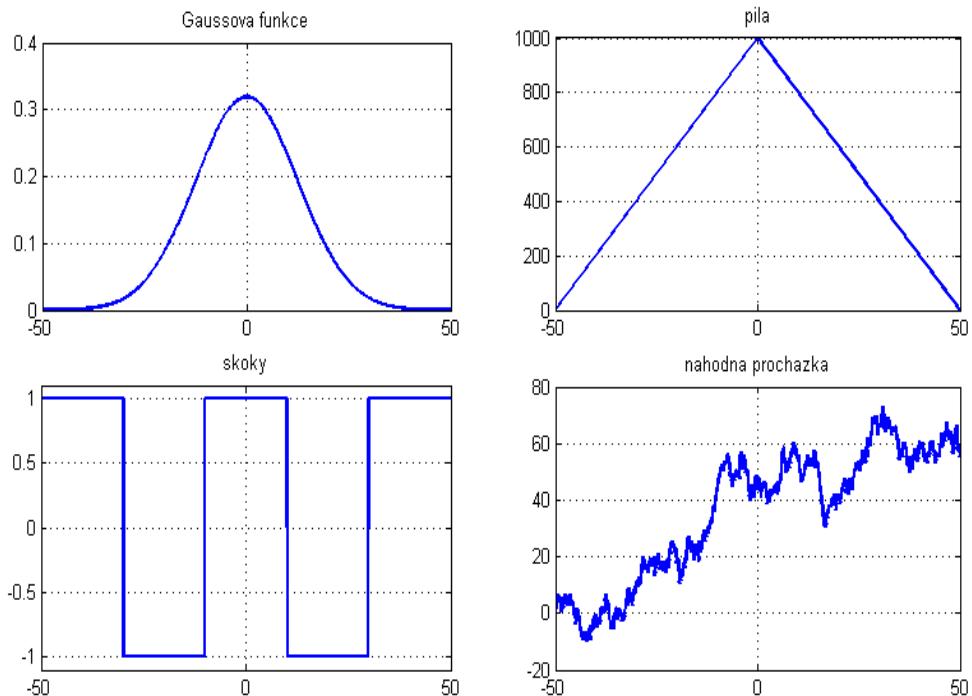
Normu matice lze spočítat několika způsoby. V teorii ale používáme Euklidovskou normu funkce (vektoru) f a jí odpovídá **spektrální norma** matice M . Ta je definována

$$\|M\| = \max \sqrt{\lambda(M^T M)},$$

kde $\lambda(M^T M)$ je vlastní číslo matice $(M^T M)$. Tím máme pro samotnou implementaci vše potřebné a zbývá jen ověřit výsledky.

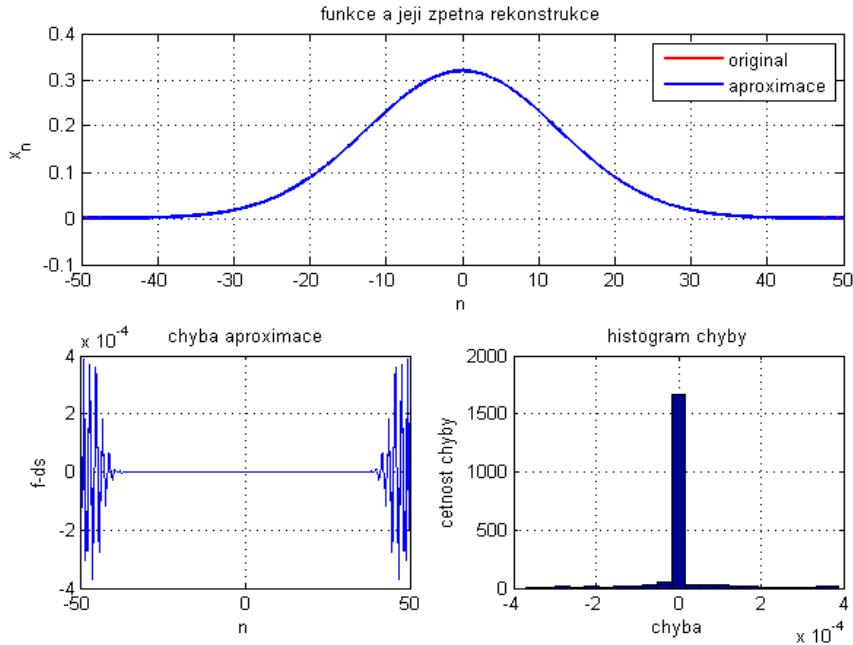
9.3 Dosažené výsledky a jejich zhodnocení

Testování implementovaného D-S algoritmu jsem prováděl na čtyřech typech funkcí, viz obrázek 9.4. Funkce jsem nazval Gaussova funkce, pila, skoky a náhodná procházka. Tyto funkce jsem volil kvůli zřejmé výrazné odlišnosti jejich frekvenčních spekter. Zatímco Gaussova funkce obsahuje převážně nízké kmitočty, pila kvůli nespojité derivaci obsahuje i frekvence vyšší. Dále skokovitá funkce, která má dobře vizuálně oddělené části s vysokými a nízkými frekvencemi a nakonec náhodná procházka jako zástupce obecné funkce. Dále uved’me, že všechny zde ukázané výsledky jsou pro funkci f změřenou na in-

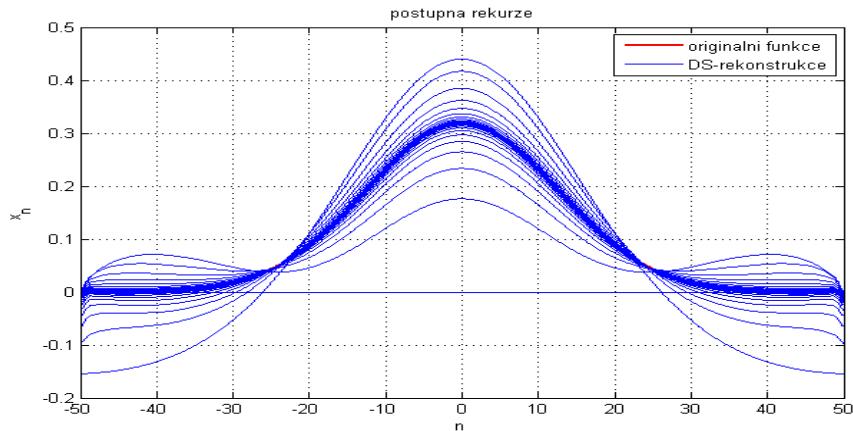


Obrázek 9.4: Testovací funkce

intervalu $\langle -50, 50 \rangle$ vzorkovaném periodou $T_{VZ} = 0.05$ a pro konstanty $a_0 = 2, b_0 = 1$ (dyadickej případ). Na základě tohoto bylo empiricky vyzkoušeno, že interval parametrů $j \in \mathbb{Z}$ stačí volit mezi -6 a $+6$. Pro $+6$ je mexický klobouk již příliš úzký a pro -6 je zase příliš široký a nenachází již při rekonstrukci téměř žádné uplatnění. I přes to však platí, že čím více prvků kostra Φ obsahuje, tím méně iterací stačí na spočítání approximace s požadovanou chybou. Připomeňme ale také, že s volbou většího rozsahu parametru j exponenciálně roste paměťová náročnost algoritmu. Ukažme si nejprve rekonstrukci Gaussovy funkce. Interval $j = -5, \dots, 4$, počet iterací $K = 500$. Na obrázku

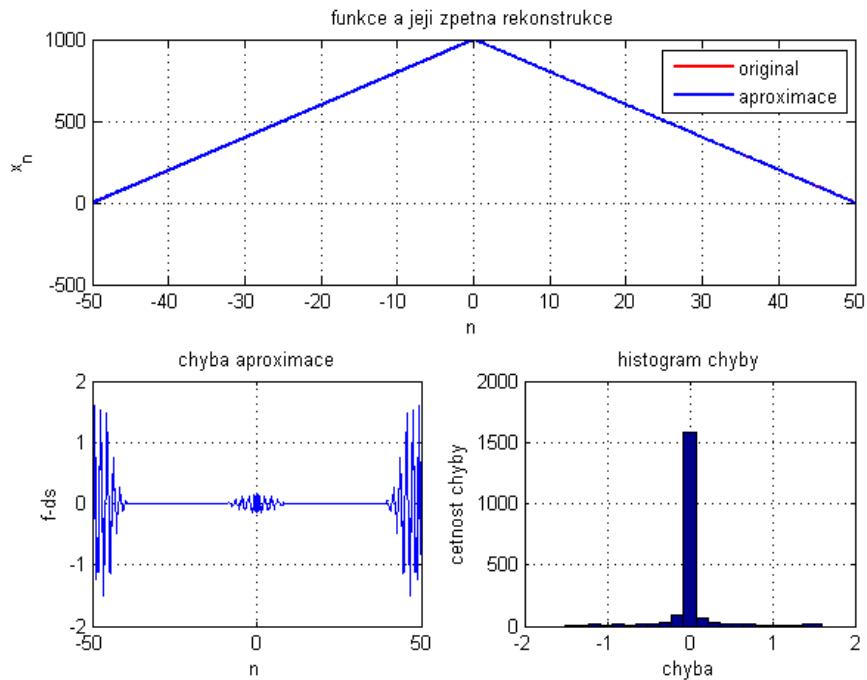


Obrázek 9.5: Rekonstrukce Gaussovy funkce

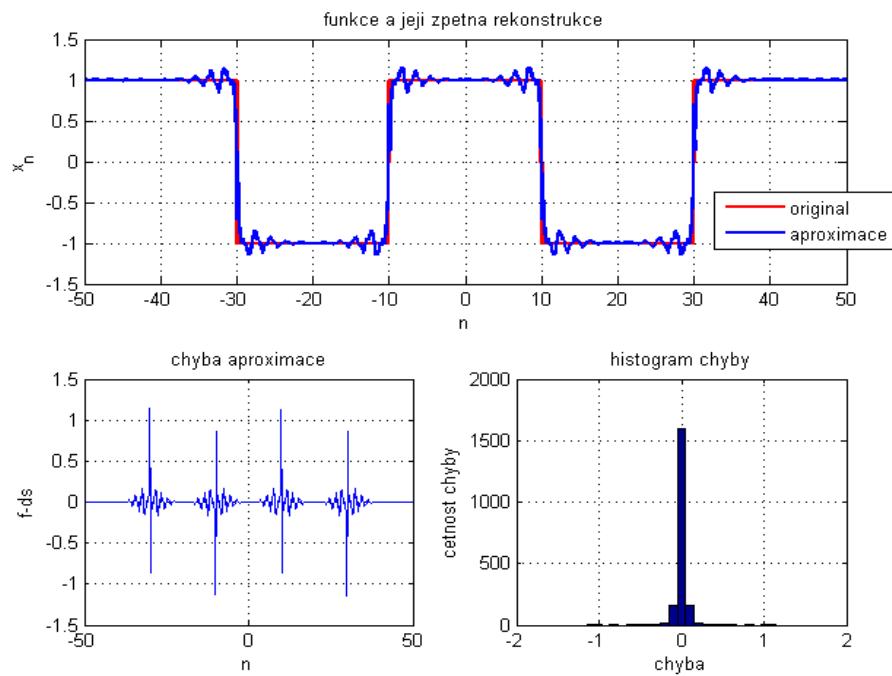


Obrázek 9.6: Ukázka zpřesňování approximace D-S algoritmem

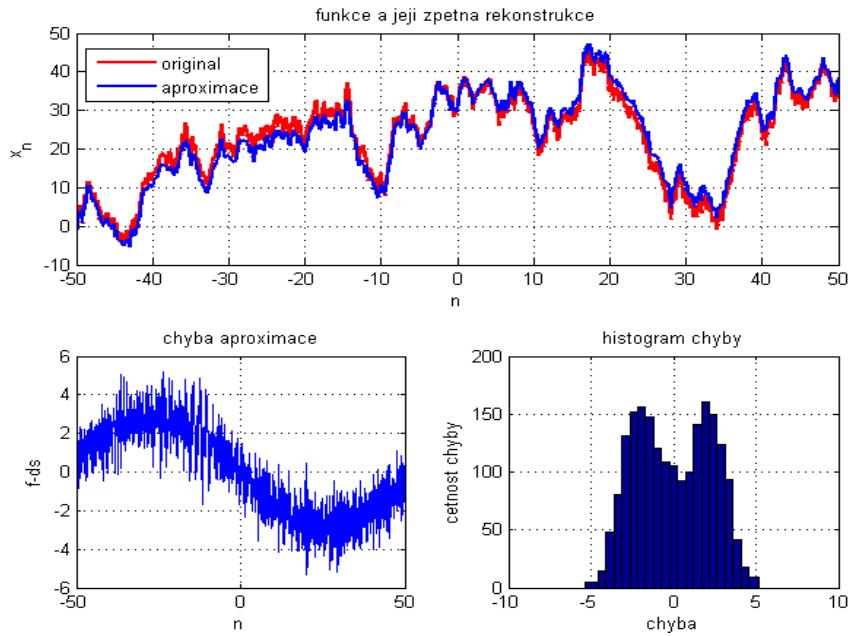
9.5 vidíme, že approximace téměř dokonale překrývá originální funkci. Graf chyby i její histogram nám to pouze potvrzují. Největší chyby jsou na krajích definičního oboru Gaussovy funkce, jelikož tam je skok z nulové hodnoty na nenulovou. Na dalším obrázku 9.6 je ukázán průběh rekurzivního D-S algoritmu a zpřesňování výsledku. Velmi podobné výsledky dostáváme i pro ostatní funkce (obrázky 9.7, 9.8 a 9.9). U náhodné procházky již je ale rozptyl chyby větší. Náhodná procházka je totiž jako zašuměný signál a nu-



Obrázek 9.7: Rekonstrukce funkce pila

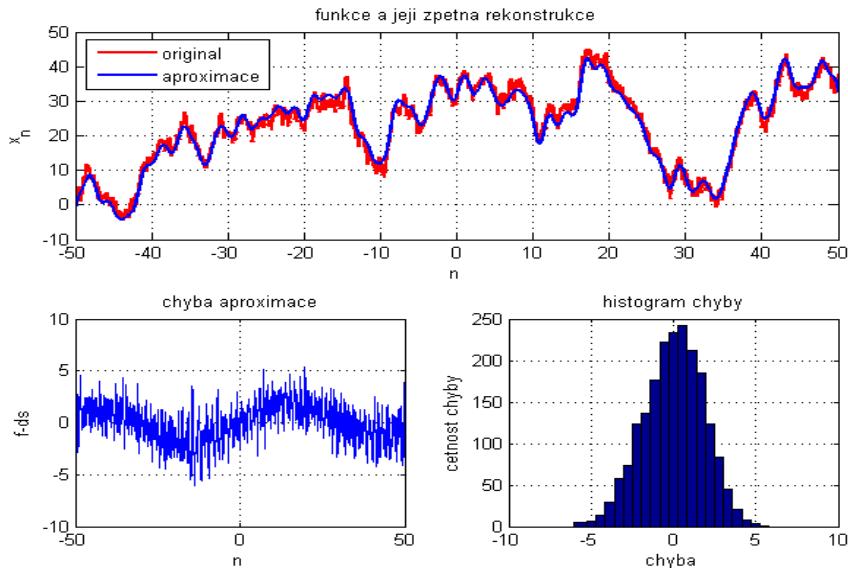


Obrázek 9.8: Rekonstrukce skokové funkce



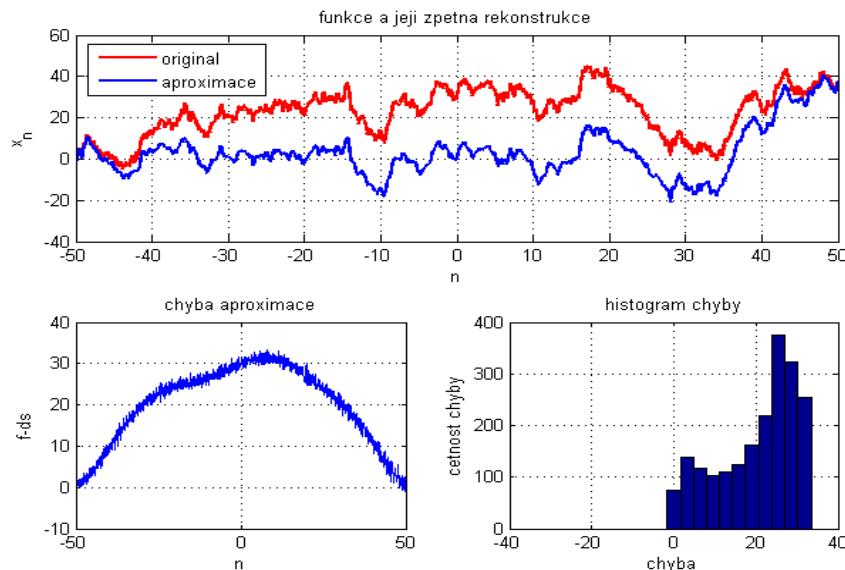
Obrázek 9.9: Rekonstrukce náhodné procházky

lová chyba by znamenala, že přesně kopírujeme šum, čehož ale s konečnou (omezenou) kostrou nikdy nejsme schopni dosáhnout. Již u omezení parametru j jsme říkali, že jeho


 Obrázek 9.10: Pouze malé frekvence, $j = -4, -3, -2, -1, 0$

volba záleží na typu měřené funkce. Obsahuje-li funkce vysoké frekvence, volíme raději větší hodnoty j a naopak. Náhodná procházka je velmi vhodná funkce pro znázornění této problematiky. Na obrázku 9.10 jsou k rekonstrukci použity pouze malé parametry j a approximace sleduje trend signálu, ale ne její šum. Naproti tomu na obrázku 9.11 jsou k rekonstrukci použity pouze velké parametry j a rekonstrukce kopíruje velmi dobře šum, nikoli však samotnou hodnotu signálu. Ta je vidět v chybě approximace.

Bohužel nic není ideální a ani tak naše approximace. Mohou nastat (a nastávají) i případy, kdy approximace nekonverguje, ale buď „kmitá“ mezi dvěma approximacemi, které jsou od originální funkce velmi odlišné (obrázek 9.12), nebo dokonce i diverguje.



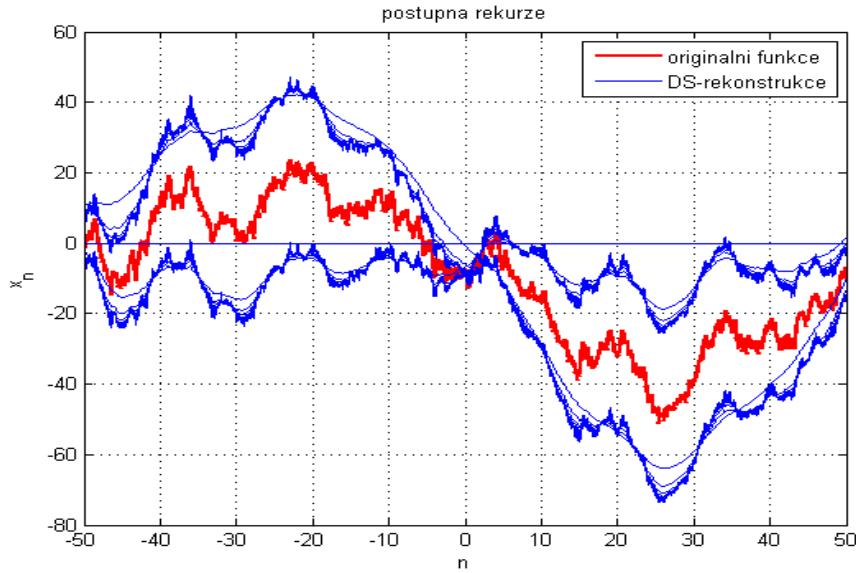
Obrázek 9.11: Pouze velké frekvence, $j = 0, 1, 2, 3, 4$

9.3.1 Norma chyby approximace a její odhad

Zabývejme se nyní ještě normou chyby approximace. Dříve jsme ukázali, že chyba approximace klesá alespoň geometricky s počtem iterací:

$$\|f - f^{(N+1)}\| \leq \left(\frac{B - A}{B + A} \right)^{N+1} \cdot \|f\|.$$

Tento odhad sice platí pro D-S algoritmus, ale ne pro ten, který jsme implementovali, nýbrž pro teoretický. Ten totiž stále počítá s původním operátorem kostry S_Φ ,



Obrázek 9.12: Možná nestabilita D-S algoritmu

který ale pracuje s nekonečně početnou kostrou. Tabulka 9.1 ukazuje teoretické hodnoty konstant A, B pro jednotlivé hodnoty b_0 , $a_0 = 2$.

b_0	A	B	$\frac{B-A}{B+A}$
0.25	13.091	14.183	0.0400
0.50	6.546	7.092	0.0400
0.75	3.223	3.596	0.0547
1.50	0.325	4.221	0.8570

 Tabulka 9.1: Tabulka teoretických hodnot A, B

V našem případě, kdy místo operátorů máme matice, dostáváme odhady konstant A, B naprosto odlišné a pro vztah nepoužitelné. Dostáváme totiž B řádově jednotky až desítky a A řádově 10^{-20} , což po dosazení do zlomku vyjde 1 a z exponenciální funkce je funkce konstantní, která navíc neříká nic jiného, než že norma chyby nebude horší než norma měřené funkce (což je ale zřejmé).

Zkusme se nyní držet myšlenky, že norma chyby s rostoucím počtem iterací klesá alespoň

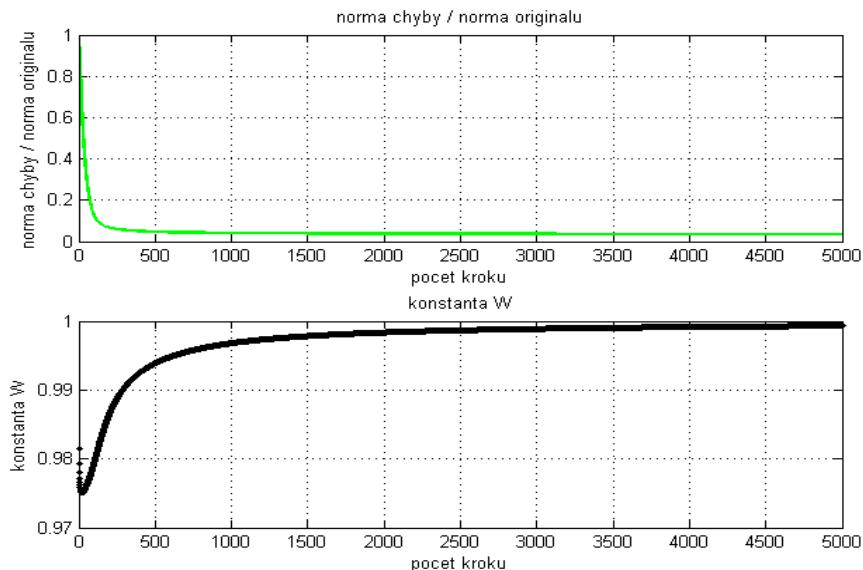
geometricky a hledejme základ W oné funkce. Položme

$$\|f - f^{(N+1)}\| \leq (W)^{N+1} \cdot \|f\|,$$

upravme

$$W \geq \left(\frac{\|f - f^{(N+1)}\|}{\|f\|} \right)^{\frac{1}{N+1}}$$

a vykresleme graf (obrázek 9.13) této funkce (pro různé testovací funkce a různé volby parametru j vychází tvar stejný, na konkrétní hodnoty nehled'me). I přes to, že pro obrázek



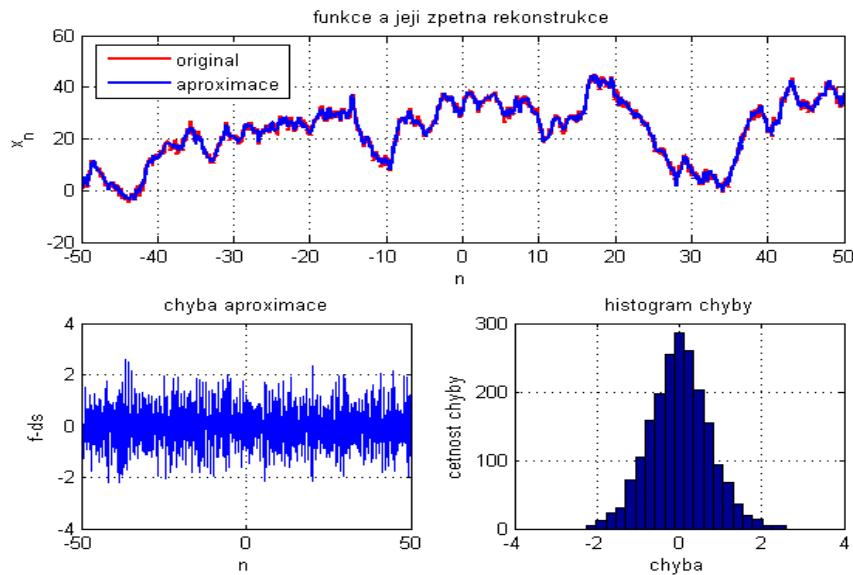
Obrázek 9.13: Poměr norem chyby approximace a originálu f a odpovídající konstanta W

bylo použito $K = 5000$ iteračních kroků, vypočítaná hodnota W s počtem iterací stále roste a nakonec konverguje v hodnotě $W = 1$, což již bylo zmíněno. Takto tedy norma chyby odhadnout nejde.

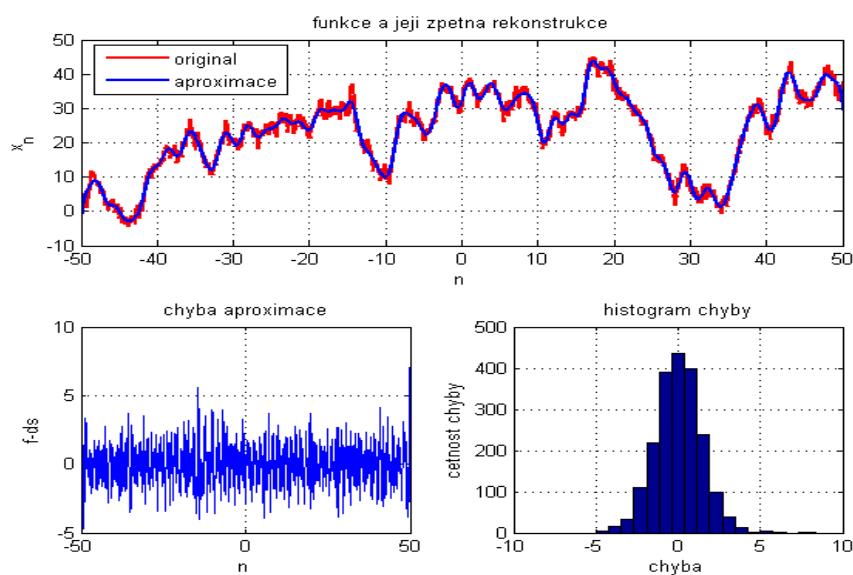
Můžeme udělat malý závěr, že praktická omezení znemožní jednoduše odhadnout normu chyby approximace. V tom nás podporuje fakt, že pro různě zvolený rozsah parametru j jsou i různé chyby approximací (viz. obrázky 9.10 a 9.11). Dále na to má vliv i volba konstant a_0, b_0 , které svými hodnotami určují počet prvků v kostře.

Poznámka: Všechny výše uvedené výsledky jsou počítány pomocí konstant A, B , které byly získány pomocí spektrální normy matice M . V tabulce 9.1 jsme uvedli teoretické hodnoty

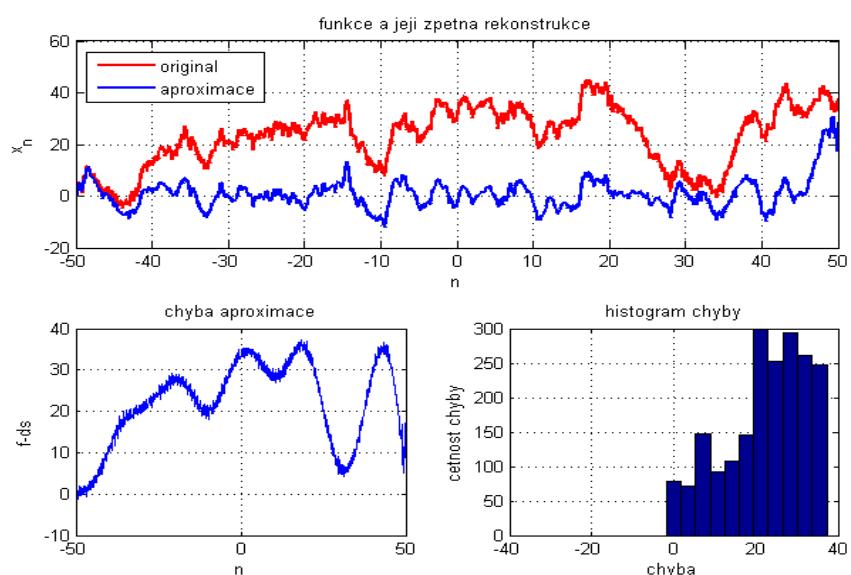
konstant A, B . Ukažme proto pro srovnání ještě rekonstrukci funkce náhodná procházka a její částečné rekonstrukce (šum a trend) pomocí těchto teoretických hodnot. Na výsledcích je patrné, že aproximace jsou přesnější, což potvrzují i průběhy a histogramy chyb.



Obrázek 9.14: Rekonstrukce náhodné procházky - teoretické A, B



Obrázek 9.15: Pouze malé frekvence, $j = -4, -3, -2, -1, 0$ - teoretické A, B



Obrázek 9.16: Pouze velké frekvence, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ - teoretické A, B

Kapitola 10

Závěr

Závěrem bych rád vystihnul cíle této práce.

Tato diplomová práce je napsána tak, aby srozumitelně vysvětlila problematiku waveletové analýzy na nekonečných prostorech a analýzu i syntézu funkcí pomocí (ne nutně konečné) neortonormální množiny. Může být doporučena ke studiu lidem, kteří se matematikou nezaobírají na vědecké úrovni, ale kterým matematika slouží především jako jazyk techniků - praktiků. Právě z důvodu srozumitelnosti jsem se v této práci snažil ukázat co nejvíce důkazů a výpočtů, aby čtenář neměl sebemenší pochyby o platnosti a funkčnosti této teorie.

Hlavním cílem praktické části byla především implementace Duffinova-Schaefferova algoritmu a ukázka dosažených výsledků včetně jejich zhodnocení.

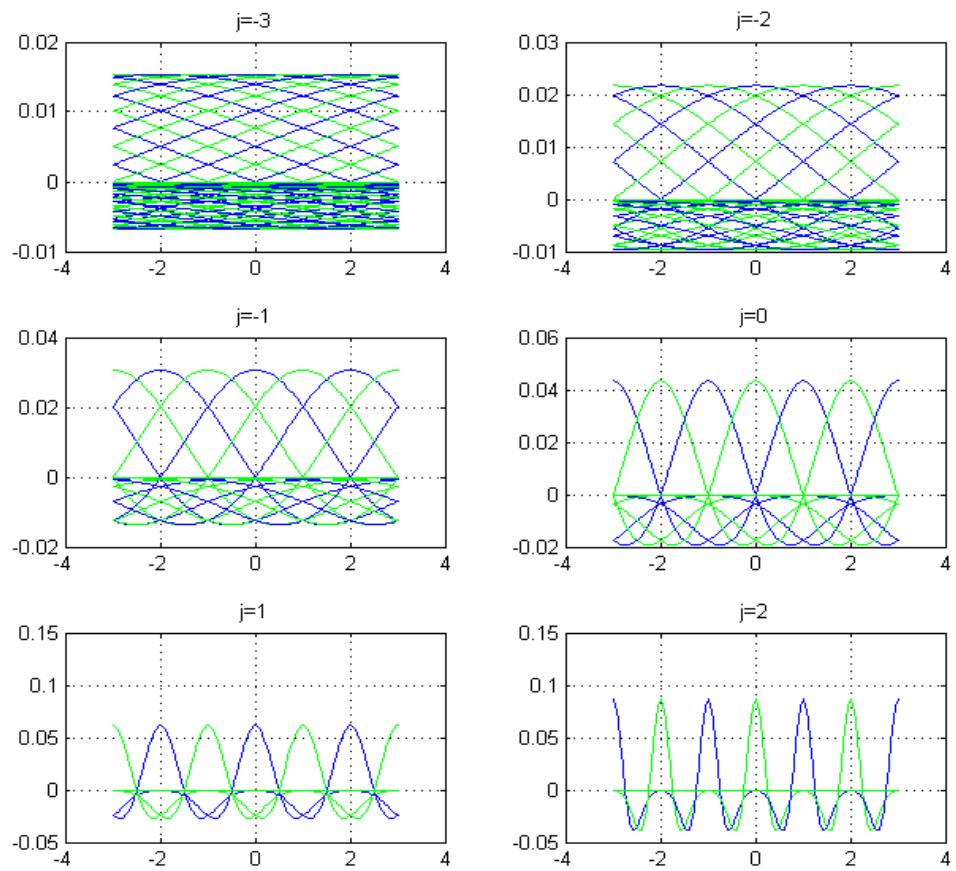
Nezbytnou součástí této práce bylo i studium matematiky nad rámec vyučovaných předmětů a v neposlední řadě i psaní rigorózního matematického textu tak, aby mohl dále sloužit ke studiu.

Literatura

- Buhagiar, D. (2006), *Functional Analysis I*, lecture notes, University of Malta.
- Frazier, M. W. (1999), *An introduction to wavelets through linear algebra*, Springer-Verlag New York, Inc., New York.
- Hamhalter, J. (2005), *poznámky z přednášek z předmětu ZWT (Základy waveletové transformace) pro doktorandy na FEL ČVUT*.
- Hamhalter, J. (2006), *ručně psané podklady pro přednášky*.
- Hamhalter, J. (2008), *Classes of Operators on Hilbert Spaces*, extended lecture notes, University of Malta.
- Kadison, R. V. and Ringrose, J. R. (1983), *Fundamental theory of operator algebras I*, Academic Press, San Diego, California.
- Kölszow, D. (1994), *Wavelets. A tutorial and a bibliography*, Erlangen.
- Najzar, K. (2004), *Základy teorie waveletů*, Učební texty Univerzity Karlovy v Praze, Praha.
- Rudin, W. (2003), *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha.
- Váňa, Z. (2007), *Bakalářská práce na téma Waveletová analýza*, Praha.

příloha A

Ukázka konečné waveletové kostry



Obrázek A.1: Celá kostra, $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2$

příloha B

Zdrojový kód pro MATLAB

```
close all;
clc;

%% VYGENEROVANI BAZE
% vzorkovaci perioda
Ts = 0.05;
N = 50;
t = -N:Ts:N;      % cas

ao = 2;      % zakladni meritko
bo = 1;

% presne hodnoty konstant A,B
B0 = [0.25 13.091 14.183;
       0.5 6.546 7.092;
       0.75 3.223 3.596;
       1.5 0.325 4.221]; %zakladni posuny

q=2;
bo = B0(q,1);
A = B0(q,2);
B = B0(q,3);

% meze meritka (parametr j)
Pmin = -5;  % minimalni j
Pmax = 4;   % maximalni j

% vygenerovani kostry do pole PSI
PSI = zeros(Pmax-Pmin+1,2*fix((N+5*ao^(-Pmin))/bo)+1,2*N/Ts+1);
for j = Pmin:1:Pmax
    meritko = ao^(-j);
    for posun = -fix((N+5*meritko)/bo):1:fix((N+5*meritko)/bo)
        PSI(-Pmin+1+j,fix((N+5*meritko)/bo)+1+posun,:) = Ts*mexicanHat(t,meritko,posun*bo);
    end
end
```

```
% % vykresleni kostry
% col = ['b','g'];
% for j = Pmin:1:Pmax
%     figure(-Pmin+1+j)
%     for i = 1:(2*fix((N+5*ao^(-j))/bo)+1)
%         D = PSI(-Pmin+1+j,i,:);
%         plot(t,D(:,col(mod(i,2)+1),'LineWidth',1);
%         hold on;
%     end
%     grid on;
%     title(strcat('j=',num2str(j)));
% end

% % vykresleni kostry do jednoho grafu
% col = ['b','g'];
% figure();
% for j = Pmin:1:Pmax
%     subplot(3,2,4+j)
%     for i = 1:(2*fix((N+5*ao^(-j))/bo)+1)
%         D = PSI(-Pmin+1+j,i,:);
%         plot(t,D(:,col(mod(i,2)+1),'LineWidth',1);
%         hold on;
%     end
%     grid on;
%     title(strcat('j=',num2str(j)));
% end

% preusporadani kostry z pole PSI do matice M
for j = Pmin:1:Pmax
    if j==Pmin
        vyber = PSI(-Pmin+1+j,1:(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1),:);
        baze = zeros(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1,2*N/Ts+1);
        for i = 1:(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1)
            baze(i,:) = vyber(1,i,:);
        end
        BB = baze;
    else
        vyber = PSI(-Pmin+1+j,1:(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1),:);
        baze = zeros(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1,2*N/Ts+1);
        for i = 1:(2*fix(N+5*ao^(-j))/bo+1)
            baze(i,:) = vyber(1,i,:);
        end
        BB = [BB;baze];
    end
end baze = BB';

% VYPOCET KONSTANT A,B - spektralni norma matice
% Q = baze;
% pQ = pinv(Q);

% spektralni norma - vlastni cisla
% B = max(eig(Q'*Q));
% A = 1/max(eig(pQ'*pQ));
```

```
% spektralni norma - singularni cisla
% Sb = svd(Q);
% BB = (max(Sb))^2;
% Sa = svd(pQ);
% AA = (min(Sa))^2;

% Euklidova norma
% B = sum(sum(Q.*Q));
% A = 1/sum(sum(pQ.*pQ));

%% DUFFIN SCHAEFFER
L = N/Ts*2+1;

% testovaci funkce
% Gaussovo rozdeleni
% f = (10/(sqrt(2*pi)*N/4)*exp(-(t(:).^2)/(2*(N/4)^2)))';

% pila
% f = [0:1:N/Ts,N/Ts-1:-1:0];

% skoky
% f = [ones(1,(L-1)/5),-ones(1,(L-1)/5),ones(1,(L-1)/5),-ones(1,(L-1)/5),ones(1,(L-1)/5+1)];

% nahodna prochazka
f = zeros(1,L);
f(1) = randn(1,1);
for i = 2:L
    f(i) = f(i-1)+randn(1,1);
end

% operator S = TT*
Sf = chngbase(f,baze,baze);

% pocet iteraci
K = 500; % >=3 kvuli Duffin-Schaefferovi

% Duffin - Schaeffer: rekonstrukcni algoritmus
F = zeros(K,length(f)); F(2,:) = 2/(A+B)*chngbase(f,baze,baze);
for k = 3:1:K
    F(k,:) = 2*F(k-1,:)-F(k-2,:)-2/(A+B)*chngbase(F(k-1,:)-F(k-2,:),baze,baze);
end
ds = F(end,:);

% chyba vysledku
pomer = (B-A)/(B+A);

g = f-ds;
Nf = norm(f,2);
NdS = norm(ds,2);
Ng = norm(g,2);
Nfaprx = pomer^K*Nf;
```

```
% vykresleni vysledku
close all;
% aproximace vs. original
figure(1);
subplot(2,1,1)
plot(t(1:end),f(1:end),'r','LineWidth',2);
hold on;
plot(t(1:end),ds(1:end),'b','LineWidth',2);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('x_n');
title('funkce a její zpětná rekonstrukce');
legend('original','aproximace');

% chyba aproximace
subplot(2,2,3)
plot(t(1:end),g);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('f-ds');
title('chyba aproximace');

% histogram chyby
subplot(2,2,4);
[Nhist,Xhist] = hist(g);
TT = max(abs(min(Xhist)),abs(max(Xhist)));
tt = -TT:TT/10:TT;
hist(g,tt);
grid on;
xlabel('chyba');
ylabel('cetnost chyby');
title('histogram chyby');

% iteracni postup algoritmu
figure(2)
plot(t(1:end),f(1:end),'r','LineWidth',2);
hold on;
for i = 1:K
    plot(t(1:end),F(i,:),'b');
end
grid on;
hold off;
xlabel('n');
ylabel('x_n');
title('postupna rekurze');
legend('originalni funkce','DS-rekonstrukce')
```

```
% norma chyby v kazdem kroku a konstanta W
figure(3)
subplot(2,1,1);
G = zeros(1,K);
for i = 3:K
    G(i) = norm(f-F(i,:),2)/Nf;
end
plot(3:K,G(3:end),'g','LineWidth',2);
grid on;
xlabel('pocet kroku');
ylabel('norma chyby / norma originalu');
title('norma chyby / norma originalu');
subplot(2,1,2); D = zeros(1,K);
for i = 3:K
    D(i) = G(i)^(1/i);
end
plot(D,'k') grid on;
axis([0 K floor(100*min(D(1,3:end)))/100 1])
xlabel('pocet kroku');
ylabel('konstanta W');
title('konstanta W');

% 3D graf kostry
% figure();
% [X,Y] = meshgrid(1:size(baze,2),1:size(baze,1));
% surf(X,Y,baze);
```