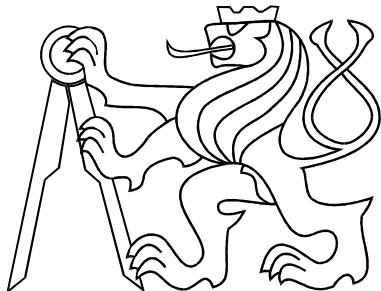


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Podpora výuky regulační techniky
v bakalářském studiu (model AMIRA)**

Praha, 2006

Autor: Tomáš Pešek

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou (bakalářskou) práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 29.6. 2006



podpis

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Jiřímu Roubalovi za jeho spolupráci.

Abstrakt

Tato práce se skládá ze tří částí. V první části je popis identifikace a regulace systému DR300-AMIRA, což je rychlostní servomechanismus. Další dvě části, které se týkají \mathcal{Z} -transformace a diskretizace jsou koncipovány jako součást studijního materiálu pro předměty Systémy a modely a Systémy a řízení. Tyto části obsahují základní teoretické informace a také řešené a neřešené příklady.

Abstract

This work is composed of three parts. In the first part there is a description of an identification and regulation of the system called DR300-AMIRA, which is a speed servomechanism. Another two parts, which are concerned with \mathcal{Z} -transformation and digitization, are created as a study material for subjects Systems and models and Systems and controlling. These parts contain basic theory and solved and unsolved examples.

Katedra řídicí techniky

Školní rok: 2005/2006

Zadání bakalářské práce

Student: Tomáš Pešek

Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: Podpora výuky regulační techniky v bakalářském studiu (model servomechanismus AMIRA)

Zásady pro výpracování:

1. Připravte sadu řešených a neřešených příkladů, které budou součástí sbírky příkladů k výuce předmětu Systémy a modely a Systémy a řízení. Konkrétně k tématu Z transformace a diskretizace.
2. Seznamte se s modelem servomechanismu AMIRA S1 v laboratoři K23.
3. Proveďte identifikaci tohoto modelu a ověřte její správnost.
4. Navrhněte regulátor pro tento systém a otestujte ho na reálném modelu.

Seznam odborné literatury:

- Petr Horáček, Systémy a modely, Praha 2000
- Jan John, Systémy a řízení, Praha 1999
- Web SARI, <http://dce.felk.cvut.cz/sari/>

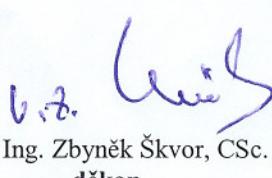
Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jiří Roubal

Datum zadání bakalářské práce: zimní semestr 2005/06

Termín odevzdání bakalářské práce: 30. 6. 2006



Prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



Prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.
děkan

Obsah

1	Úvod	1
2	Identifikace systému DR300-AMIRA	3
2.1	Teoretický model systému	4
2.2	Statické převodní charakteristiky $u \rightarrow i$ a $u \rightarrow \omega$	6
2.3	Identifikace z přechodové charakteristiky	7
2.4	Měření frekvenční charakteristiky	9
2.5	Shrnutí výsledků identifikace	12
3	Regulace systému DR300-AMIRA	13
3.1	Návrh regulátorů metodou GMK	14
3.2	Návrh PID regulátoru pomocí frekvenčních metod	16
3.3	Shrnutí výsledků regulace	18
4	Z-transformace	19
4.1	Základní definice, věty a vlastnosti	20
4.2	Příklady	24
4.3	Úlohy	29
5	Diskretizace	31
5.1	Tvarování a vzorkování signálu	32
5.2	Diskretizační metoda ZOH	34
5.3	Metody přibližné diskretizace	35
5.4	Příklady	37
5.5	Úlohy	41
6	Závěr	45

Kapitola 1

Úvod

V této práci je popsána identifikace a regulace otáček servomechanizmu DR300-AMIRA, což je rychlostní servomechanismus, který tvoří dva identické motory s pevně spojenou hřídelí. Systém dále obsahuje tachodynamo pro měření otáček motoru a IRC senzor pro měření úhlu natočení hřídele.

Úkolem identifikace je vytvořit matematický popis tohoto systému, k čemuž je možné použít rovnice popisující chování stejnosměrného motoru s cizím buzením. Také je třeba vytvořit vhodný model, který bude systém dobře approximovat, což lze provést pomocí přechodové charakteristiky vstupního a výstupního signálu. Dále je třeba určit, v jaké oblasti je odezva na vstupní signál lineární, kdy je nelineární a kdy při změně vstupního signálu nedochází k žádné změně výstupního signálu. Důležité je také zjistit frekvenční charakteristiku, což obnáší změřit odezvu systému na vstupní harmonický signál s různými frekvencemi. Zajímá nás zesílení a fázový posun výstupního signálu.

Výsledky identifikace mohou být dále použity pro řízení otáček servomechanizmu v pracovním bodě, který leží v lineární oblasti určené identifikací. K návrhu regulátorů je využit zjištěný approximační model. Metod návrhů regulátorů je celá řada, v této práci jsou regulátory navrženy frekvenční metodou a metodou geometrických míst kořenů. Výsledky řízení systému odhalí, zda jsou výsledky identifikace správné. Obecně je řízení tím lepší, čím rychlejší je odezva výstupního signálu na vstupní signál, čím menší je ustálená odchylka a překmit. Dalším důležitým parametrem je velikost akčního zásahu, což je signál vstupující do regulovaného systému.

V další části této práce jsou kapitoly \mathcal{Z} -transformace a Diskretizace, které jsou koncipovány jako studijní materiál pro předměty Systémy a modely a Systémy a řízení.

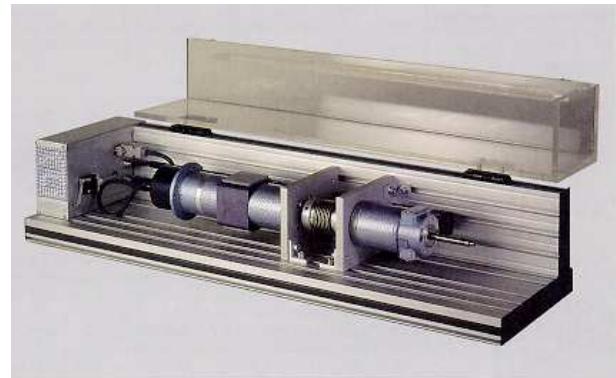
Základem automatizace je číslicové řízení, které je realizováno počítačem. Řídicí signály mají diskrétní charakter, což znamená, že nabývají nenulových hodnot pouze v určitých

časových okamžicích. Stejně tak signál nesoucí informaci o řízeném systému je počítačem vyhodnocován jen v určitých časových okamžicích. Řízené systémy však mohou mít spojitý charakter. Je tedy nutné na vstup a výstup takového systému připojit zařízení, která diskrétní vstupní signál převedou na spojitý, a výstupní spojitý signál převedou na diskrétní. Z vnějšku se pak spojitý systém bude chovat jako diskrétní a bude tedy možné použít číslicové řízení. V teorii řízení slouží k popisu systémů tzv. stavové popisy. Převod stavových popisů pro spojité systémy na stavové popisy pro diskrétní systémy se nazývá diskretizace. Matematický aparát, který se používá k popisu diskrétních systémů jsou diferenční rovnice a \mathcal{Z} -transformace.

Kapitola 2

Identifikace systému DR300-AMIRA

Systém DR300-AMIRA (viz obr. 2.1) je rychlostní servomechanismus, který tvoří dva identické motory s pevně spojenou hřídelí (neuvážujeme pružnost spojky), tachodynamo pro měření otáček ω a IRC senzor pro měření úhlu natočení hřídele φ . První motor (vlevo) je používán jako generátor (můžeme jej využít například pro simulaci proměnného zatěžovacího momentu). Druhý motor (vpravo) slouží pro řízení otáček motoru ω , respektive úhlu natočení hřídele motoru φ . Motor je řízen zesilovačem, který pracuje jako proudový regulátor (proud i můžeme měřit) se dvěma různými časovými konstantami (dle nastavení TIME1 nebo TIME2 podle návodu (FUKA, J. et al., <http://dce.felk.cvut.cz/sari/>)). Zesilovač je ovládán vstupním napětím u . Všechny veličiny jsou ve strojových jednotkách.



Obrázek 2.1: Servomechanismus DR300-AMIRA

V této kapitole je popsán postup identifikace servomechanizmu DR300-AMIRA s nastavením TIME1, což zahrnuje nalezení modelu systému, určení statických převodních charakteristik (mezi vstupními a výstupními veličinami) a frekvenčních charakteristik. Získaný model bude v další kapitole 3 využit k řízení servomechanizmu.

2.1 Teoretický model systému

Při identifikaci jsou uvažovány signály

- napětí motoru u (vstupní signál),
- proud motoru i (výstupní signál),
- otáčky motoru ω (výstupní signál),
- poloha hřídele motoru φ (výstupní signál).

Rovnice popisující chování stejnosměrného motoru s cizím buzením můžeme zapsat ve tvaru

$$L \frac{di(t)}{dt} = -R i(t) - k_e \omega(t) + u(t), \quad (2.1)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_m i(t) - b \omega(t) - m_z(t), \quad (2.2)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t), \quad (2.3)$$

kde i [A] je proud motoru, ω [s^{-1}] jsou otáčky motoru, φ [rad] je úhel natočení hřídele motoru, u [V] je vstupní napětí motoru (narozdíl od serva AMIRA, které je řízeno proudem), m_z [Nm] je vnější zatěžovací moment (druhý nezávislý vstup v našem případě reprezentovaný například generátorem), R [Ω] je elektrický odpor motoru, L [H] je indukčnost motoru, J [$kg\ m^2\ s^{-1}$] je moment setrvačnosti motoru, b [$kg\ m^2\ s^{-1}$] je konstanta tření motoru, k_e [$s\ V^{-1}$] je elektrická konstanta motoru a k_m [$kg\ m^2\ s^{-2}$] je mechanická konstanta motoru.

Pro stavový popis ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

zvolíme ke vstupnímu vektoru

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ m_z(t) \end{bmatrix}$$

a výstupnímu vektoru

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$

stavový vektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}.$$

Stavový popis získáme z rovnic popisujících chování stejnosměrného motoru s cizím buzením (2.1) až (2.3) jako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} & 0 \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t).$$

Přenosovou matici systému vypočteme podle vztahu

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

Matice \mathbf{C} je jednotková, proto ji můžeme při násobení zanedbat. Vypočteme nejprve

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} & 0 \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{k_e}{L} & 0 \\ -\frac{k_m}{J} & s + \frac{b}{J} & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}.$$

Nyní můžeme vypočítat inverzní matici

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}),$$

pomocí výpočtu determinantu

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s \left[\left(s + \frac{R}{L} \right) \left(s + \frac{b}{J} \right) + \left(\frac{k_m}{J} \right) \left(\frac{k_e}{L} \right) \right] = \\ &= s^3 + s^2 \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) + s \left(\frac{bR + k_m k_e}{JL} \right) \end{aligned}$$

a adjungované matice

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s^2 + s\frac{b}{J} & -s\frac{k_e}{L} & 0 \\ s\frac{k_m}{J} & s^2 + s\frac{R}{L} & 0 \\ \frac{k_m}{J} & s + \frac{R}{L} & s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J}\right) + \left(\frac{bR + k_m k_e}{JL}\right) \end{bmatrix}.$$

Úpravou vztahu

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + s^2\left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J}\right) + s\left(\frac{bR+k_m k_e}{JL}\right)} \begin{bmatrix} s^2 + s\frac{b}{J} & -s\frac{k_e}{L} & 0 \\ s\frac{k_m}{J} & s^2 + s\frac{R}{L} & 0 \\ \frac{k_m}{J} & s + \frac{R}{L} & s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J}\right) + \left(\frac{bR+k_m k_e}{JL}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

získáme výsledný vztah pro přenosovou matici

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^3 + s^2\left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J}\right) + s\left(\frac{bR+k_m k_e}{JL}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \left(s^2 + s\frac{b}{J}\right) & s\frac{k_e}{JL} \\ s\frac{k_m}{JL} & -\frac{1}{J} \left(s^2 + s\frac{R}{L}\right) \\ \frac{k_m}{JL} & -\frac{1}{J} \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}.$$

Nemůžeme sice číselně dopočítat přenosovou matici dosazením konstant, neboť jejich hodnoty neznáme, je však možné zjistit řád přenosu pro vstupní napětí a výstupní otáčky, což nám poskytne základní představu pro další hledání aproximačního modelu systému.

Ze vztahu

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s),$$

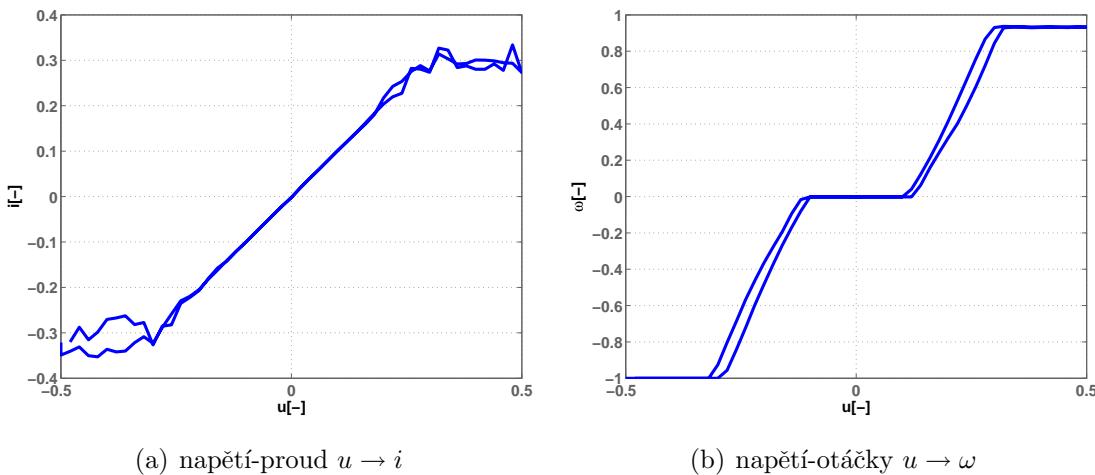
kde $\mathbf{Y}(s)$ a $\mathbf{U}(s)$ jsou Laplaceovy obrazy signálů $y(t)$ a $u(t)$, který lze v našem případě zapsat jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}(s) \\ \boldsymbol{\Omega}(s) \\ \boldsymbol{\Phi}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \\ \mathbf{G}_{31}(s) & \mathbf{G}_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{M}_z(s) \end{bmatrix}.$$

vyplývá, že můžeme pro otáčky očekávat přenos druhého řádu bez astatizmu.

2.2 Statické převodní charakteristiky $u \rightarrow i$ \mathbf{a} $u \rightarrow \omega$

Tato část slouží ke zjištění, v jakém rozsahu je možné měnit vstupní napětí, aby systém pracoval v lineární oblasti. Dále zjistíme rozsah vstupního napětí, pro které se motor netočí (tzv. pásmo necitlivosti) a rozsah vstupního napětí, pro které se již nezvyšují otáčky motoru (tzv. pásmo saturace).



Obrázek 2.2: Grafy statických převodních charakteristik

Z převodní charakteristiky napětí-proud na obr. 2.2(b) vyplývá, že převod je lineární v rozsahu vstupního napětí $u \in (-0,3; 0,3)$. Mimo tento interval je již pásmo saturace.

Převodní charakteristika napětí-otáčky vykazuje pásmo necitlivosti v intervalu vstupního napětí $u \in (-0,12; 0,12)$. Saturační oblast je pro napětí $|u| > 0,3$, když již nedochází k růstu otáček motoru. Mezi těmito dvěma oblastmi je charakteristika lineární. Z grafu je také vidět hystereze převodu pro lineární oblast, která má tloušťku přibližně 0,03.

Tyto změřené charakteristiky slouží k určení vhodného pracovního bodu, ve kterém bude provedena identifikace lineárního dynamického systému. Pracovní oblast zvolíme podle obr. 2.2(b) pro vstupní napětí v rozsahu $u = 0,21$ až $0,25$. Tato oblast bude také použita pro řízení servomechanizmu v kapitole 3.

2.3 Identifikace dynamického systému z přechodové charakteristiky

Změříme přechodovou charakteristiku zkoumaného systému, z ní odečteme zesílení a časové konstanty. Z toho již určíme přenos modelu a pro zjištění správnosti modelu porovnáme převodní charakteristiku modelu s naměřenou charakteristikou systému. Tento postup je popsán např. v (FENCLOVÁ, M. et al., 1993).

Přechodová charakteristika otáček servomechanizmu na obr. 2.3 byla změřena pro skok vstupního napětí z $u = 0,21$ na $u = 0,25$ v čase $t = 6$ s. Je vidět, že zesílení systému

je $k = 5$. Pomocí přímky, která je tečnou přechodové charakteristiky v jejím inflexním bodě byly určeny konstanty $T_u = 0,04$ a $T_n = 0,8$. Jejich poměr $\tau_u = T_u/T_n = 0,069$. Z toho vyplývá, že hledaný přenos má tvar

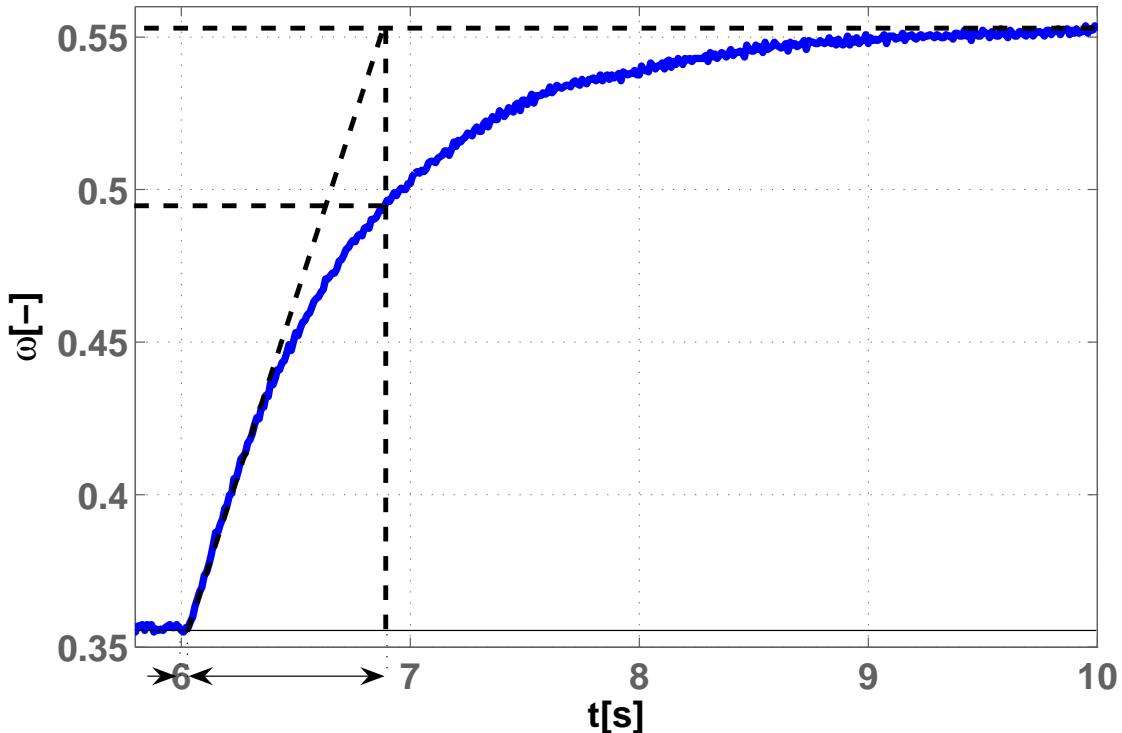
$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Z tabulky v (FENCLOVÁ, M. et al., 1993) na str. 56 byla pro $\tau_u = 0,069$ odečtena hodnota $\tau_2 = 0,1$. Z rovnic v (FENCLOVÁ, M. et al., 1993) na str. 56

$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}, \quad T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1,2564},$$

kde $t_1 = 0,9$ s je čas při 72 % ustálené hodnoty charakteristiky, byly určeny časové konstanty $T_1 = 0,651$ s a $T_2 = 0,0651$ s přenosu $G(s)$. Přenos modelu zkoumaného systému je tedy

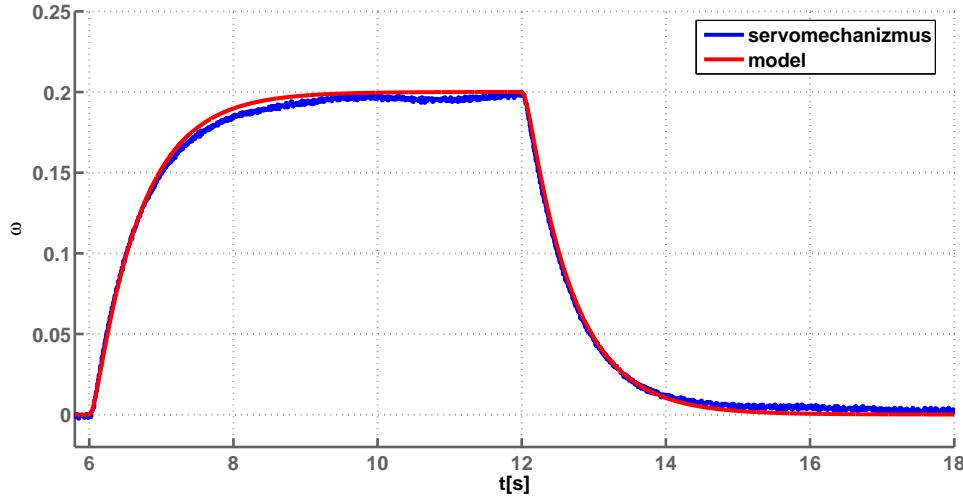
$$G(s) = \frac{5}{(0,651s + 1)(0,0651s + 1)}. \quad (2.4)$$



Obrázek 2.3: Změřená přechodová charakteristika systému

Nyní je možno porovnat přechodovou charakteristiku modelu s naměřenou přechodovou charakteristikou systému, což je provedeno na obr. 2.4. Pro lepší kontrolu správnosti

modelu je na vstupu v čase $t = 6$ s skok z 0,21 do 0,25 a v čase $t = 12$ s skok zpět na hodnotu 0,21. Hodnoty jsou posunuty tak, aby bylo na počátku přechodových charakteristik $\omega(t) = 0$.



Obrázek 2.4: Porovnání přechodových charakteristik systému a jeho modelu

Z obr. 2.4 je vidět, že navržený model (2.4) je velmi dobrou approximací identifikovaného systému.

2.4 Měření frekvenční charakteristiky

Zde bude provedeno měření frekvenční charakteristiky, k čemuž bude použito buzení systému sinusovým signálem

$$u(t) = U_0 + U_m \sin(\omega t + \alpha_u).$$

Na výstupu budou měřeny otáčky motoru

$$\omega(t) = \Omega_0 + \Omega_m \sin(\omega t + \alpha_\omega).$$

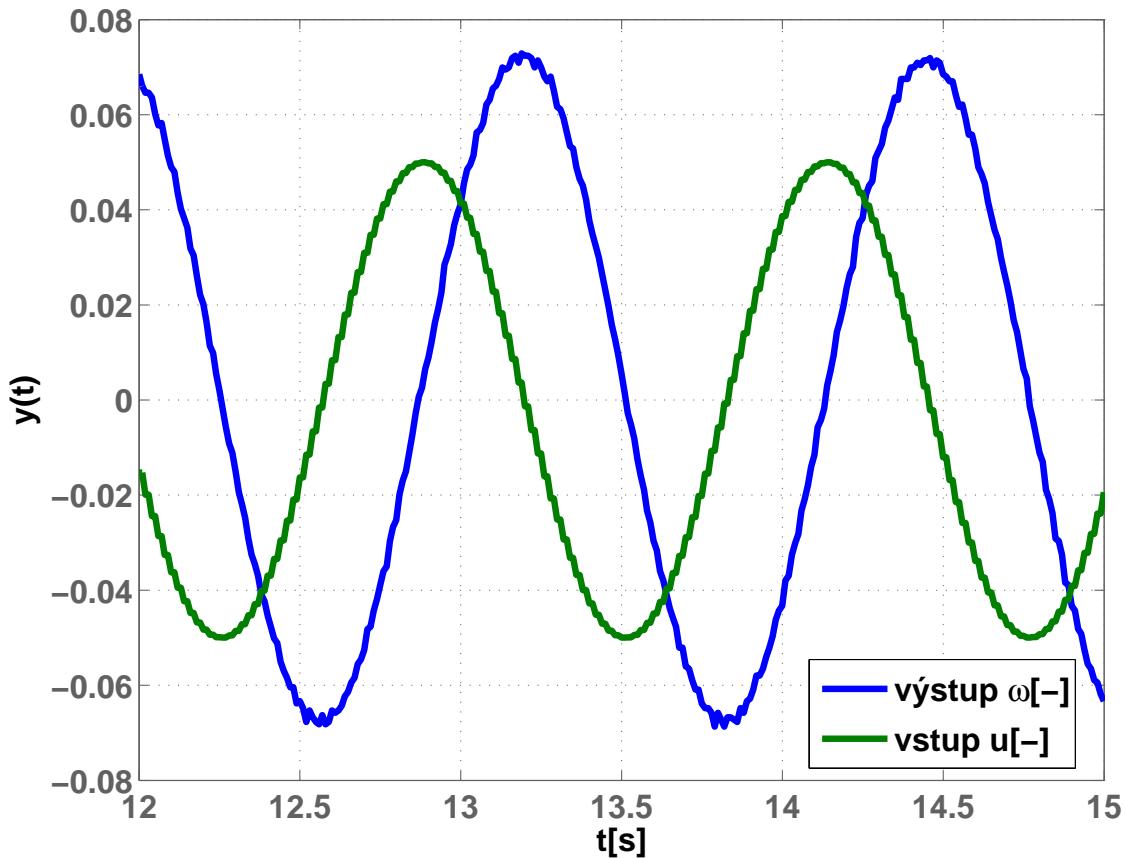
Ve zvoleném frekvenčním rozsahu tedy bude pro jednotlivé frekvence vstupního signálu odečítána amplituda výstupního signálu Ω_m a jeho fázový posuv $\alpha_\omega [rad]$. Pak bude možno určit amplitudovou frekvenční charakteristiku podle vztahu

$$A[dB] = 20 \log_{10} \frac{\Omega_m}{U_m}$$

a fázovou frekvenční charakteristiku danou vztahem

$$\varphi[\circ] = \frac{180}{\pi} (\alpha_\omega - \alpha_u).$$

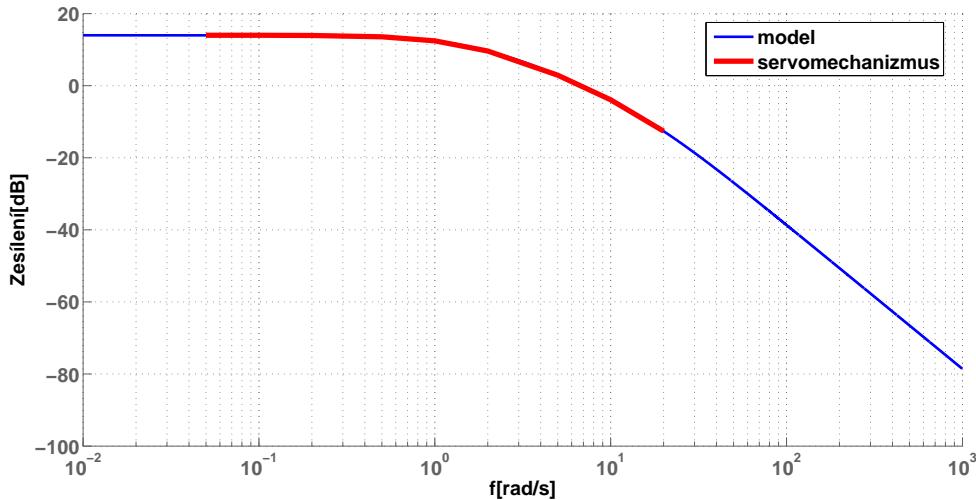
Frekvenční charakteristika byla změřena pro frekvence $\omega = \{0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20\}$ rad/s. Parametry vstupního signálu byly $U_0 = 0,22$, $U_m = 0,05$. Na obr. 2.5 je pro názornost vstupní a výstupní signál servomechanizmu pro $\omega = 5$ rad/s. U obou signálů je odečtena stejnosměrná složka.



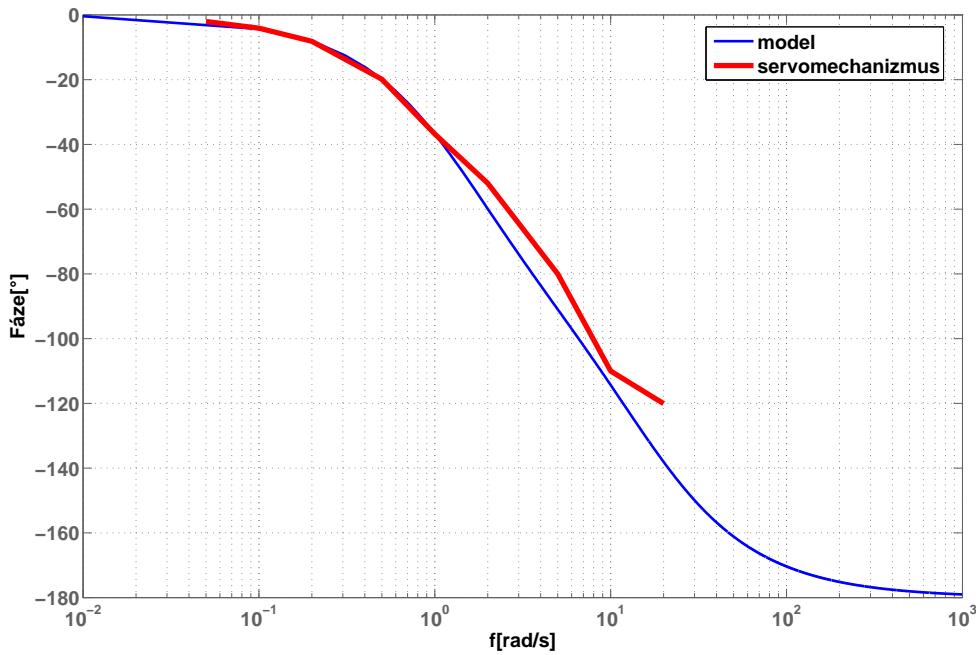
Obrázek 2.5: Průběh vstupního napětí u s frekvencí 5 rad/s a výstupních otáček ω

Z obr. 2.5 je vidět, že při frekvenci vstupního napětí $\omega = 5$ rad/s mají výstupní otáčky již relativně velký fázový posuv.

Frekvenční charakteristiky reálného systému a jeho modelu jsou na obr. 2.6 a obr. 2.7.



Obrázek 2.6: Frekvenční amplitudové charakteristiky servomechanizmu a jeho modelu



Obrázek 2.7: Frekvenční fázové charakteristiky servomechanizmu a jeho modelu

Charakteristiky na obr. 2.6 a obr. 2.7 opět potvrzují správnost navrženého modelu servomechanizmu.

2.5 Shrnutí výsledků identifikace

Ze srovnání přechodových charakteristik modelu a reálného systému na obr. 2.4 a frekvenčních charakteristik na obr. 2.6 a obr. 2.7 vyplývá, že určený model, který je popsán přenosem (2.4) je dobrou approximací identifikovaného systému. To platí samozřejmě pouze v lineární oblasti statické převodní charakteristiky, která byla určena v podkapitole 2.2 a v proměněné frekvenční oblasti. Tyto výsledky lze použít k řízení otáček servomechanizmu ve zvoleném pracovním bodě, což je realizováno v kapitole 3.

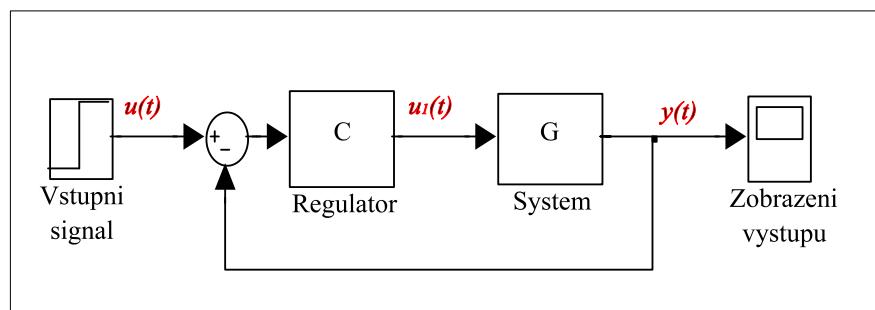
Kapitola 3

Regulace systému DR300-AMIRA

V této části bude proveden návrh regulátorů pro řízení otáček servomechanizmu, který byl identifikován v kapitole 2. Následně bude pomocí navržených regulátorů provedena regulace otáček servomechanizmu.

Pro řízení otáček systému DR300-AMIRA v lineární oblasti (v našem případě používáme skok řídicího signálu z 0,21 do 0,25), která byla zjištěna měřením statické převodní charakteristiky v podkapitole 2.2, použijeme přenos modelu (2.4). Pro řízení systému je nutné navrhnut regulátory tak, aby byla odezva výstupního signálu na vstupní signál co nejrychlejší, s co nejmenší ustálenou odchylkou (maximální přípustnou hodnotu volíme 5%) a s dostatečně malým překmitem, jehož maximální přípustnou hodnotu volíme 20%. Pro návrh regulátorů jsou použity frekvenční metody (volba fázové bezpečnosti) a metody geometrického místa kořenů (GMK). Popis těchto metod návrhu lze nalézt např. v (JOHN, J., 2003; FRANKLIN, G. et al., 2002).

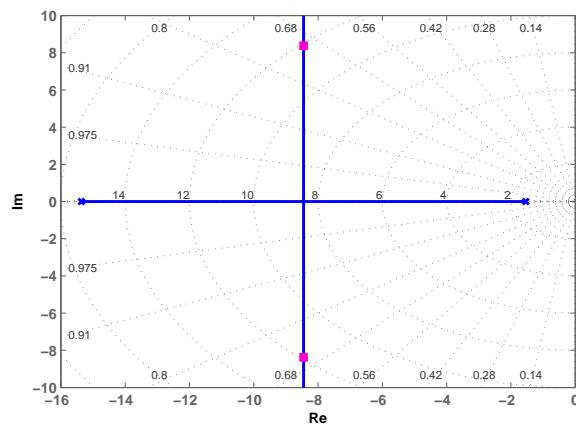
Poznámka: Regulace popsané v následujících podkapitolách 3.1, 3.2 jsou realizovány zapojením dle obr. 3.1, což je zpětnovazební řízení se zápornou zpětnou vazbou.



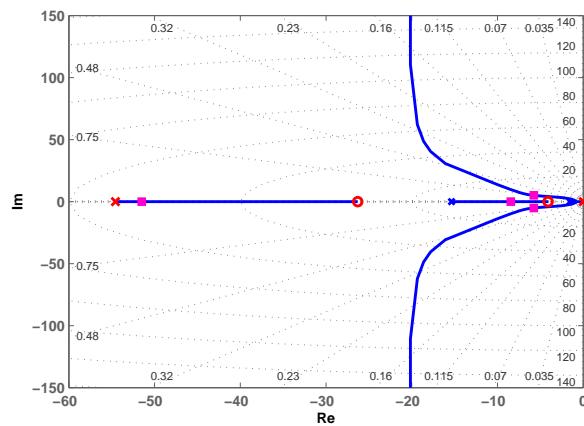
Obrázek 3.1: Schema zapojení regulační soustavy

3.1 Návrh PID regulátoru pomocí metody geometrického místa kořenů (GMK)

Do geometrického místa kořenů (viz obr. 3.2) modelu získaného identifikací vhodně umístíme dvě nuly a dva póly, které tvoří přenos regulátoru. Ideální PID regulátor je tvořen dvěma nulami a pouze jedním pólem. Ale aby byl tento regulátor realizovatelný, je třeba přidat ještě jeden pól, který odfiltruje derivační nulu. Vhodně nastavíme zesílení, aby bylo dosaženo co nejlepších parametrů regulace. GMK výsledného systému, který je tvořen přenosem modelu servomechanizmu a přenosem regulátoru je na obr. 3.3.



Obrázek 3.2: GMK modelu servomechanizmu

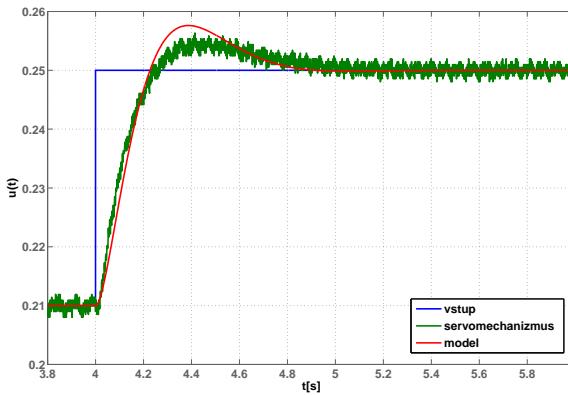


Obrázek 3.3: GMK soustavy tvořené regulátorem a modelem servomechanizmu

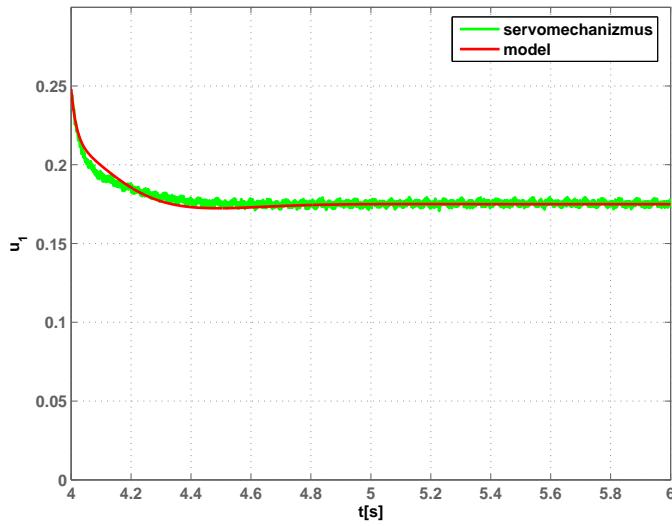
Výsledný přenos regulátoru má tvar

$$C_{PID}(s) = \frac{2,03(s + 4,091)(s + 26,31)}{s(s + 54,57)}. \quad (3.1)$$

Výsledek regulace dokumentuje obr. 3.4, kde jsou zobrazeny výstupní otáčky regulovaného systému, a obr. 3.5, kde je zobrazen akční zásah, což je signál (viz schema na obr. 3.1) vstupující do regulovaného systému.



Obrázek 3.4: PID regulace modelu a servomechanizmu

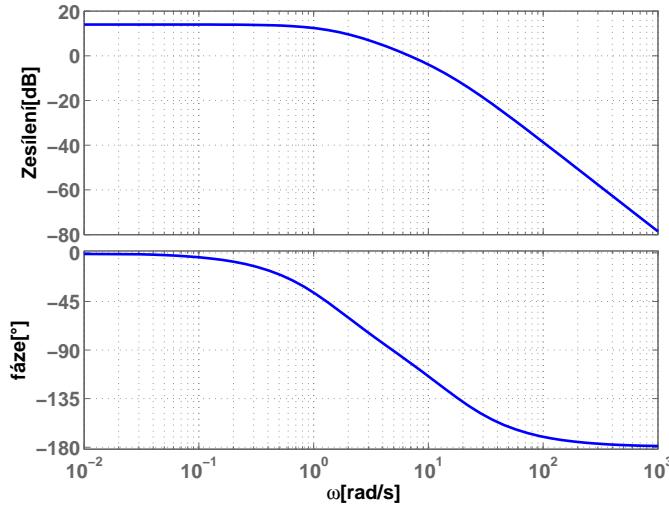


Obrázek 3.5: Akční zásah regulovaného systému

Z obr. 3.4 je patrné, že regulace má dobré parametry. Doba ustálení je přibližně 1 s, překmit je 10 % a ustálená odchylka je samozřejmě nulová.

3.2 Návrh PID regulátoru pomocí frekvenčních metod

V tomto návrhu použijeme frekvenční amplitudovou a fázovou charakteristiku modelu, která je na obr. 3.6.



Obrázek 3.6: Frekvenční amplitudovou a fázovou charakteristiku modelu

Zvolíme fázovou bezpečnost $PM = 70^\circ$. Z toho vyplývá, že hodnota fáze ve frekvenční charakteristice, na které budeme odečítat frekvenci ω_D bude

$$\omega_D = \arg\{G(j\omega_D)\} = -149,3.$$

Z frekvenčních charakteristik tedy odečeme frekvenci $\omega_D = 30$ rad/s a zesílení na této frekvenci $|G(j\omega_D)|_{dB} = -19$ dB, což odpovídá $|G(j\omega_D)| = 0,3867$.

Z těchto hodnot vypočteme pomocí vztahů pro výpočet konstant PID regulátoru (JOHN, J., 2003; FRANKLIN, G. et al., 2002) přenos

$$C_{PID}(s) = \frac{0,07(s+30)(s+3)}{s}.$$

K tomuto přenosu přidáme ještě jeden pól, který bude filtrovat derivační nulu. Pro jeho výpočet použijeme vztah

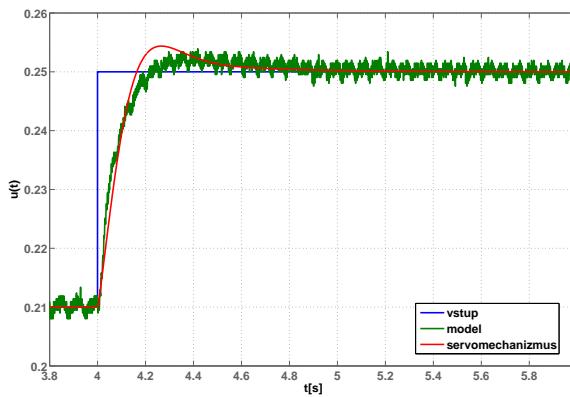
$$G_f(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_f}s + 1} \quad kde \quad \omega_f = 20\omega_D,$$

čímž docílíme toho, že přidáním tohoto pólu bude zvolená fázová bezpečnost ovlivněna jen nepatrně.

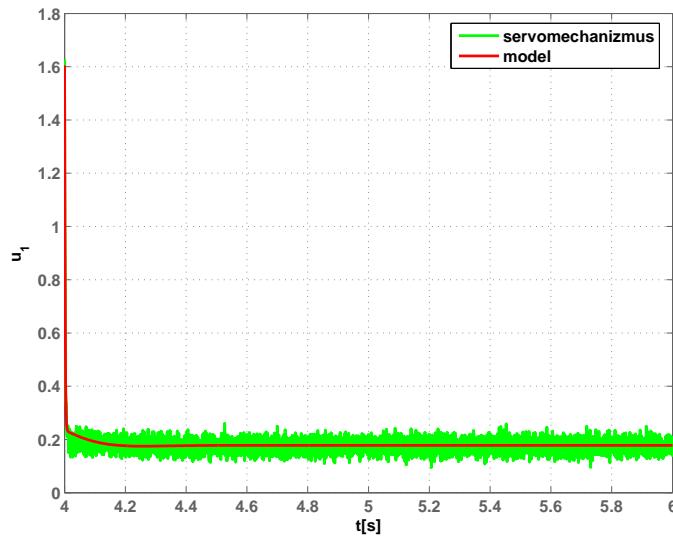
Výsledný regulátor má tedy přenos

$$C_{PID}(s) = \frac{35,88(s+30)(s+3)}{s(s+588,2)}. \quad (3.2)$$

Výsledek regulace dokumentuje obr. 3.7, kde jsou zobrazeny výstupní otáčky regulovaného systému, a obr. 3.8, kde je zobrazen akční zásah regulovaného systému.



Obrázek 3.7: PID regulace modelu a servomechanizmu



Obrázek 3.8: Akční zásah regulovaného systému

Z obr. 3.7 je patrné, že regulace má opět dobré parametry. Doba ustálení je shruba 0,8 s, překmit je 6 % a ustálená odchylka je samozřejmě nulová.

3.3 Shrnutí výsledků regulace

Navržené regulátory (3.1), (3.2) vykazují kvalitní výsledky. Z hlediska překmitu a doby ustálení je o něco lepší regulátor (3.2) navržený frekvenční metodou. Co se týká akčního zásahu, je lepší naopak regulátor (3.1) navržený metodou GMK, protože špička akčního zásahu při skokové změně vstupního signálu je mnohem menší, než u regulátoru navrženého frekvenční metodou. Z Porovnání regulací modelu (2.4) s regulacemi systému DR300-AMIRA je vidět, že parametry regulace reálného systému jsou dokonce lepší, než výsledky regulace modelu.

Poznamenejme, že u obou regulací je patrný šum, který by bylo možné částečně odstranit přidáním vhodného filtru do regulované soustavy.

Návrhem regulátorů pomocí přenosu modelu (2.4) získaného identifikací servomechanizmu a odkoušením těchto regulátorů na reálném systému ve zvoleném pracovním bodě byla potvrzena správnost výsledků identifikace.

Kapitola 4

\mathcal{Z} -transformace



\mathcal{Z} -transformace je matematický nástroj, který slouží například k řešení diferenčních rovnic podobně jako slouží Laplaceova transformace k řešení diferenciálních rovnic. \mathcal{Z} -transformace převádí posloupnosti časových vzorků na funkce komplexní proměnné z . Posloupnosti časových vzorků mohou vzniknout například při vzorkování spojitého signálu (měření spojitého signálu pouze v několika časových okamžicích). Vzorem neboli originálem či předmětem \mathcal{Z} -transformace je tedy posloupnost a jejím obrazem je řada. Používá se bud' jednostranná \mathcal{Z} -transformace nebo oboustranná \mathcal{Z} -transformace podle toho, na jakou posloupnost je aplikována. V základech řídicí techniky používáme pouze jednostrannou \mathcal{Z} -transformaci, protože předpokládáme, že vzorkování signálu začalo v čase $t = 0$ s. Proto se i v této příloze zaměříme pouze na \mathcal{Z} -transformaci jednostrannou. Oboustrannou \mathcal{Z} -transformaci lze nalézt například v (VÍCH, R., 1983) nebo na mnoha internetových stránkách.

\mathcal{Z} -transformaci i inverzní \mathcal{Z} -transformaci lze samozřejmě počítat z definic. V praxi se však většinou pro převod mezi předměty a obrazy \mathcal{Z} -transformace používají podobně jako u Laplaceovy transformace tabulky, protože výpočty pro složitější funkce jsou matematicky náročné a časově velmi zdlouhavé.

V této příloze jsou uvedeny základní definice, věty a vlastnosti týkající se \mathcal{Z} -transformace. Jsou zde zopakovány pojmy posloupnost a řada, protože je používáme při výpočtech obrazů \mathcal{Z} -transformace. Dále jsou zde uvedeny některé základní vlastnosti \mathcal{Z} -transformace, příklady a neřešené úlohy podobně jako v ostatních kapitolách. Více informací o \mathcal{Z} -transformaci lze nalézt například v (VÍCH, R., 1983; FRANKLIN, G. et al., 2002; FUKA, J. et al., [\(http://dce.felk.cvut.cz/sari/\)](http://dce.felk.cvut.cz/sari/)).

4.1 Základní definice, věty a vlastnosti

Definice 4.1 (Posloupnost): Posloupnost (nekonečné číselná posloupnost) je funkce, jejímž definičním oborem je množina celých čísel \mathbb{Z} . Posloupnost obvykle zapisujeme těmito způsoby $f(k)$, $\{f_k\}$, $\{f_k\}_{-\infty}^{\infty}$. Grafem posloupnosti je množina navzájem izolovaných bodů, viz například obr. 4.1 nebo obr. 4.2. ►

Posloupnosti můžeme rozdělit na *oboustranné* $\{f_k\}_{-\infty}^{\infty}$, kde je definičním oborem celá množina \mathbb{Z} , nebo *jednostranné* $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, pro které platí $f_k = 0$ pro $k < 0$. Funkční předpis posloupnosti může být dán buď *vzorcem pro k-tý člen* (například $f_k = 2k$), nebo rekurzivně, to je zadáním několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, který umožňuje určit další člen podle předchozích (například $f_0 = 1$, $f_{k+1} = f_k + 2$). Dále může dělit posloupnosti na konečné a nekonečné. Konečná posloupnost má součet vždy, pokud $f_k < \infty$ pro všechna k .

Definice 4.2 (Aritmetická a geometrická posloupnost): Posloupnost zadanou pomocí vztahů $f_0 = a$, $f_{k+1} = f_k + d$ nazýváme *aritmetickou posloupností* s prvním členem $a \in \mathbb{R}$ a diferencí aritmetické posloupnosti $d \in \mathbb{R}$. Posloupnost zadanou pomocí vztahů $f_0 = a$, $f_{k+1} = f_k q$ nazýváme *geometrickou posloupností* s prvním členem $a \in \mathbb{R}$ a kvocientem geometrické posloupnosti $q \in \mathbb{R}$. ►

Definice 4.3 (Řada): Nechť je dána posloupnost $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$, pak výraz $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ nazýváme *nekonečnou řadou*. Pro oboustrannou posloupnost jsou meze sumy od $-\infty$ do ∞ . ►

V souladu s definicí 4.2 můžeme opět zavést významné typy řad. Aritmetická nekonečná řada je dána vztahem $\sum_{k=0}^{\infty} (f_0 + kd)$. Pokud je $f_0 = 0$ a současně $d = 0$, pak je tato řada konvergentní a má součet $S = 0$. Jinak je tato řada vždy divergentní a nemá definovaný součet S . Geometrická nekonečná řada je dána vztahem $\sum_{k=0}^{\infty} f_0 q^k$. Pokud je $|q| < 1$, pak je geometrická řada konvergentní a má součet

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} f_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = \frac{f_0}{1 - q}, \quad (4.1)$$

jinak je tato řada divergentní a nemá definovaný součet S .

Definice 4.4 (Konvoluce): Konvolucí dvou posloupností f_k a g_k rozumíme posloupnost definovanou vztahem

$$\{f_k\} * \{g_k\} = \sum_{i=0}^k f_i g_{k-i}.$$

Konvoluci značíme symbolem „*“ a pro konvoluci platí komutativní, distributivní a asociační zákon (VÍCH, R., 1983). ▶

Definice 4.5 (Diskrétní Diracův impuls $\delta(k)$): Diskrétní Diracův impuls je definován jako posloupnost, pro kterou platí

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, \\ 0 & \text{pro } k \neq 0. \end{cases}$$

Nazývá se též diskrétní Diracova funkce nebo diskrétní jednotkový impuls. ▶

Poznámka: Existuje také spojitý Diracův impuls, který se značí $\delta(t)$ a je definován

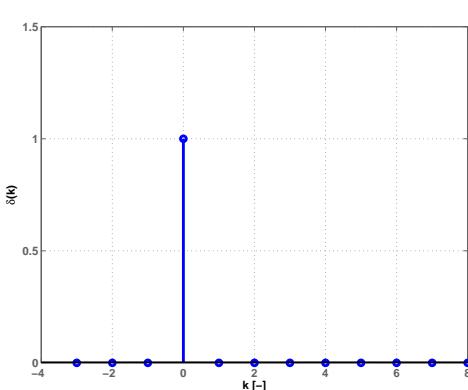
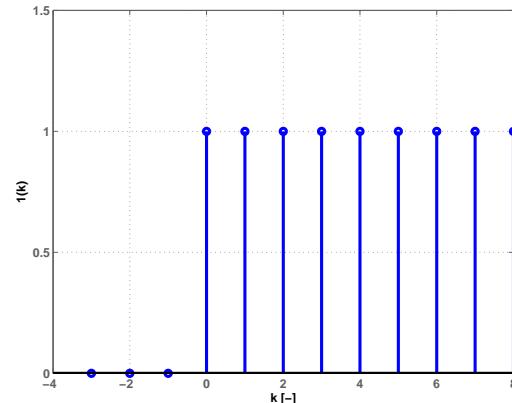
$$\delta(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \neq 0 \quad \text{a současně} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

□

Definice 4.6 (Diskrétní jednotkový skok $1(k)$): Diskrétní jednotkový skok je definován jako posloupnost, pro kterou platí

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k \geq 0, \\ 0 & \text{pro } k < 0. \end{cases}$$

▶

(a) Diskrétní Diracův impuls $\delta(k)$ (b) Diskrétní jednotkový skok $1(k)$

Obrázek 4.1: Grafy základních posloupností

Definice 4.7 (Přímá jednostranná \mathcal{Z} -transformace): Jednostranná \mathcal{Z} -transformace posloupnosti $\{f_k\}$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k},$$

kde $F(z)$ je \mathcal{Z} -obraz posloupnosti $\{f_k\}$ a $z \in \mathbb{C}$ je komplexní proměnná. Nutná podmínka pro existenci \mathcal{Z} -obrazu posloupnosti $\{f_k\}$ je, že $q < 1$, kde q je kvocient geometrické řady. Z toho vyplývá, že ke každé takové posloupnosti $\{f_k\}$ existuje číslo r tak, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ konverguje pro všechna $|z| > r$ a diverguje pro všechna $|z| < r$. Číslo $r \in \mathbb{R}$ je poloměr kruhové oblasti se středem v počátku. Aby posloupnost $\{f_k\}$ byla schopna \mathcal{Z} -transformace, je nutné a postačující, aby byla exponenciálního typu. Pro takovou posloupnost lze nalézt čísla $M > 0$, $s_0 \geq 0$ $k_0 \geq 0$ taková, aby platil vztah $|f_k| < M e^{s_0 k}$, pro $k \geq k_0$ (VÍCH, R., 1983). ▶

Poznámka: Místo komplexní proměnné z se někdy používá písmenko q a místo proměnné z^{-1} písmenko d , která však nemají význam komplexní proměnné, ale operátoru a používají se v časové oblasti jako funkcionály. Máme-li například polynom

$$a(d) = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \dots,$$

pak aplikace tohoto funkcionálu na posloupnost $u(k)$ je

$$a(d)u(k) = a_0 u(k) + a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \dots.$$

□

Definice 4.8 (Zpětná \mathcal{Z} -transformace): Zpětná \mathcal{Z} -transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky C , která obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $k = 1, 2, \dots$ platí

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz.$$

▶

Dále se již budeme zabývat pouze jednostrannými posloupnostmi a jednostrannou \mathcal{Z} -transformací, kterou je možno aplikovat na jednostranné posloupnosti.

Věta 4.1 (O linearitě): Nechť a, b jsou komplexní čísla, f_k a g_k jsou posloupnosti exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$. Pak platí

$$\mathcal{Z}\{af_k + bg_k\} = a\mathcal{Z}\{f_k\} + b\mathcal{Z}\{g_k\} = aF(z) + bG(z).$$

Věta 4.2 (O podobnosti obrazů (o substituci v obrazu)): Nechť a je komplexní číslo, f_k je posloupnost exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$. Pak platí

$$\mathcal{Z}\{a^k f_k\} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

Poznámka: Pokud $\mathcal{Z}\{f_k\}$ existuje pro $|z| > r$, pak $\mathcal{Z}\{a^k f_k\}$ existuje pro $|z| > |a|r$, kde $a \neq 0$ je nějaké komplexní číslo. \square

Věta 4.3 (O posunutí vpravo): Nechť f_k je posloupnost exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$ a $m \in \mathbb{N}_0$, potom platí

$$\mathcal{Z}\{f_{k-m}\} = \mathcal{Z}\{f(k-m)\} = z^{-m}F(z).$$

Těmto diskrétním funkcím říkáme zpožděné.

Věta 4.4 (O posunutí vlevo): Nechť f_k je posloupnost exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$ a $m \in \mathbb{N}_0$, potom platí

$$\mathcal{Z}\{f_{k+m}\} = z^k \left[\mathcal{Z}\{f_k\} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i} \right].$$

Těmto diskrétním funkcím říkáme urychlené.

Věta 4.5 (O derivaci obrazů): Nechť f_k je posloupnost exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$, potom platí

$$\mathcal{Z}\{k f_k\} = -z \frac{d}{dz} F(z).$$

Poznámka: Pokud $\mathcal{Z}\{f_k\}$ existuje pro $|z| > r$ (poloměr konvergence f_k), pak také $\mathcal{Z}\{k f_k\}$ existuje pro $|z| > r$. \square

Věta 4.6 (O konvoluci): Nechť f_k, g_k jsou posloupnosti exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$, potom platí

$$\mathcal{Z}\{f_k * g_k\} = F(z)G(z).$$

Poznámka: Pokud $\mathcal{Z}\{f_k\}$ existuje pro $|z| > r_1$ a $\mathcal{Z}\{g_k\}$ existuje pro $|z| > r_2$, pak obraz $\mathcal{Z}\{f_k * g_k\}$ existuje pro $|z| > \max(r_1, r_2)$. \square

Věta 4.7 (O limitě předmětu v počátku a nekonečnu): Nechť f_k je posloupnost exponenciálního typu, $k \in \mathbb{N}_0$, potom platí

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1+} (z-1)F(z),$$

pokud $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ existuje.

4.2 Příklady

Příklad 4.1: Určete součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k$, kde $a_0 = 10$ a $q = 0,5$. Dále určete součet prvních čtyř členů.

Řešení: Součet geometrické řady je podle vztahu (4.1) $S = a_0 \frac{-1}{q-1}$. Po dosazení vyjde $S = 10 \frac{-1}{0,5-1} = 20$. Součet prvních k členů geometrické řady lze obecně vypočítat jako $S_k = a_0 \frac{q^k - 1}{q-1}$. Tedy $S_4 = 10 \frac{0,5^4 - 1}{0,5-1} = 18,75$. \checkmark

Příklad 4.2: Odvodte \mathcal{Z} -obraz diskrétního jednotkového skoku $1(k)$.

Řešení: Podle definice 4.7 platí

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k.$$

Jde o geometrickou řadu se součtem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{z} - 1}.$$

Aby existoval \mathcal{Z} -obraz této funkce, musí platit podmínka $|z^{-1}| < 1$. Pak platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} - 1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$

Odtud

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.3: Je dána konečná posloupnost $\{f_k\} = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-2}, f_{n-1}\}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $n < \infty$. Určete \mathcal{Z} -obraz pro $f_k = a^k$.

Řešení: Obecně vypadá \mathcal{Z} -obraz jako

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k z^{-k} = f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{-(n-1)} = \frac{f_0 z^{n-1} + f_1 z^{n-2} + \dots + f_{n-1}}{z^{n-1}}.$$

Pro $f_k = a^k$ je

$$\mathcal{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^{n-1+1} - 1}{\frac{a}{z} - 1} = \frac{\frac{a^n + z^n}{z^n}}{\frac{a}{z} - 1} = \frac{a^n - z^n}{z^{-1}(a - z)}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.4: Dokažte, že platí věta o linearitě 4.1.

Řešení: Podle definice 4.7 platí

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{af_k + bg_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{af_k + bg_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{af_k}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{bg_k}{z^k} = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{z^k} + b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{z^k} = \\ &= a\mathcal{Z}\{f_k\} + b\mathcal{Z}\{g_k\}.\end{aligned}$$

✓

Příklad 4.5: Dokažte, že platí věta o podobnosti obrazů 4.2.

Řešení: Z definice 4.7 platí

$$\mathcal{Z}\{a^k f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k f_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{\left(\frac{z}{a}\right)^k} = F\left\{\left(\frac{z}{a}\right)\right\}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.6: Určete obraz diskrétní funkce $f_k = a^k$ s využitím věty o podobnosti obrazů 4.2.

Řešení: Zaměníme a^k za $a^k 1(k)$ a dostaneme

$$\mathcal{Z}\{a^k\} = \mathcal{Z}\{a^k 1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.7: Dokažte, že platí věta o posunutí vpravo 4.3.

Řešení: Z definice 4.7 příšeme

$$\mathcal{Z}\{f_{k-m}\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f_{k-m}}{z^k} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f_{k-m}}{z^{(k-m)+m}} = \frac{1}{z^m} F(z).$$

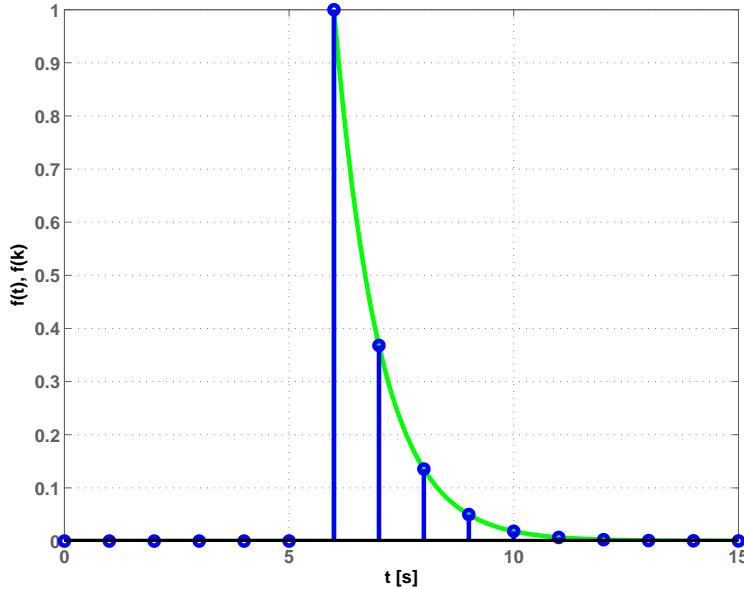
Poznamenejme, že nekonečná řada začíná pro $k = m$, protože pro jednostrannou posloupnost jsou prvky s indexem $k < m$ nulové. ✓

Příklad 4.8: Určete \mathcal{Z} -obraz posloupnosti $\{f_{k-2}\} = \{e^{\alpha(k-2)}\}$, tedy posloupnosti $\{e^{\alpha k}\}$ posunuté o dva členy vpravo.

Řešení: Podle věty o posunutí v pravo 4.3 platí

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha(k-2)}\} = z^{-2} \mathcal{Z}\{e^{\alpha k}\} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k} z^{-k} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\alpha}}{z}\right)^k = z^{-2} \frac{1}{1 - \frac{e^{\alpha}}{z}} = \frac{1}{z(z - e^{\alpha})}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.9: Uvažujte posloupnost, která vznikne vzorkováním spojité funkce $f(t)$ s periodou vzorkování $T_s = 1$ s viz obr. 4.2. Pro funkci $f(t)$ platí $f(t) = 0$ pro $t < 6$ a $f(t) = e^{-(t-6)}$ pro $t \geq 6$. Určete \mathcal{Z} -obraz vzniklé posloupnosti.



Obrázek 4.2: Graf posloupnosti vzniklé vzorkování funkce $f(t)$ s periodou vzorkování $T_s = 1$ s

Řešení: Posloupnost můžeme zapsat jako posunutou $\{f_{k-6}\} = \{e^{-(k-6)}\}$. Pak podle věty o posunutí v pravu 4.3 platí

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{e^{-(k-6)}\} &= z^{-6}\mathcal{Z}\{e^{-k}\} = z^{-6}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}z^{-k} = z^{-6}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ez}\right)^k = \\ &= z^{-6} \frac{1}{1-\frac{1}{ez}} = \frac{1}{z^5(z-e^{-1})}. \end{aligned}$$

✓

Příklad 4.10: Dokažte větu o konvoluci 4.6.

Řešení: Pro obrazy posloupností f_k a g_k platí podle definice 4.7

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{z^k}, \quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{z^k}.$$

To jsou podle podmínky existence \mathcal{Z} -obrazu funkce absolutně konvergentní řady. Pro součin těchto řad platí

$$F(z)G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{z^k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^k f_n g_{k-n}. \quad \checkmark$$

Příklad 4.11: Určete konvolutorní součin diskrétních funkcí $f_k = k$ a $g_k = 1(k)$. Určete \mathcal{Z} -obraz tohoto součinu.

Řešení: Nejprve spočteme konvolutorní součin

$$\{f_k * g_k\} = \sum_{n=0}^k f_n g_{k-n} = \sum_{n=0}^k n = \frac{k}{2} (k+1).$$

\mathcal{Z} -obraz vypočteme pomocí věty o konvoluci 4.6 a získáme

$$\mathcal{Z}\{f_k * g_k\} = F(z)G(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \frac{z}{(z-1)} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Uvědomte si, jak je výhodné použití větu o konvoluci 4.6 oproti výpočtu \mathcal{Z} -obrazu z vypočteného konvolutorního součinu, který by byl velmi pracný. \checkmark

Příklad 4.12: Nalezněte počáteční a ustálenou hodnotu vzorkovaného signálu, jestliže jeho \mathcal{Z} -obraz je

$$F(z) = \frac{3z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3(z-1)}.$$

Řešení: Použijeme větu o limitě předmětu v počátku a v nekonečnu 4.7. Počáteční hodnotu vypočteme jako limitu předmětu v počátku, tedy

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3(z-1)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3} - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = 0.$$

Ustálenou hodnotu spočítáme jako limitu předmětu v nekonečnu, tedy

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k &= \lim_{z \rightarrow 1+} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1+} (z-1) \frac{3z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3(z-1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+} \frac{3z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^3} = 2. \end{aligned}$$

\checkmark

Příklad 4.13: Je zadána diferenční rovnice

$$6y(k+2) - 7y(k+1) + 2y(k) = 3u(k+1) + 4u(k).$$

Vyřešte tuto rovnici pomocí \mathcal{Z} -transformace a rekurentně za předpokladu, že $u(k) = 1(k)$ a počáteční podmínky jsou $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Dále určete hodnotu $y(k)$ pro $k \rightarrow \infty$.

Řešení: \mathcal{Z} -transformací zadání rovnice získáme podle věty 4.4 vztah

$$6(z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)) - 7(zY(z) - zy(0)) + 2Y(z) = 3(zU(z) - zu(0)) + 4U(z).$$

Dosadíme-li \mathcal{Z} -obraz jednotkového skoku, který je podle příkladu 4.2

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1},$$

do předchozí rovnice, dostáváme rovnici

$$6(z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)) - 7(zY(z) - zy(0)) + 2Y(z) = 3\left(z\frac{z}{z-1} - zu(0)\right) + 4\frac{z}{z-1}.$$

Po dosazení za $u(0)$, $y(0)$ a $y(1)$ můžeme vyjádřit \mathcal{Z} -obraz $Y(z)$ jako

$$Y(z) = \frac{6z^2 + z}{(6z^2 - 7z + 2)(z-1)} = \frac{4}{z - \frac{1}{2}} - \frac{10}{z - \frac{2}{3}} + \frac{7}{z-1}.$$

Zpětnou \mathcal{Z} -transformací této rovnice určíme řešení původní diferenční rovnice

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 10\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + 7(1)^{k-1} \right] 1(k-1).$$

Odtud můžeme vypočítat $y(2) \doteq 2.33$, $y(3) \doteq 3.56$, $y(4) \doteq 4.54$, ... a znázornit toto řešení do obr. 4.3.

Hodnotu $y(k)$ pro $k \rightarrow \infty$ určíme ze \mathcal{Z} -obrazu pomocí věty 4.7 jako

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)Y(z) = \frac{(6z^2 + z)(z-1)}{(6z^2 - 7z + 2)(z-1)} = 7$$

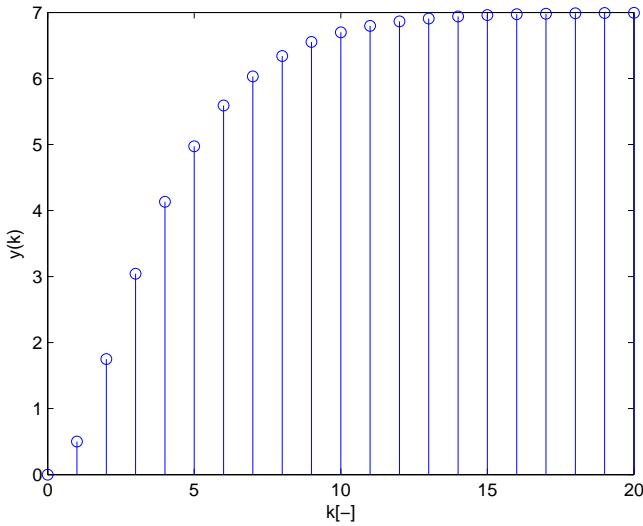
nebo přímo jako

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 7.$$

Pro rekurentní řešení si ze zadání diferenční rovnice vyjádříme

$$y(k+2) = \frac{1}{6} [7y(k+1) - 2y(k) + 3u(k+1) + 4u(k)].$$

S využitím zadánych počátečních podmínek můžeme vypočítat $y(2) \doteq 2.33$, $y(3) \doteq 3.56$, $y(4) \doteq 4.54$, Řešení je samozřejmě stejné jako v případě použití \mathcal{Z} -transformace.



Obrázek 4.3: Řešení diferenční rovnice

Vyzkoušejte si sami vyřešit zadanou diferenční rovnici pro jiné počáteční podmínky. Jak se pak změní ustálená hodnota řešení? ✓

4.3 Úlohy

Příklad 4.14: Určete součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k$, kde $a_0 = 4$ a $q = 0,9$. Dále určete součet prvních deseti členů.

Příklad 4.15: Určete obraz diskrétní funkce $f_k = a^{k+2}$.

Příklad 4.16: Nalezněte počáteční a ustálenou hodnotu vzorkovaného signálu, jestliže jeho \mathcal{Z} -obraz je

$$F(z) = \frac{5z^4 - z^3 + 2z^2 + 2z - 9}{z^3(z^2 - 1)}.$$

Příklad 4.17: Určete konvolutorního součinu diskrétních funkcí $f_k = 1(k)$ a $g_k = 1(k)$. Určete \mathcal{Z} -obraz tohoto součinu.

Příklad 4.18: Odvoďte \mathcal{Z} -obraz diskrétní Diracovy funkce $\delta(k)$.

Příklad 4.19: Určete obraz diskrétní funkce $f_k = a^k$.

Příklad 4.20: Nalezněte obraz diskrétní funkce $f_k = 1 - (-3)^k$.

Příklad 4.21: Nalezněte obraz diskrétní funkce $f_k = (-1)^{(k+2)}$.

Příklad 4.22: Určete \mathcal{Z} -obraz posloupnosti $\{f_k\} = k$.

Příklad 4.23: Vyřešte rekurentně a také pomocí \mathcal{Z} -transformace diferenční rovnici

$$y(k+1) - 2y(k) = u(k)$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Posloupnost $u(k)$ uvažujte jako diskrétní jednotkový skok $u(k) = 1(k)$.

Příklad 4.24: Vyřešte rekurentně a také pomocí \mathcal{Z} -transformace diferenční rovnici

$$y(k+1) = k - 2y(k)$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Určete ustálenou hodnotu řešení této diferenční rovnice.

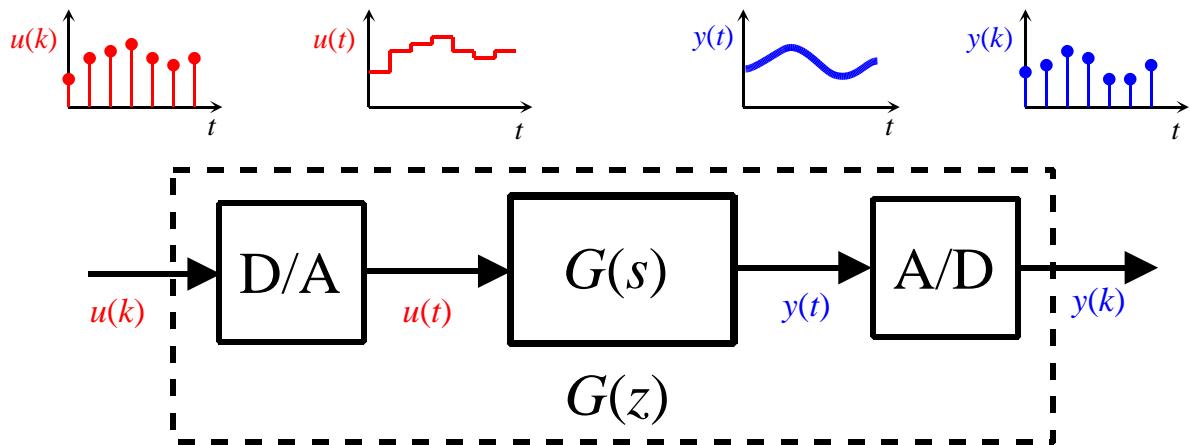
Řešení úloh z přílohy 4 \mathcal{Z} -transformace

4.14: $S = 40$, $S_{10} \doteq 26$; 4.15: $\frac{z^3 - a^2 z^2 + a^4 z}{z-a}$; 4.16: $\lim_{k \rightarrow 0} f_k = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = -\frac{1}{2}$; 4.17: $1(k) * 1(k) = 1+k$, $\mathcal{Z}\{1+k\} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$; 4.18: $\mathcal{Z}\{\delta(t)\} = 1$; 4.19: $\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$; 4.20: $\mathcal{Z}\{1 - (-3)^k\} = \frac{4z}{z^2 + 2z - 3}$; 4.21: $\mathcal{Z}\{(-1)^{(k+2)}\} = \frac{z}{z+1}$; 4.22: $\mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$; 4.23: $y(k) = 2^{k+1} - 1$; 4.24: $y(k) = \frac{1}{9} [10(-2)^k - 1 + 3k]$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ neexistuje;

Kapitola 5

Diskretizace

V praxi se ve většině případech řídí systémy, které jsou v čase spojité, pomocí regulátorů, které jsou v čase diskrétní (například počítače). Senzor měří spojitou veličinu $y(t)$ pouze v některých časových okamžicích. Spojitý výstup systému $y(t)$ se tak převádí na diskrétní posloupnost $y(k)$. Diskrétní posloupnost je zpracována v diskrétním regulátoru, který generuje posloupnost řídicí veličiny $u(k)$. Tato posloupnost $u(k)$ je převedena na spojitý signál $u(t)$, který je přiveden do systému viz obr. 5.1. Z tohoto důvodu je třeba najít převodní vztahy mezi popisem spojitého a diskrétního signálů. Dále je nutné vytvořit model, který by popisoval vztah mezi posloupností vstupní veličiny $u(k)$ a posloupností výstupní veličiny $y(k)$, tedy model diskrétního systému (FRANKLIN, G. et al., 2002).



Obrázek 5.1: Principiální schema diskretizace

Převod spojitého signálu na diskrétní signál se nazývá *vzorkování* signálu a provádí

se pomocí vzorkovacích členů, což jsou analogově-digitální (A/D) převodníky. Převod diskrétního signálu na spojitý signál se nazývá *tvarování* signálu a provádí se pomocí tvarovacích členů, což jsou digitálně-analogové (D/A) převodníky viz obr. 5.1.

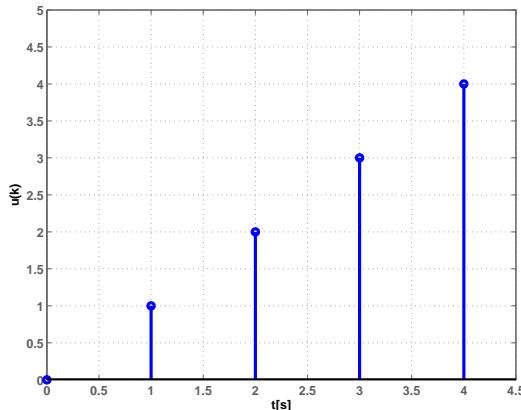
V této kapitole jsou vysvětleny základy diskretizace, vzorkování a tvarování signálů. Jsou zde uvedeny jednotlivé metody diskretizace, několik příkladů a neřešené úlohy.

5.1 Tvarování a vzorkování signálu

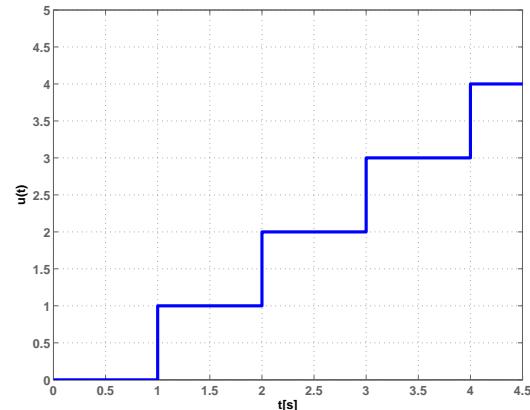
Jak jsme již uvedli, převod diskrétního signálu na spojitý signál se nazývá tvarování signálu a provádí se pomocí tvarovacích členů. Nejjednoduší tvarovací člen je *tvarovač nultého řádu*, který lze popsat přenosem

$$G_0(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_s}). \quad (5.1)$$

Tento tvarovač převádí vstupní posloupnost diskrétních hodnot na spojitý signál, který je po částech konstantní viz obr. 5.2(b).



(a) Diskrétní signál



(b) Tvarovaný signál

Obrázek 5.2: Tvarování diskrétního signálu tvarovačem nultého řádu

Poznámka: Existují tvarovače i vyšších řádů, například tvarovač prvního řádu s přenosem

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{sT_s} \right) (1 - e^{-sT_s})^2.$$

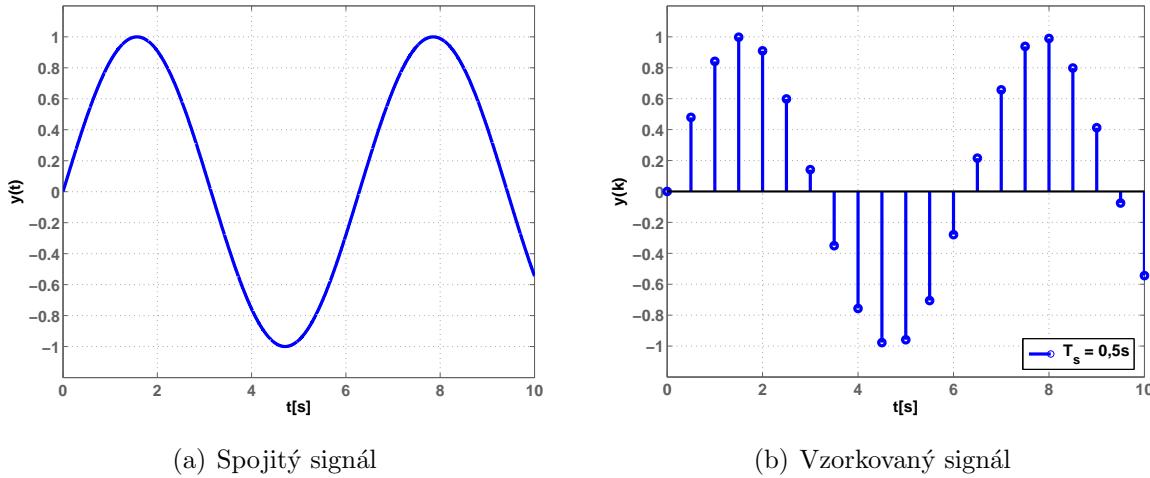
Zkuste si sami, jak tento tvarovač převede diskrétní posloupnost z obr. 5.2(a) na spojitý signál. \square

Převod spojitého signálu na diskrétní signál se nazývá vzorkování signálu a provádí se pomocí vzorkovacích členů. Při vzorkování spojitého signálu $y(t)$ v okamžicích $t = kT_s$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a T_s je *perioda vzorkování*, vzniká posloupnost čísel

$$\{y_k\} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

neboli diskrétních Diracových funkcí ve tvaru řady

$$\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(t) \delta(t - kT_s).$$



Obrázek 5.3: Vzorkování spojitého signálu

Nově vzniklá funkce $\{y_k\}$ nabývá v časech $t = kT_s$ hodnot původní funkce $y(t)$. V ostatních časech je funkční hodnota rovna nule, tudíž můžeme v předchozím vztahu nahradit $y(t)$ za $y(kT_s)$. Laplaceův obraz této řady pak je

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_s) e^{-ksT_s}.$$

Zavedením nové komplexní proměnné $z = e^{sT_s}$ získáme definiční vztah jednostranné \mathcal{Z} -transformace (viz definice 4.7)

$$\mathcal{Z}\{y(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_s) z^{-k},$$

která se ve velké míře používá pro popis diskrétních signálů a systémů.

5.2 Diskretizační metoda ZOH

Diskretizační metoda ZOH (zero-order hold) se někdy nazývá diskretizační metoda invariantní na skok. V této části si popíšeme odvození této metody na základě stavového i přenosového popisu. Pro převod spojitého stavového popisu na diskrétní uvažujme stavový popis lineárního spojitého časově neproměnného systému ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Přenos spojitého stavového modelu (5.2) lze za předpokladu nulových počátečních podmínek vyjádřit ve tvaru

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.\tag{5.3}$$

Řešení stavové rovnice (5.2) můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Z této rovnice vidíme, že stav $\mathbf{x}(t)$ je funkcií počáteční stavu $\mathbf{x}(t_0)$ a vstupního signálu $\mathbf{u}(\tau)$ na intervalu $\tau \in \langle t_0, t \rangle$. Výstup systému určíme pouhým dosazením tohoto řešení $\mathbf{x}(t)$ do výstupní rovnice.

Za předpokladu, že byl spojitý signál vytvořen tvarovačem nultého rádu popsaný rovnicí (5.1) ($u(t)$ je konstantní po celou dobu periody vzorkování T_s) je možné zapsat řešení stavového modelu (5.2) pro jednu periodu vzorkování jako

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+T_s) &= e^{\mathbf{A}T_s}\mathbf{x}(t) + e^{\mathbf{A}T_s} \int_0^{T_s} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

Zavedením diskrétního času k , pro který platí $t = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$, získáme stavové rovnice diskrétního systému ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),\end{aligned}\tag{5.4}$$

kde pro matice diskrétního systému platí

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}T_s}, \quad \mathbf{N} = e^{\mathbf{A}T_s} \int_0^{T_s} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}.\tag{5.5}$$

Matice \mathbf{C} a \mathbf{D} zůstávají stejné.

Poznámka: Z maticového počtu víme, že můžeme maticovou exponencielu rozepsat do řady

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{A}T_s} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i T_s^i}{i!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T_s + \frac{\mathbf{A}^2 T_s^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 T_s^3}{3!} + \dots$$

Použijeme-li tuto řadu pro výpočet matice \mathbf{N} , můžeme integrováním jednotlivých prvků dospět ke vztahu

$$\mathbf{N} = e^{\mathbf{A}T_s} \int_0^{T_s} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B} = \left(\mathbf{I}T_s + \frac{\mathbf{A}T_s^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2 T_s^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{B}.$$

Pokuste se sami tento vztah odvodit. \square

Druhý způsob diskretizace spočívá v přímém převodu mezi spojitým přenosem (5.3) a diskrétním přenosem, který lze za předpokladu nulových počátečních podmínek vyjádřit z (5.4) ve tvaru

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{N} + \mathbf{D}. \quad (5.6)$$

Tvarujeme-li diskrétní signál $u(k)$ tvarovačem nultého řádu s přenosem (5.1) platí

$$G_0(s)G(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_s}) G(s).$$

Použitím vztahu pro metodu ZOH mezi komplexními proměnnými z a s

$$z = e^{sT_s} \quad (5.7)$$

získáme vztah pro převod mezi spojitým přenosem $G(s)$ a diskrétním přenosem $G(z)$

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G_0(s)G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}. \quad (5.8)$$

5.3 Metody přibližné diskretizace

Pokud nejsou velké nároky na přesnost diskretizace, je možné použít přibližné diskretilizační metody, které mají menší výpočetní náročnost. Jejich přesnost závisí na vlastnostech systému a velikosti periody vzorkování.

Eulerova metoda

Tato metoda využívá vztahu, ve kterém je derivace stavové proměnné nahrazena diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t + T_s) - \mathbf{x}(t)}{T_s} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (5.9)$$

Pro matice \mathbf{M} a \mathbf{N} pak platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T_s, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}T_s. \quad (5.10)$$

Aproximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s pro Eulerovu metodu je

$$s \approx \frac{z - 1}{T_s}. \quad (5.11)$$

Metoda zpětné diference

Zde se využívá vztahu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t + T_s) - \mathbf{x}(t)}{T_s} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t + T_s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t + T_s). \quad (5.12)$$

Aproximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s je

$$s \approx \frac{z - 1}{z T_s}. \quad (5.13)$$

Tustinova metoda

Tato metoda se také nazývá bilineární approximace a používá lichoběžníkovou approximaci na rozdíl od Eulerovy metody, která používá approximaci obdélníkovou. Vychází ze vztahu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}(t + T_s) - \mathbf{x}(t)}{T_s} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{A}(\mathbf{x}(t + T_s) + \mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(t + T_s) + \mathbf{u}(t)) \right]. \quad (5.14)$$

Aproximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s je

$$s \approx \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (5.15)$$

Metoda MPZ

Tato metoda využívá vztahu mezi póly a nulami spojitého a vzorkovaného systému, který lze odvodit například z impulzní charakteristiky systému, která je dána vztahem

$$g(t) = e^{-at}, \quad t > 0.$$

Laplaceův obraz této funkce je

$$G(s) = \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a},$$

což je přenos systému, jehož pól je $s = -a$.

Pro vzorkovaný signál s periodou vzorkování T_s platí

$$g(kT_s) = e^{-akT_s}.$$

\mathcal{Z} -obraz této funkce je

$$G(z) = \mathcal{Z}\{e^{-akT_s}\} = \frac{z}{z - e^{-aT_s}},$$

což je přenos systému, jehož pól je $z = e^{-aT_s}$.

Protože póly přenosu vyjádřeného v Laplaceově transformaci a v \mathcal{Z} -transformaci jsou stejné, získáváme vztahy

$$z = e^{sT_s}, \quad s = \frac{\ln(z)}{T_s}. \quad (5.16)$$

5.4 Příklady

Příklad 5.1: Pomocí Tustinovy metody diskretizujte spojitý signál $y(t) = e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$ se vzorkovací periodou T_s .

Řešení: Laplaceův obraz signálu $y(t)$ je

$$Y(s) = \frac{1}{s+a}.$$

Z toho vypočteme podle (5.15) \mathcal{Z} -obraz signálu $y(t)$ jako

$$Y(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{1}{\frac{2(z-1)+aT_s(z+1)}{T_s(z+1)}} = \frac{T_s(z+1)}{2(z-1) + aT_s(z+1)}.$$

Vyčíslete si sami přenos pro hodnoty $T_s = 1$ s, $a = 1$ a zpětnou \mathcal{Z} -transformací vypočtěte diskretizovaný signál $y(k)$ a porovnejte ho se spojitým signálem $y(t)$. ✓

Příklad 5.2: Je zadán přenos systému v Laplaceově transformaci

$$G(s) = \frac{4}{s+1}.$$

Nalezněte odpovídající diskrétní přenos $G(z)$ pomocí metody ZOH a pomocí Tustinovy metody. Vzorkovací periodu volte $T_s = 0,5$ s. Porovnejte přechodové charakteristiky výsledných diskrétních přenosů se spojitým přenosem $G(s)$.

Řešení: Pro diskretizaci využijeme vztah (5.8). Vypočteme nejprve

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} - \frac{4}{s+1} \right\} = 4(1 - e^{-t}) 1(t).$$

\mathcal{Z} -obraz této funkce vypočteme obecně jako

$$\mathcal{Z} \{ 4(1 - e^{-at}) \} = 4 \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT_s}} \right) = \frac{4z(z - e^{-aT_s} - z + 1)}{(z-1)(z - e^{-aT_s})} = \frac{4z(1 - e^{-aT_s})}{(z-1)(z - e^{-aT_s})}.$$

Nyní můžeme přejít k výpočtu diskrétního přenosu

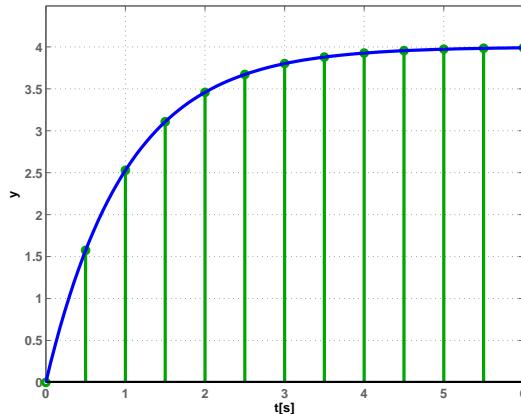
$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{4z(1 - e^{-aT_s})}{(z-1)(z - e^{-aT_s})} = 4 \frac{1 - e^{-aT_s}}{z - e^{-aT_s}}.$$

Dosazením hodnot $a = 1$ a $T_s = 0,5$ s ze zadání získáme výsledek

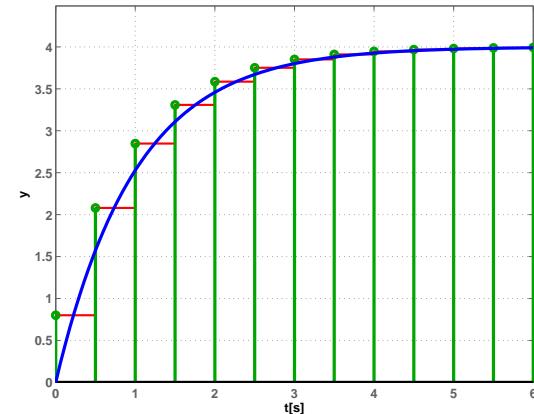
$$G(z) = 4 \frac{1 - e^{-0,5}}{z - e^{-0,5}} \doteq \frac{1,574}{z - 0,607}.$$

Přenos $G(z)$ pomocí Tustinovy metody získáme stejným postupem jako v příkladě 5.1 a dostaneme

$$G(z) = \frac{4}{4 \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{4z+4}{5z-3}.$$



(a) Metoda ZOH



(b) Tustinova metoda

Obrázek 5.4: Přechodové charakteristiky spojitého systému a diskretizovaných systémů

Všimněte si, že narozdíl od metody ZOH, která approximuje spojitý průběh přesně v okamžicích vzorkování, approximuje Tustinova metoda spojitý signál přesně v polovině intervalu vzorkování. ✓

Příklad 5.3: Uvažujte spojitý systém popsaný rovnicemi (5.2), kde stavové matice jsou

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Určete stavové matice diskrétního systému (5.4), který vznikne diskretizací zadaného spojitého systému metodou ZOH při periodě vzorkování $T_s = 0,5$ s. Určete přenos spojitého i diskrétního systému a vykreslete přechodové charakteristiky obou systémů.

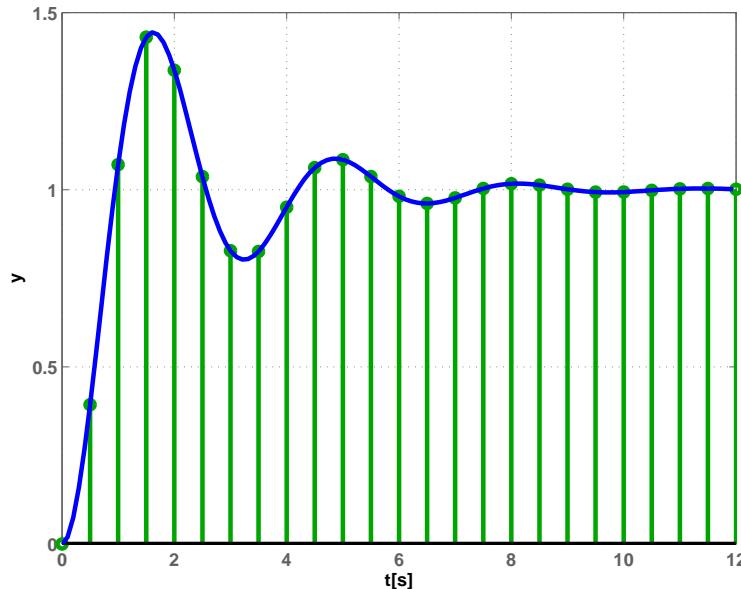
Řešení: Pomocí vztahů (5.5) vyjádřených pomocí řad vypočteme matice

$$\mathbf{M} \doteq \begin{bmatrix} 0,2757 & 0,6627 \\ 0,6627 & 0,6071 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} \doteq \begin{bmatrix} 0,6627 \\ 0,3929 \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{C} a \mathbf{D} zůstávají stejné. Pomocí vztahů (5.3) a (5.6) určíme přenosy

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 4}, \quad G(z) \doteq \frac{0,393z + 0,331}{z^2 - 0,883 + 0,607}$$

a přechodové charakteristiky obou systémů vykreslíme do obr. 5.5.



Obrázek 5.5: Přechodové charakteristiky spojitého a diskrétního systému

Určete sami diskrétní přenos $G(z)$ také pomocí vztahu (5.8) a porovnejte ho s předchozím řešením. ✓

Příklad 5.4: Pomocí metody MPZ diskretizujte spojitý přenos

$$G(s) = k_c \frac{s+b}{s+a}$$

se vzorkovací periodou T_s .

Řešení: Pro póly respektive nuly přenosu $G(s)$ platí $s_p = -a$, $s_z = -b$. Aplikováním vztahu (5.16) dostaneme kořeny $z_p = e^{-aT_s}$, $z_z = e^{-bT_s}$ a můžeme psát diskrétní přenos ve tvaru

$$G(z) = k_d \frac{z - e^{-bT_s}}{z - e^{-aT_s}}.$$

Vztah mezi konstantami k_c a k_d určíme ze vztahu

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = k_c \frac{b}{a} = \lim_{z \rightarrow 1+} G(z) = k_d \frac{1 - e^{-bT_s}}{1 - e^{-aT_s}}.$$

Odtud platí

$$k_d = k_c \frac{b(1 - e^{-aT_s})}{a(1 - e^{-bT_s})}$$

a výsledný diskretizovaný přenos má tedy tvar

$$G(z) = k_c \frac{b(1 - e^{-aT_s})(z - e^{-bT_s})}{a(1 - e^{-bT_s})(z - e^{-aT_s})}.$$

Vyčíslete přenos pro hodnoty $T_s = 0,1\text{ s}$, $a = 1$, $b = 2$ a porovnejte sami přechodové charakteristiky spojitého a diskretizovaného systému. ✓

Příklad 5.5: Odvoďte vztahy pro matice \mathbf{M} a \mathbf{N} a approximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s pro Eulerovu metodu přibližné diskretizace.

Řešení: Rovnici

$$\frac{\mathbf{x}(t + T_s) - \mathbf{x}(t)}{T_s} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

upravíme na tvar

$$\mathbf{x}(t + T_s) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}T_s)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}T_s\mathbf{u}(t),$$

odkud je vidět, že platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T_s, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}T_s.$$

Dosazením matic \mathbf{M} a \mathbf{N} do (5.6) vypočteme diskrétní přenos

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{C} \left[z\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{A}T_s) \right]^{-1} \mathbf{B}T_s + \mathbf{D} = \mathbf{C} \left[(z-1)\mathbf{I} - \mathbf{A}T_s \right]^{-1} \mathbf{B}T_s + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C} \left[T_s \left(\frac{z-1}{T_s} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right) \right]^{-1} \mathbf{B}T_s + \mathbf{D} = \mathbf{C} \left(\frac{z-1}{T_s} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Porovnáním přenosu $G(z)$ se spojitým přenosem (5.3) získáme hledaný vztah mezi komplexními proměnnými z a s pro Eulerovu metodu přibližné diskretizace

$$s \approx \frac{z - 1}{T_s}. \quad \checkmark$$

5.5 Úlohy

Příklad 5.6: Pomocí Tustinovy metody diskretizujte spojitý signál $y(t) = 2e^{3t}$ se vzorkovací periodou $T_s = 2$ s.

Příklad 5.7: Je zadán přenos systému v Laplaceově transformaci

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2,5s + 1}.$$

Nalezněte approximaci přenosu $G(s)$ pomocí Tustinovy metody. Vzorkovací periodu volte $T_s = 1$ s.

Příklad 5.8: Ke spojitému přenosu

$$G(s) = \frac{1}{s + 2}$$

nalezněte pomocí metody ZOH diskrétní přenos převodem ze spojitého přenosu $G(s)$ a také převodem ze stavového popisu vyjádřeného stavovými maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . Použijte periodu vzorkování $T_s = 1$ s. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na obdélníkový a sinusový signál.

Příklad 5.9: Je zadán spojitý systém popsáný stavovými maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Určete matice \mathbf{M} , \mathbf{N} pro diskrétní systém, který vznikne diskretizací zadанého spojitého systému metodou ZOH s periodou vzorkování $T_s = 1$ s. Určete přenos spojitého i diskrétního systému. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na obdélníkový a sinusový signál.

Příklad 5.10: Je zadán přenos systému

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 4s + 2}.$$

Nalezněte diskrétní approximaci přenosu $G(s)$ pomocí Eulerovy metody metody. Vzorkovací periodu volte $T_s = 0,1$ s. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na nějaké vstupní signály.

Příklad 5.11: Je zadán spojitý systém popsáný maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1,5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocí Eulerovy metody určete přenos diskrétního systému, který vznikne vzorkováním zadaného spojitého systému s periodou $T_s = 0,2$ s. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na nějaké vstupní signály.

Příklad 5.12: Pomocí metody zpětné diference diskretizujte spojitý systém s přenosem

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 2}.$$

Použijte periodu vzorkování $T_{s1} = 1$ s a $T_{s2} = 0,2$ s. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaných systémů na nějaké vstupní signály. Rozhodněte, která perioda vzorkování je vhodnější.

Příklad 5.13: Je zadán spojitý systém popsáný stavovými maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocí metody zpětné diference určete přenos diskrétního systému, který vznikne vzorkováním zadaného spojitého systému s periodou $T_s = 0,5$ s. Rozhodněte, zda je zadaná vzorkovací perioda vhodná a případně vypočtěte diskrétní přenos pro vámi zvolenou vzorkovací periodu. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na nějaké vstupní signály.

Příklad 5.14: Pomocí metody MPZ diskretizujte spojitý systém s přenosem

$$G(s) = \frac{5s + 5}{s + 2}.$$

Použijte periodu vzorkování $T_s = 0,1$ s. Porovnejte odezvy spojitého a diskretizovaného systému na nějaké vstupní signály.

Příklad 5.15: Pomocí metody MPZ určete \mathcal{Z} -obraz signálu, který vznikne diskretizací spojitého signálu

$$y(t) = 6\delta(t) - 3e^{-t}$$

se vzorkovací periodou $T_s = 0,2$ s. Porovnejte tyto signály.

Příklad 5.16: Metodou ZOH určete \mathcal{Z} -obraz signálu, který vznikne diskretizací spojitého signálu

$$y(t) = t e^{-3t}$$

se vzorkovací periodou $T_s = 0,5$ s. Porovnejte tyto signály.

Příklad 5.17: Metodou ZOH určete \mathcal{Z} -obraz signálu, který vznikne diskretizací spojitého signálu

$$y(t) = \sin(t) + 2$$

se vzorkovací periodou $T_s = 0,1$ s. Porovnejte tyto signály.

Příklad 5.18: Odvodte vztah pro matice \mathbf{M} a \mathbf{N} a approximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s pro diskretizaci metodou ZOH.

Příklad 5.19: Odvodte approximační vztah mezi komplexními proměnnými z a s pro diskretizaci metodou zpětné diference.

Příklad 5.20: Odvodte approximační mezi komplexními proměnnými z a s pro diskretizaci Tustinovou metodu.

Řešení úloh z přílohy 5 Diskretizace

$$\begin{aligned} 5.6: Y(z) &= \frac{z+1}{-z-2}; & 5.7: G(z) &= \frac{0,2z^2+0,4z+0,2}{z^2-0,6z}; & 5.8: G(z) &\doteq \frac{0,4323}{z-0,1353}; & 5.9: \mathbf{M} &\doteq \\ &\left[\begin{smallmatrix} 0 & -0,3679 \\ 0,3679 & 0,7358 \end{smallmatrix} \right], \mathbf{N} \doteq \left[\begin{smallmatrix} 0,3679 \\ 0,2642 \end{smallmatrix} \right], G(s) &= \frac{3}{s^2+2s+1}, G(z) \doteq \frac{0,793z+0,406}{z^2-0,736z+0,135}; & 5.10: G(z) &= \\ &\frac{0,05}{z^2-1,6z+0,62}; & 5.11: G(z) &= \frac{0,2z}{z^2-1,2z+0,32}; & 5.12: G_1(z) &= \frac{10z^2}{6z^2-5z+1}, G_{0,2}(z) &= \frac{0,4z^2}{1,68z^2-2,6z+1}; \\ 5.13: G(z) &= \frac{z^2-0,5z}{7z^2-5,5z+1}; & 5.14: G(z) &\doteq 4,762 \frac{z-0,905}{z-0,819}; & 5.15: Y(z) &\doteq 5,715 \frac{z-0,905}{z-0,819}; \\ 5.16: Y(z) &\doteq \frac{0,049z+0,018}{z^2-0,45z+0,05}; & 5.17: Y(z) &= \frac{0,21z^2-0,4z+0,2}{z^3-3z^2+3z-1}; & 5.18: \text{viz rovnice (5.5) a (5.7)}; \\ 5.19: \text{viz rovnice (5.13)}; & 5.20: \text{viz rovnice (5.15)}; \end{aligned}$$

Kapitola 6

Závěr

V kapitole Identifikace systému DR300-AMIRA byl vytvořen matematický popis tohoto systému. Změřením statických převodních charakteristik systému byla určena lineární oblast převodu vstupního napětí na výstupní otáčky servomechanizmu v rozsahu $u \in (-0,3; -0,12) \cup (0,12; 0,3)$, pásmo necitlivosti pro $|u| < 0,12$ a pásmo saturace pro $|u| > 0,3$ (udáváno ve strojových jednotkách). Z toho byla vybrána pracovní oblast pro rozsah vstupního napětí $u = 0,21$ až $0,25$, ve které byla provedena identifikace systému z přechodové charakteristiky otáček, jejímž výsledkem bylo nalezení modelu s přenosem (2.4), který tento systém dobře approximuje, což je patrné z obr. 2.4. Dále byly proměněny frekvenční charakteristiky systému, které vyjadřují závislost zesílení a fázového posuvu výstupního signálu na frekvenci vstupního harmonického signálu. Porovnáním změřených charakteristik s frekvenčními charakteristikami modelu (viz obr. 2.6, obr. 2.7) byla potvrzena správnost modelu.

Výsledky identifikace byly použity v kapitole Regulace systému DR300-AMIRA, kde byly pomocí přenosu zjištěného modelu (2.4) navrženy PID regulátory, pomocí kterých bylo provedeno řízení systému v pracovním bodě, který ležel v lineární oblasti určené identifikací. Pro návrhy regulátorů byly použity frekvenční metody, kde ve výsledné regulaci byl překmit 6 %, doba ustálení shruba 0,8 s a nulová ustálená odchylka, a metody geometrických míst kořenů (GMK), kdy výsledná regulace měla překmit 10 %, dobu ustálení přibližně 1 s a opět nulovou ustálenou odchylku. PID regulátor navržený frekvenční metodou byl kvalitnější z hlediska překmitu a doby ustálení, ale měl výrazně větší špičku akčního zásahu při skokové změně vstupního signálu. Vylepšení těchto regulátorů by bylo možné provést empirickými metodami, kdy by se určitým způsobem upravovaly jednotlivé konstanty regulátorů. Dalším zlepšením by mohlo být odstranění šumu výstupního signálu regulované soustavy, což by bylo možné provést přidáním vhodného filtru do

regulační soustavy.

Poznamenejme, že výsledky regulace otáček servomechanizmu DR300-AMIRA (viz obr. 3.4, obr. 3.7) potvrdily správnost výsledků identifikace provedené v kapitole 2.

Literatura

FENCLOVÁ, M., PECH, Z. a SUKOVÁ, M (1993), *Teorie automatického řízení – návody ke cvičením*, Praha: Vydavatelství ČVUT.

FRANKLIN, G., POWELL, D. a EMAMI-NAEINI, A. (2002), *Feedback control of dynamic systems*, New Jersey: Prentice Hall.

FUKA, J., JOHN, J. a KUTIL, M. (<http://dce.felk.cvut.cz/sari/>), *Učebnice SAM / SRI* [online]. Poslední revize 2005-03-01 [cit. 2005-05-31].

JOHN, J. (2003), *Systémy a řízení*, Praha: Vydavatelství ČVUT.

VÍCH, R. (1983), *Transformace \mathcal{Z} a některá její použití*, Praha: SNTL.