

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDICÍ TECHNIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řízení laboratorního modelu spojené
pohony



Praha, 2011

Autor: Petr Jonáš

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze, dne 3.1. 2011

Petr Jaroš
podpis

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Petr Jonáš**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Řízení laboratorního modelu spojené pohony**

Pokyny pro vypracování:


1. Seznamte se s modelem spojené pohony TQ (CD1) nacházející se v laboratoři teorie automatického řízení.
2. Odvoďte matematický model tohoto systému.
3. Proveďte identifikaci laboratorního modelu.
4. Pro tento model navrhňte a realizujte základní typ regulace - PID regulátor a LQ regulátor.
5. Pro tento model navrhňte a realizujte pokročilé metody řízení - LQG regulátor a metody robustního řízení.

Seznam odborné literatury:


- [1] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
- [2] S. Skogestad, I. Postlethwaite: Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. Second ed., J.Wiley & Sons, 2005

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2010/2011


prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry




doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 2. 12. 2009

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval Ing. Petru Huškovi, Ph.D. za vedení této diplomové práce a především za přínosné rady a konzultace. Dále pak děkuji i ostatním cvičícím z katedry řídicí techniky, kteří se mně vždy při práci v laboratoři teorie automatického řízení K26 velmi ochotně věnovali, a také své manželce a bratrovi za pečlivou korekturu a podporu při tvorbě této práce.

Anotace

Tato práce se zabývá analýzou, identifikací a řízením laboratorního modelu CE108 se spojenými pohony, který se nachází v laboratoři teorie automatického řízení K26. Cíl této diplomové práce spočívá v řízení dvou elektrických motorů, které jsou spojeny dohromady v rámci jednoho systému. To zavede čtenáře ke studiu interagujícího dynamického systému a řízení systému s více vstupy a výstupy. Základním úkolem je pomocí měničů se točivého momentu motorů řídit napnutí a rychlost pásu. Ukázky řízení jsou prováděny pomocí simulačních modelů reálného systému. Základní řízení laboratorního systému je realizováno pomocí PI regulátoru, LQ a LQG regulátorů. Pro závěrečné řízení celého MIMO systému je využito decentralizované zpětnovazební řízení, LQ regulátor a dynamický rozvazbovací regulátor.

Annotation

This thesis deals with the analysis, identification and control of the laboratory model CE108 with coupled drives which is situated in the Laboratory of Automatic Control Theory K26. The goal of this diploma work consist in controlling two electric drives that are coupled together through the system. It will introduce readers to interacting dynamical system and multivariable control. The basic control problem is to vary the torque in the motors to regulate the belt speed and tension. The control demonstrations are performed using models of real system. The basic control of the laboratory system is implemented by PI controllers, LQ and LQG controllers. For the final control of the whole MIMO system is used decentralized feedback control, LQ controller and decoupling controller.

Obsah

1 Úvod	2
1.1 Rozbor cílů této diplomové práce	3
2 Seznámení s laboratorním modelem	5
2.1 Popis laboratorního modelu spojených pohonů	5
2.2 Náhled na model z hlediska teorie systémů	7
2.3 Připojení modelu CE108 k PC	8
3 Odvození matematického modelu	10
3.1 Matematický popis stejnosměrného motoru	10
3.2 Matematický popis pružného pásu	11
3.3 Matematický popis kyvného ramene a chování pružiny	14
3.4 Dokončení modelu MIMO systému	15
4 Identifikace laboratorního modelu spojených pohonů CE108	18
4.1 Převod jednotek z PC do fyzikálních jednotek SI	18
4.1.1 Převody jednotek vstupních veličin	18
4.1.2 Statické převodní charakteristiky samotných motorů M1 a M2 . . .	19
4.1.3 Převody jednotek pro úhlovou rychlost horní kladky	21
4.1.4 Převody jednotek pro úhel vychýlení ramene	23
4.2 Identifikace částí laboratorního modelu	24
4.2.1 Identifikace parametrů stejnosměrných motorů	24
4.2.2 Identifikace parametrů kyvného ramene s pružinou	27
4.2.3 Identifikace parametrů gumového pásu	30
4.3 Kompletace identifikovaného modelu	31
5 Regulace jednotlivých výstupů MIMO systému	40
5.1 Návrh PI regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni	42
5.2 Návrh PI regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene	47
5.3 Návrh LQ regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni	52
5.4 Návrh LQG regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni	57
5.5 Návrh LQG regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene	65

5.6	Úprava LQG regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni s odhadem poruchového zatěžovacího momentu	67
6	Regulace MIMO systému jako celku	71
6.1	Návrh vícesmyčkového PI regulátoru	76
6.2	Návrh LQ regulátoru pro celý MIMO systém	78
6.3	Návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru	82
7	Závěr	87
A	Simulinková schémata	92
B	Obsah přiloženého CD	109

Seznam použitých zkratk

V této práci je použito několik zkratk (původem z angličtiny) především z oblasti řídicí techniky:

SISO system

Single-Input-Single-Output system \Rightarrow systém s 1 vstupem a 1 výstupem

MIMO system

Multiple-Input-Multiple-Output system \Rightarrow systém s více vstupy a více výstupy

PI controller

Proportional-Integral controller \Rightarrow proporcionální a integrační regulátor

LQ controller

Linear-Quadratic controller \Rightarrow kvadraticky optimální regulátor pro lineární systémy

LQG controller

Linear-Quadratic-Gaussian controller \Rightarrow kvadraticky optimální regulátor pro lineární systémy s bílým gaussovským šumem

RGA

Relative gain array \Rightarrow matice relativních zesílení

Kapitola 1

Úvod

Laboratorní model Spojené pohony TQ (Coupled Drives) umístěný v laboratoři teorie automatického řízení K26 [8] je fyzikální systém vyrobený firmou TecQuipment Ltd [5]¹. Jedná se o MIMO systém, který je velmi dobrým příkladem systému s více vstupy a výstupy. Fotografie tohoto systému je na následujícím obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Laboratorní model spojených pohonů CE108

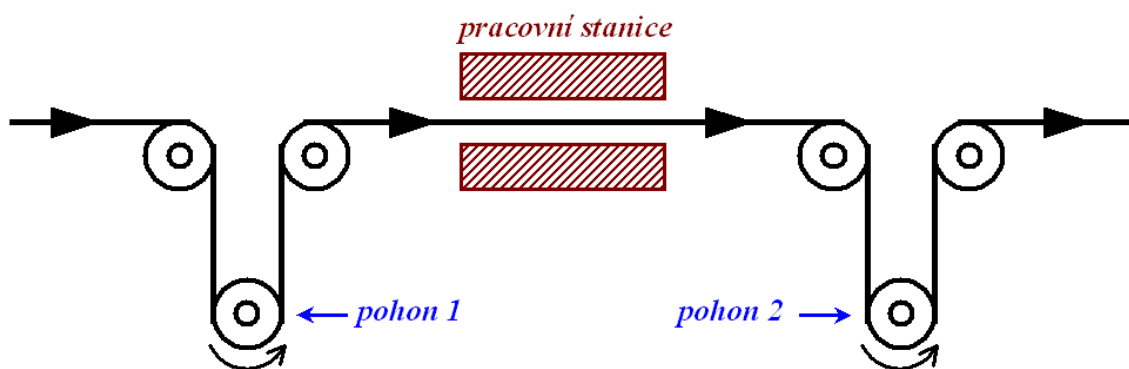
Na tomto místě je nutné poznamenat, že se nejedná o systém, který by byl vyvinut pouze pro školní a teoretické účely. Jeho velkou výhodou je skutečná a konkrétní vazba na reálné aplikace v průmyslu. V tomto případě může být model chápán např. jako určitá část papírenského, textilního nebo válcovacího stroje, kde hlavními otázkami, které je zapotřebí řešit, jsou pružnost a rychlost pásu, příp. problémy spojené s řízením více nestejných pohonů v jednom systému. Tyto aspekty spojené s řízením takovýchto systémů jsou tedy

¹Se sídlem v Nottinghamu ve Velké Británii

jistě velmi podstatné a důležité pro správný chod nejrozumnějších výrobních linek, a proto je velmi dobré se jimi zabývat.

To bude i cílem této diplomové práce, jakožto ukázka toho, jak takovýto složitý systém s více vstupy a výstupy efektivně řídit. Svojí roli zde jistě tedy bude hrát i studium interakcí mezi jednotlivými vstupy a výstupy systému a následný správný návrh zvoleného řízení. Správná spolupráce více servomotorů, které jsou spojeny v rámci jedné aplikace, je potom nesmírně důležitá. V extrémních případech by totiž mohlo dojít buď k povolení nebo přetržení pásu, poškození nějaké komponenty, či vyráběného produktu nebo nestabilitě celého systému. Nejrozumnější další důsledky nesprávného nastavení systému se spojenými pohony jsou více rozepsány v [3].

Na následujícím obrázku 1.2 je schematicky načrtnuta výrobní linka využívající právě spojených pohonů.



Obrázek 1.2: Náčrt výrobní linky se spojenými pohony

Pracovní stanice tady má funkci jakéhosi kontrolního členu, jehož úkolem je sledovat a řídit rychlost a napětí pásu výrobní linky (za účasti pohonu 1 a 2).

1.1 Rozbor cílů této diplomové práce

Jedním z počátečních cílů této práce bude detailní seznámení čtenáře s modelem spojených pohonů a některými jeho vlastnostmi, které bude třeba brát v úvahu při návrhu jeho řízení. Velkým přínosem této práce určitě bude možnost studia a návrh řízení pro MIMO systém jakožto celek.

Jednotlivé úkoly, které budou realizovány v rámci této práce, by se tedy daly shrnout do těchto několika dílčích kroků:

- odvození a sestavení matematicko fyzikálního popisu modelu
- identifikace laboratorního modelu
- návrh základního typu řízení (PID a LQ regulátor) pouze pro samostatné vstupy a výstupy - tj. návrh pro jednotlivé "SISO" systémy

- návrh pokročilé metody řízení (LQG regulátor) pouze pro samostatné vstupy a výstupy - tj. návrh pro jednotlivé "SISO" systémy
- návrh decentralizovaného řízení celého MIMO systému
- návrh centralizovaného řízení celého MIMO systému
- návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru pro celý MIMO systém
- zhodnocení výsledků a použitých metod

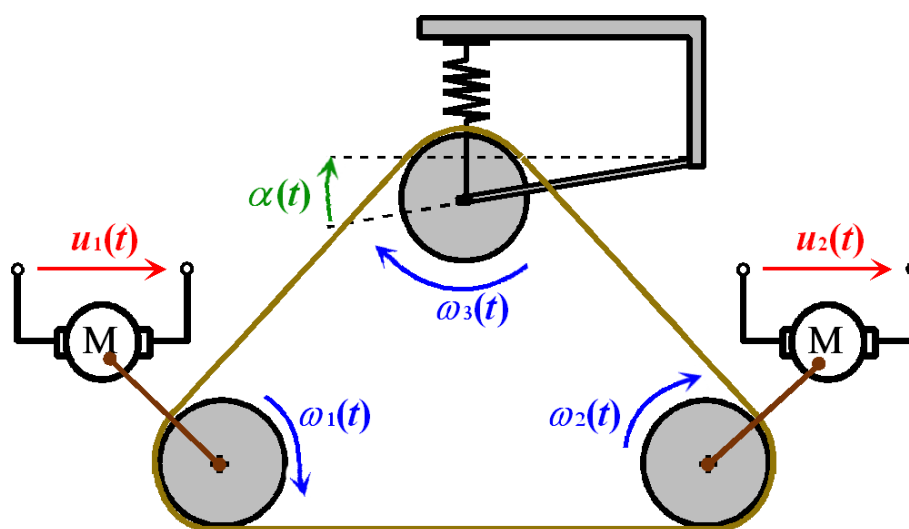
Práce tedy bude mít následující strukturu. Ve druhé kapitole se seznámíme se strukturou a jednotlivými částmi modelu. V kapitole třetí pak bude následovat odvození matematicko fyzikálního modelu celého systému. Ve čtvrté kapitole popíšeme postup identifikace laboratorního modelu. Od páté kapitoly až do zbytku práce se již budu věnovat návrhu řízení, přičemž v úvodu každé takové kapitoly (příp. podkapitoly) bude vždy naznačen teoretický úvod a teprve potom bude následovat praktická aplikace na laboratorním modelu. Náplní páté kapitoly bude návrh řízení pro jednotlivé dílčí podsystémy laboratorního modelu a ve stěžejní šesté kapitole bude potom rozebráno několik možných typů řízení pro celý MIMO systém. V závěru potom jednotlivé přístupy vyhodnotím.

Kapitola 2

Seznámení s laboratorním modelem

2.1 Popis laboratorního modelu spojených pohonů

Náčrtek systému spojených pohonů TQ (CD1) je na obrázku 2.1 (obrázek upraven z [8]).

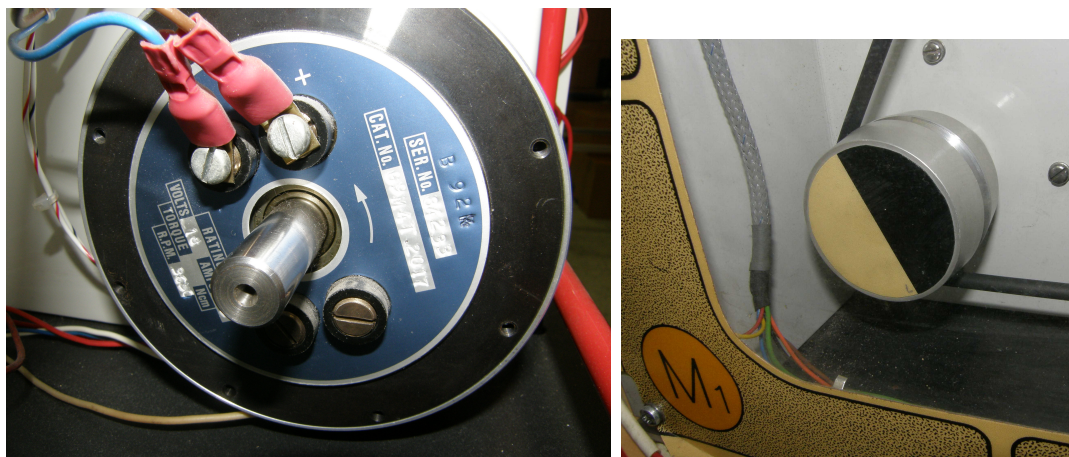


Obrázek 2.1: Náčrtek modelu Spojené pohony TQ

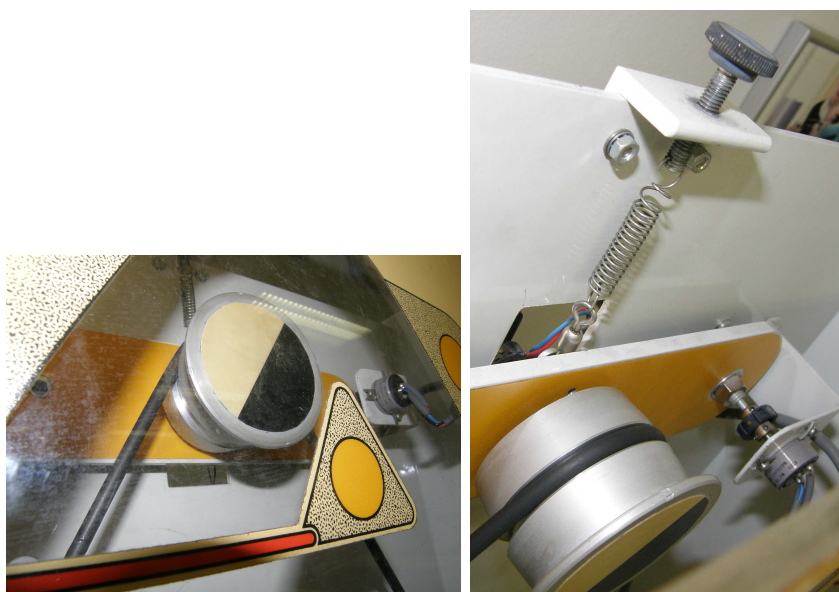
Základem modelu spojených pohonů jsou dva stejnosměrné elektromotory - levý motor M1 a parametrově naprosto shodný pravý motor M2, které pohánějí pružný pás v podobě gumy. Jejich směr otáčení je možné řídit nezávisle v obou směrech danými vstupními napětími. Skutečné otáčky těchto motorů jsou měřeny pomocí tachogenerátorů. Na obr. 2.2 je zachycen pohled zezadu na jeden z motorů a zepředu na hnací válec.

Model dále obsahuje rameno se třetí kladkou, přes kterou také prochází pás (obr. 2.3a). Toto rameno je zavěšeno na pružině (obr. 2.3b) a vypíná gumový pás soustavy spojených pohonů. Díky pohyblivému rameni je možné indikovat a měřit protažení pásu jakožto odchylku polohy ramene od své nulové polohy a tím tak určitým způsobem si-

mulovat pracovní stanici z obrázku 1.2. Na obrázku 2.3b je patrný i ladicí šroub, pomocí něhož je možné ovlivňovat vlastnosti pružiny jako je tuhost a tlumení. To bude mít velký význam při identifikaci laboratorního modelu (viz kapitola 4.2.2). U třetí kladky je potenciometrem snímán úhel vychýlení ramene a úhlová rychlost kladky, která je měřena rovněž tachogenerátorem.



Obrázek 2.2: Pohled na jeden z hnacích motorů ze zadní části a zepředu



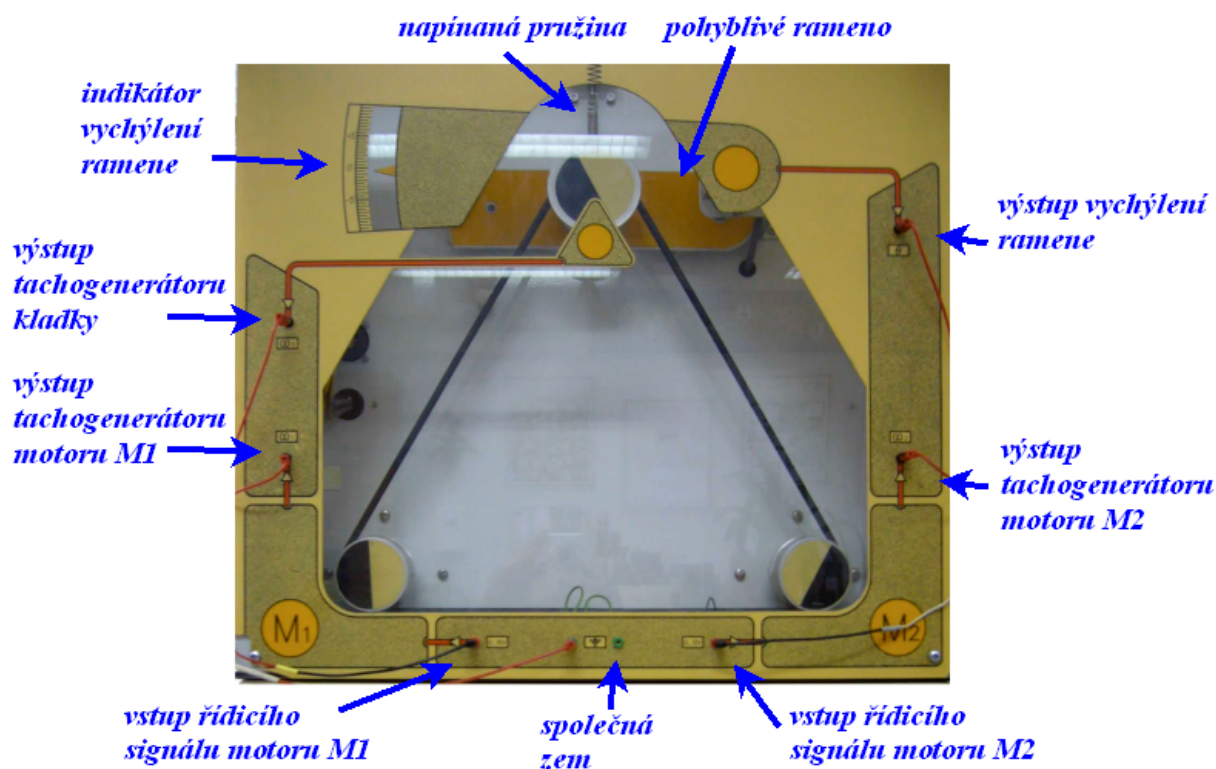
Obrázek 2.3: a) Horní kladka, b) Pružina s ladicím šroubem

Další důležité parametry týkající se laboratorního modelu CE108 jsou shrnuty v následující tabulce 2.1. Více parametrů viz stránky výrobce [5].

Rozměry modelu	540 mm × 330 mm × 625 mm
Celková hmotnost modelu	26.4 kg
Napájecí napětí	230 V
Otáčky hnacích motorů M1 a M2	0 až 3000 ot./min

Tabulka 2.1: Vybrané parametry modelu CE108

Na obrázku 2.4 můžeme vidět přední panel modelu CE108 a rozmístění a zapojení jeho jednotlivých částí. Veškeré připojení jeho vstupů a výstupů je realizováno pomocí kablíků a 2mm zdírek.



Obrázek 2.4: Přední panel modelu CE108

2.2 Náhled na model z hlediska teorie systémů

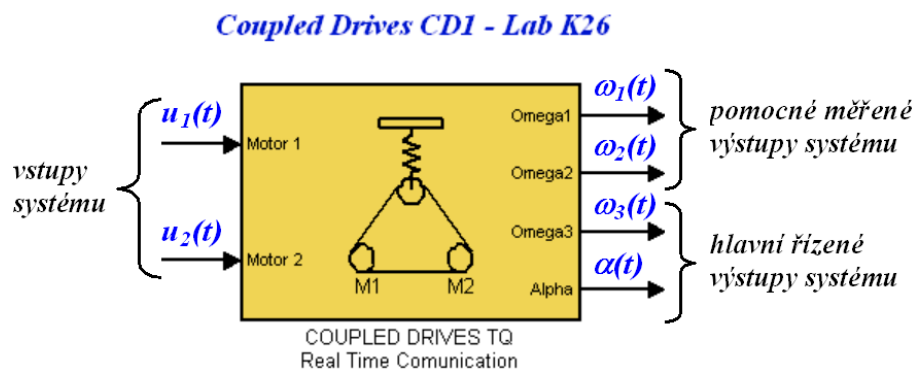
Z hlediska teorie systémů se tedy jedná o systém se **2 vstupy**:

- vstupní napětí levého motoru $u_1(t)$ [V] (akční veličina),
- vstupní napětí pravého motoru $u_2(t)$ [V] (akční veličina nebo poruchová veličina \Rightarrow poruchový zatěžovací moment $m_z(t)$ - využito a rozebráno v kapitole 5.6).

a 4 měřitelnými výstupy:

- úhlová rychlost levého motoru (M1) $\omega_1(t)$ [rad · s⁻¹],
- úhlová rychlost pravého motoru (M2) $\omega_2(t)$ [rad · s⁻¹],
- úhlová rychlost kladky na pohyblivém rameni $\omega_3(t)$ [rad · s⁻¹],
- úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$ [rad].

Přestože máme k dispozici 4 výstupní veličiny, tím hlavním co nás především zajímá, a co se budeme snažit řídit, bude úhlová rychlost kladky a úhel vychýlení ramene, jak nám to ukazuje blokový náčrt spojených pohonů 2.5.



Obrázek 2.5: Blokový náčrt systému spojených pohonů

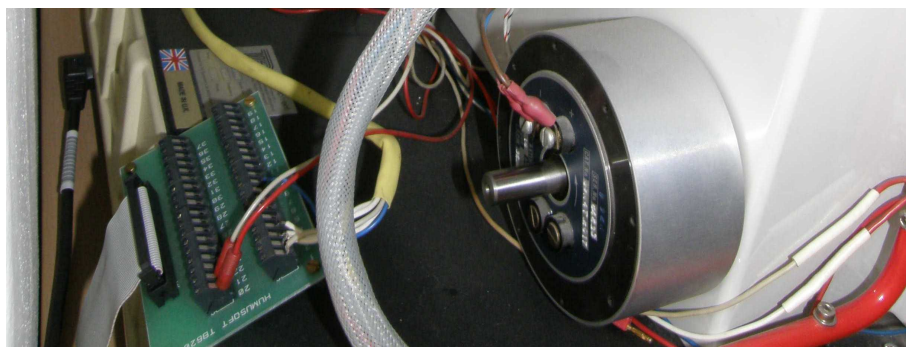
2.3 Připojení modelu CE108 k PC

Všechny vstupy a výstupy laboratorního modelu spojených pohonů jsou nejprve přivedeny do universální svorkovnice TB620 (jak nám ukazuje obrázek 2.6) a dále připojeny k PC přes počítačovou kartu MF614 od firmy Humusoft, s.r.o. Tato karta je podporována balíkem Real Time Toolbox a umožňuje tak plně ovládat laboratorní model a měřit jeho výstupní veličiny v prostředí MATLAB/SIMULINK [12]. Přehled použitých signálů karty je uveden v tabulce 2.2.

Typ signálu	Název	Rozsah signálu	Hodnoty v Matlabu
Vstup modelu	Řízení motoru M1	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$
Vstup modelu	Řízení motoru M2	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$
Výstup modelu	Otáčky motoru M1	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$
Výstup modelu	Otáčky motoru M2	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$
Výstup modelu	Otáčky horní kladky	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$
Výstup modelu	Vychýlení ramene	+/-10 V	$\langle -1, 1 \rangle$

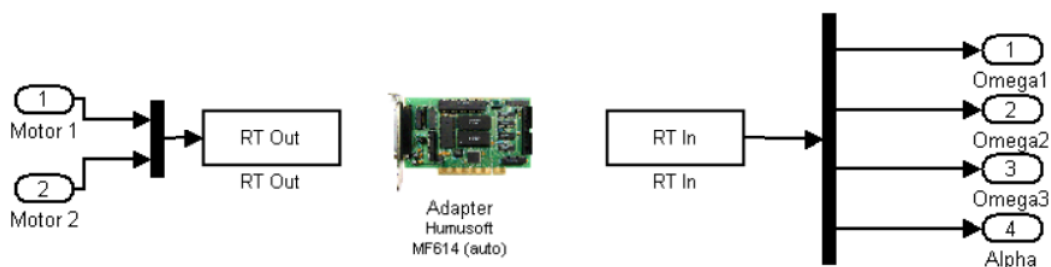
Tabulka 2.2: Vstupy a výstupy karty MF614

Vychýlení ramene převedené na napěťový signál v rozsahu od -10 do 10 V udává míru protažení gumového pásu. Tedy -10 V udává minimální protažení pásu (tj. povolení), 0 V klidový stav a +10 V maximální protažení.



Obrázek 2.6: Universální svorkovnice TB620

Ve vlastnostech komunikace v prostředí Matlab/Simulink je pro odběr vzorků zvolena perioda vzorkování $T_s = 0,01$ s. Na obrázku 2.7 je znázorněna vnitřní struktura virtuálního bloku laboratorního modelu v Simulinku.



Obrázek 2.7: Vnitřní struktura bloku modelu v Simulinku

Na závěr této kapitoly bych ještě rád zmínil, že k modelu CE108 od firmy TecQuipment je možné také přímo zakoupit regulátor pro analogové a digitální řízení (pod označením CE120) nebo také digitální rozhraní CE122, které umožňuje propojení modelu s řídicím počítačem. V našem případě nám ale bohatě dostačuje již zmiňovaná karta MF614 a prostředí Matlab/Simulink.

Kapitola 3

Odvození matematického modelu

Z hlediska teorie řízení je naprostým základem pro studium vlastností systému a návrh jeho řízení (bez ohledu na použitou metodu) co možná nejpřesnější a nejrobustnější matematický model systému, který je ideálně platný v celém pracovním pásmu i při působení nejrůznějších okolních vlivů a podmínek. Ne vždy lze ale tohoto úplně dosáhnout. V této kapitole se ale pokusíme skloubit matematiku, fyziku a teorii systémů a sestavit tak model spojených pohonů, který bude co možná nejvěrnější kopií chování skutečného laboratorního modelu CE108 a bude tvořit "stavební kámen" pro celý zbytek této práce. K tomu bude potřeba systém rozdělit na tyto různé dynamické komponenty

- pohonný systém (2 stejnosměrné motory)
- pružný pás pohonu
- kyvné rameno s pružinou

a ty potom sloučit v jeden celek.

3.1 Matematický popis stejnosměrného motoru

První součástí spojených pohonů (elektrická část), kterou se budeme snažit namodelovat je tedy stejnosměrný motor s cizím buzením (model má takové pohony 2). Ze základními znalostmi fyziky a silnoproudé elektrotechniky [13] je možné odvodit tyto 2 rovnice popisující chování motoru

$$\dot{i}(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t), \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega}(t) = \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{b}{J}\omega(t) - \frac{1}{J}M_z(t). \quad (3.2)$$

Rovnice 3.1 popisuje elektrický obvod kotvy (rotoru stejnosměrného motoru), kde $i(t)$ [A] je elektrický proud procházející obvodem kotvy, R [Ω] a L [H] je odpor a indukčnost vinutí kotvy motoru, k_e [$\text{s} \cdot \text{V}^{-1}$] je elektrická konstanta motoru, $\omega(t)$ [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$] je úhlová

rychlost otáčení motoru a $u(t)$ [V] je vstupní napětí motoru (přivedené přes komutátor na kotvu).

Rovnice 3.2 zahrnuje mechanický popis motoru pomocí momentové rovnice

$$M_h(t) = M_J(t) + M_b(t) + M_z(t). \quad (3.3)$$

V rovnici 3.2 je k_m [$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$] mechanická konstanta motoru, J [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$] je moment setrvačnosti válce a hřídele motoru, b [$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$] je konstanta tlumení (třecí konstanta) a $M_z(t)$ [Nm] je zatěžovací moment motoru.

Jelikož ani jeden z parametrů k_e , k_m , R , L , J a b pro nás od výrobce modelu není známý, nebudeme si situaci komplikovat (celkový model systému bude i tak zahrnovat mnoho dalších neznámých parametrů - viz dále) a pro popis chování stejnosměrného motoru s cizím buzením si vystačíme pouze s jedinou diferenciální rovnicí pro úhlovou rychlost otáčení motoru $\omega(t)$. Místo rovnice 3.2 využijeme tedy tento obecný tvar stavové rovnice

$$\dot{\omega}_1(t) = -a_1 \cdot \omega_1(t) - M_{z_1}(t) + k_1 u_1(t), \quad (3.4)$$

pro úhlovou rychlost levého motoru M1 a

$$\dot{\omega}_2(t) = -a_2 \cdot \omega_2(t) - M_{z_2}(t) + k_2 u_2(t), \quad (3.5)$$

pro úhlovou rychlost pravého motoru M2.

Další části modelu, které budeme dále modelovat, budou již mechanického charakteru.

3.2 Matematický popis pružného pásu

Pro následující úvahy při odvozování popisu bude výhodné vycházet z nákresu systému na obrázku 3.1. Pružný pás (zde zakreslený oranžově) vzájemně propojuje tažné síly motorů M1 a M2. Například jestliže přivedeme napětí $u_1(t)$ na motor M1, rychlost a napětí pásu se změní a motor M2 se bude otáčet díky tažné síle motoru M1. Obdobným způsobem bude vypadat situace, pokud bychom přivedli pouze napětí $u_2(t)$ na motor M2. Na obrázku 3.1 máme uvedený případ, kdy je úhlová rychlost $\omega_1(t)$ motoru M1 vyšší než rychlost $\omega_2(t)$ motoru M2. Vlivem rozdílných úhlových rychlostí motorů působí v gumovém pásu tyto síly

$$F_{12}(t) = k_g \cdot l_{12}(t), \quad (3.6)$$

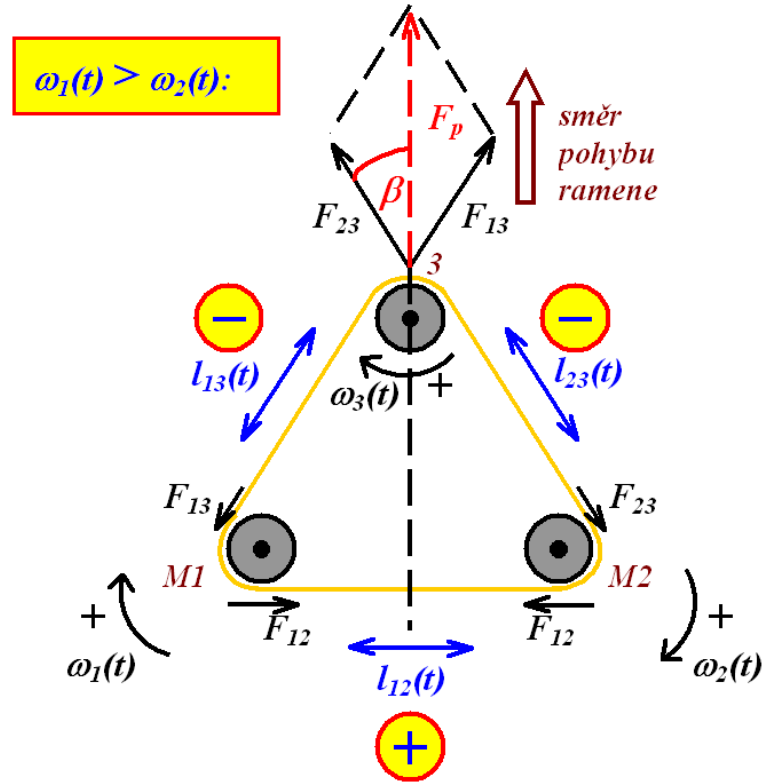
$$F_{13}(t) = F_{23}(t) = k_g \cdot l_{13}(t) = k_g \cdot l_{23}(t), \quad (3.7)$$

kde k_g [Nm^{-1}] je pružnost gumového pásu, $l_{12}(t)$ [m] je prodloužení gumového pásu v úseku mezi motory M1 a M2, $l_{13}(t)$ [m] je prodloužení pásu v úseku mezi motorem M1 a horní kladkou a $l_{23}(t)$ [m] je prodloužení pásu v úseku mezi motorem M2 a horní

kladkou. Pro náš zvolený případ $\omega_1(t) > \omega_2(t)$ dojde vlivem nestejných úhlových rychlostí k protažení gumového pásu mezi motory M1 a M2, tj. nárůstu veličiny $l_{12}(t)$ z nulové polohy (kladné znaménko "+" v nákresu), a zároveň k povolení ("smrštění") pásu mezi jednotlivými motory a horní kladkou, tj. poklesu veličin $l_{13}(t)$ a $l_{23}(t)$ (záporná znaménka "-" v nákresu). V důsledku toho vzniká výslednice sil $F_p(t)$, jejíž výpočet můžeme z obrázku 3.1 odvodit takto

$$\cos \beta = \frac{F_p(t)/2}{F_{13(23)}(t)} \Rightarrow F_p(t) = 2 \cos \beta \cdot F_{13(23)}(t) = 2 \cos \beta \cdot k_g \cdot l_{13(23)}(t), \quad (3.8)$$

a díky které se závěsné rameno s kladkou pohybuje směrem nahoru.



Obrázek 3.1: Principiální nákres veličin působících při spojení pohonů pružným pásem pro případ $\omega_1(t) > \omega_2(t)$

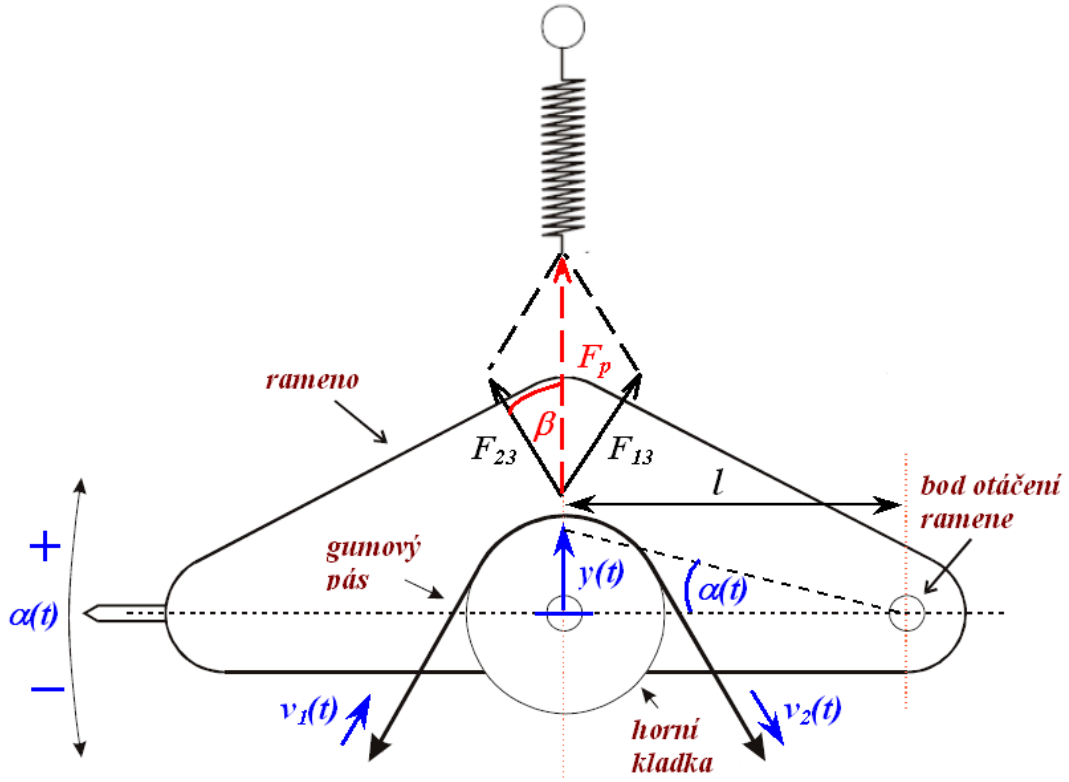
Pokud bychom nyní uvažovali případ, kdy $\omega_1(t) < \omega_2(t)$, dojdeme podobným způsobem k opačným závěrům. Tzn. znaménka u sil $F_{12}(t)$, $F_{13}(t)$ a $F_{23}(t)$ a protažení $l_{12}(t)$, $l_{13}(t)$ a $l_{23}(t)$ budou opačná oproti původním, tím pádem i výslednice $F_p(t)$ bude mít opačný směr a závěsné rameno s kladkou se bude pohybovat směrem dolů.

Z tohoto principu je zřejmé, že **rychlost natažení** gumového pásu (časová derivace) závisí na vzájemné velikosti (rozdílu) úhlových rychlostí $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$. Pokud budou obě úhlové rychlosti motorů stejné, k žádnému natahování nebo povolování gumového pásu docházet nebude. Můžeme tedy napsat tuto rovnici pro rychlost natažení gumového pásu

v úseku mezi motory M1 a M2

$$\dot{l}_{12}(t) = r_k \cdot \omega_1(t) - r_k \cdot \omega_2(t) - k_l \cdot l_{12}(t), \quad (3.9)$$

kde r_k [m] je poloměr hnacích kol motorů M1 a M2 (i samotné horní kladky) a člen $k_l \cdot l_{12}(t)$ vyjadřuje prokluz gumového pásu (k_l [s⁻¹] je konstanta prokluzu).



Obrázek 3.2: Principiální náčrt horní kladky a ramene

Pokud využijeme rovnice z literatury [3] vyjadřující "zákon zachování energie"

$$\dot{y}(t) \cdot F_p(t) = F_{13(23)}(t) \cdot (v_1(t) - v_2(t)), \quad (3.10)$$

kde $y(t)$ [m] je délková² výchylka ramene (vyznačeno v obrázku 3.2), $v_1(t)$ [m · s⁻¹] je rychlost (nikoliv úhlová) levého motoru M1, $v_2(t)$ [m · s⁻¹] je rychlost pravého motoru M2. Využitím rovnice 3.8 potom rovnici upravíme na tento tvar

$$\dot{y}(t) \cdot 2 \cos \beta \cdot F_{13(23)}(t) = F_{13(23)}(t) \cdot (v_1(t) - v_2(t)). \quad (3.11)$$

Z této rovnice nyní můžeme napsat rovnici pro **rychlost natažení** gumového pásu (časová derivace) v úseku mezi motorem M1 a horní kladkou nebo mezi motorem M2 a horní kladkou

$$\dot{l}_{13}(t) = \dot{l}_{23}(t) = v_2(t) - v_1(t) + 2 \cos \beta \cdot \dot{y}(t). \quad (3.12)$$

²Nikoliv úhlová výchylka v podobě $\alpha(t)$, přepočít mezi těmito veličinami bude rozebrán v kapitole 4.1.4

Pokud rychlosti $v_1(t)$ a $v_2(t)$ vyjádříme takto pomocí úhlových rychlostí

$$v_1(t) = r_k \cdot \omega_1(t), \quad (3.13)$$

$$v_2(t) = r_k \cdot \omega_2(t) \quad (3.14)$$

a dosadíme do 3.12, dostaneme tento tvar

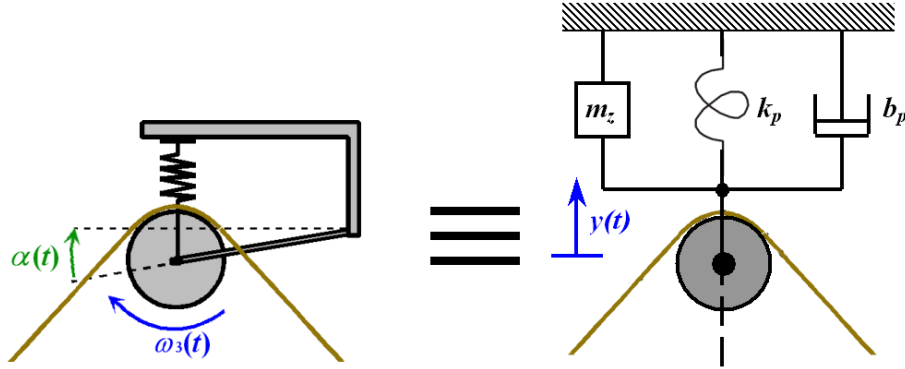
$$\dot{l}_{13}(t) = \dot{l}_{23}(t) = r_k \cdot \omega_2(t) - r_k \cdot \omega_1(t) + 2 \cos \beta \cdot \dot{y}(t), \quad (3.15)$$

do kterého můžeme obdobně jako ve vztahu 3.9 pro rychlost natažení gumového pásu mezi motory opět přidat člen vyjadřující prokluz gumového pásu. Dostáváme tedy tento konečný tvar

$$\dot{l}_{13}(t) = \dot{l}_{23}(t) = r_k \cdot \omega_2(t) - r_k \cdot \omega_1(t) - k_l \cdot l_{13}(t) + 2 \cos \beta \cdot \dot{y}(t). \quad (3.16)$$

3.3 Matematický popis kyvného ramene a chování pružiny

Samotné závěsné kyvné rameno s horní kladkou je možné modelovat pomocí hmotnosti m_z [kg]. Pružina je potom reprezentována tuhostí pružiny k_p [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$] a tlumením b_p [$\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$], tak jak nám to naznačuje obrázek 3.3.



Obrázek 3.3: Principiální náčrtek pružiny, ramene a horní kladky

Konstanta k_p je jakási konstanta úměrnosti mezi odporovou silou a okamžitou rychlostí kmitajícího tělesa. Tato odporová síla společně s direktivní silou vazby (člen zahrnující tuhost pružiny) nám tvoří pohybovou rovnici harmonického oscilátoru, kterou můžeme napsat v tomto tvaru

$$m_z \ddot{y}(t) = -k_p y(t) - b_p \dot{y}(t). \quad (3.17)$$

Tato rovnice 3.17 by platila pro případ, kdy na oscilátor (pružinu) nepůsobí žádná vnější budící síla. V našem případě je ale budící silou síla $F_p(t)$. Rovnici tedy přepíšeme

a upravíme do tvaru, kde budící síla $F_p(t)$ má pro zvolený směr výchylky $y(t)$ záporné znaménko

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k_p}{m_z}y(t) - \frac{b_p}{m_z}\dot{y}(t) - \frac{1}{m_z}F_p(t). \quad (3.18)$$

Pokud si zavedeme

$$\dot{y}(t) = v_y(t) \quad (3.19)$$

a zároveň do rovnice 3.18 dosadíme za $F_p(t)$ z rovnice 3.8, dostaneme tuto výslednou podobu diferenciální rovnice pro popis chování pružiny v laboratorním modelu CE108

$$\dot{v}_y(t) = -\frac{b_p}{m_z}v_y(t) - \frac{k_p}{m_z}y(t) - \frac{2 \cos \beta \cdot k_g}{m_z}l_{13}(t). \quad (3.20)$$

3.4 Dokončení modelu MIMO systému

Nyní nám již pouze zbývá provázat odvozenou elektrickou část modelu (popis motorů) z kapitoly 3.1 s částí mechanickou a sestavit kompletní lineární časově neproměnný stavový popis celého MIMO systému, který má obecně tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (3.22)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor vnitřních stavů, $\mathbf{u}(t)$ je vektor vstupů a $\mathbf{y}(t)$ je vektor výstupů.

Provázání rovnic provedeme přes zatěžovací momenty $M_{z_1}(t)$ a $M_{z_2}(t)$ z rovnic 3.4 a 3.5. Víme totiž, že tyto momenty jsou dány přes příslušné síly takto

$$M_{z_1}(t) = r_k F_{12}(t) - r_k F_{13}(t) = r_k k_g \cdot l_{12}(t) - r_k k_g \cdot l_{13}(t), \quad (3.23)$$

$$M_{z_2}(t) = r_k F_{23(13)}(t) - r_k F_{12}(t) = r_k k_g \cdot l_{13}(t) - r_k k_g \cdot l_{12}(t) \quad (3.24)$$

Úvahou je např. pro případ $\omega_1(t) > \omega_2(t)$ zřejmé, že veličina $l_{12}(t)$ bude kladná (tedy i $F_{12}(t)$ bude kladné) a veličina $l_{13}(t)$ bude záporná (tedy i $F_{13}(t)$ bude záporné). Tím pádem i $M_{z_1}(t)$ bude kladné a motor M1 s úhlovou rychlostí $\omega_1(t)$ bude pásem (a pomalejším motorem M2) brzděn a naopak pravý motor M2 bude pásem (a rychlejším motorem M1) urychlován. Po dosazení za $M_{z_1}(t)$ a $M_{z_2}(t)$ do rovnic 3.4 a 3.5 tedy získáme poslední stavové rovnice, které jsou k popisu systému zapotřebí. Dalšími stavovými rovnicemi jsou totiž již odvozené diferenciální rovnice 3.9, 3.16, 3.19 a 3.20. Máme tedy zvoleny tyto stavové proměnné

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) & \omega_2(t) & l_{12}(t) & l_{13}(t) & y(t) & v_y(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.25)$$

vektor vstupních proměnných

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.26)$$

a vektor výstupních proměnných

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) & \omega_2(t) & y(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.27)$$

Jedná se tedy o systém 6. řádu, jehož lineární časově neproměnné stavové a výstupní rovnice můžeme souhrnně sepsat jako

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= -a_1 \cdot \omega_1(t) - r_k k_g \cdot l_{12}(t) + r_k k_g \cdot l_{13}(t) + k_1 u_1(t), \\ \dot{\omega}_2(t) &= -a_2 \cdot \omega_2(t) + r_k k_g \cdot l_{12}(t) - r_k k_g \cdot l_{13}(t) + k_2 u_2(t), \\ \dot{l}_{12}(t) &= r_k \cdot \omega_1(t) - r_k \cdot \omega_2(t) - k_l \cdot l_{12}(t), \\ \dot{l}_{13}(t) &= -r_k \cdot \omega_1(t) + r_k \cdot \omega_2(t) - k_l \cdot l_{13}(t) + 2 \cos \beta \cdot v_y(t), \\ \dot{y}(t) &= v_y(t), \\ \dot{v}_y(t) &= -\frac{2 \cos \beta \cdot k_g}{m_z} l_{13}(t) - \frac{k_p}{m_z} y(t) - \frac{b_p}{m_z} v_y(t), \\ y_1(t) &= \omega_1(t), \\ y_2(t) &= \omega_2(t), \\ y_3(t) &= c \cdot y(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Stavové matice systému ze vztahů 3.21 a 3.22 mají potom tento tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & -r_k k_g & r_k k_g & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & r_k k_g & -r_k k_g & 0 & 0 \\ r_k & -r_k & -k_l & 0 & 0 & 0 \\ -r_k & r_k & 0 & -k_l & 0 & 2 \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2 \cos \beta \cdot k_g}{m_z} & -\frac{k_p}{m_z} & -\frac{b_p}{m_z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zde je důležité ještě zmínit, že zvolené výstupní veličiny ve vektoru 3.27 se úplně přesně neshodují s řízenými výstupními veličinami $\omega_3(t)$ a $\alpha(t)$ uvedenými v kapitole 2.2. To ale není vůbec na škodu, protože převod těchto veličin je velmi zřejmý a více o tomto bude napsáno v následující kapitole 4 zabývající se identifikací laboratorního modelu spojených pohonů.

Jelikož se při sestavování matematického modelu využilo většího množství veličin a pomocných parametrů, jsou ještě jednou přehledně shrnuty v následující tabulce 3.1.

Označení veličiny	Rozměr	Význam
$\omega_1(t)$	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	úhlová rychlost levého motoru M1
$\omega_2(t)$	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	úhlová rychlost pravého motoru M2
$\omega_3(t)$	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	úhlová rychlost horní kladky
$\alpha(t)$	$[\text{rad}]$	úhel vychýlení ramene
$y(t)$	$[\text{m}]$	délková výchylka ramene
$v_y(t)$	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	rychlost výchylky ramene
$u_1(t)$	$[\text{V}]$	vstupní napětí levého motoru M1
$u_2(t)$	$[\text{V}]$	vstupní napětí pravého motoru M2
$M_{z_1}(t)$	$[\text{Nm}]$	zatěžovací moment levého motoru M1
$M_{z_2}(t)$	$[\text{Nm}]$	zatěžovací moment pravého motoru M3
$l_{12}(t)$	$[\text{m}]$	prodloužení pásu v úseku mezi motory M1 a M2
$l_{13}(t)$	$[\text{m}]$	prodloužení pásu mezi motorem M1 a kladkou
k_g	$[\text{Nm}^{-1}]$	pružnost gumového pásu
r_k	$[\text{m}]$	poloměr hnacích kol motorů M1 a M2 (i kladky)
k_l	$[\text{s}^{-1}]$	konstanta prokluzu gumového pásu
β	$[\text{rad}]$	úhel mezi osou horní kladky a pásem
m_z	$[\text{kg}]$	hmotnost ramene (i s horní kladkou)
k_p	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$	tuhost pružiny
b_p	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}]$	tlumení pružiny

Tabulka 3.1: Vybrané důležité veličiny a parametry použité při matematickém popisu modelu

Kapitola 4

Identifikace laboratorního modelu spojených pohonů CE108

V předchozí kapitole jsem se snažil na základě matematického popisu vytvořit celkový dynamický virtuální model spojených pohonů (modelové rovnice 3.28 a 3.29), přičemž bylo velmi málo bráno v potaz reálné provedení laboratorního modelu CE108. Cílem této kapitoly bude nejprve představit kontrétní technické prostředky modelu (např. při zpracování vstupních a výstupních signálů) a na základě těchto znalostí zvolit vhodné metody identifikace modelu. To znamená nalezení neznámých konstant odvozeného matematického modelu. Jedná se tedy o velmi konkrétní a praktickou část. Problémy různých faktorů, omezení a okolní vlivy reálného světa působící na reálný model zde budou hrát velkou roli. Dalším důležitým hlediskem je možnost vlastní realizace identifikačního experimentu. Některé konstanty modelu se nám totiž nejspíš nepodaří přímo získat ať už z důvodu nemožnosti rozebrání systému nebo absence senzorů některých klíčových veličin. Proto je bude nutné získat na základě simulací a experimentů. S tímto jevem se ale člověk naprosto běžně setkává i v průmyslové praxi. V závěru kapitoly potom porovnáme matematický model systému s reálným chováním modelu CE108.

4.1 Převod jednotek z PC do fyzikálních jednotek SI

Protože svět skutečných fyzikálních veličin a digitálních čísel je nutné nejprve sjednotit, budu se v tuto chvíli zabývat o převody mezi jednotkami veličin z Matlabu a skutečnými fyzikálními rozměry. Ve většině číslicově řízených systémech totiž vždy hraje roli **vzorování** měřených veličin a **číslicový výstup** řídicího počítače.

4.1.1 Převody jednotek vstupních veličin

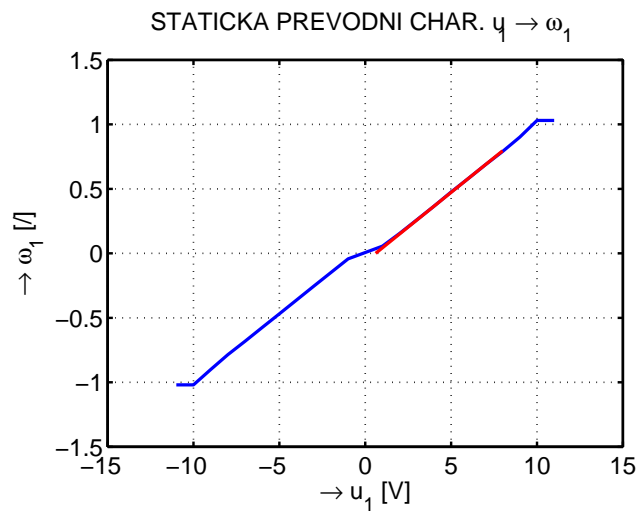
Jak již bylo uvedeno v kapitole 2.3 a tabulce 2.2, pro **vstupní napětí** $u_1(t)$ a $u_2(t)$ je převod z bezrozměrných jednotek prostředí Matlab znám od výrobce. Hnací motory mají totiž předepsané jmenovité napětí. Přepočty jednotek **Matlab** \rightarrow **měřená veličina**

proto jsou

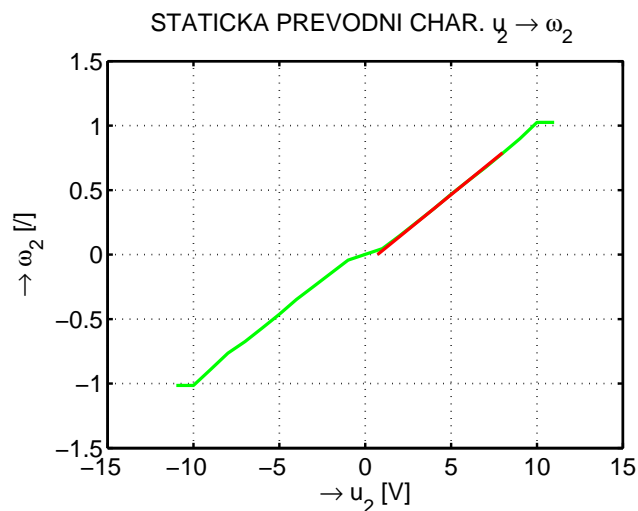
$$u_1(t), u_2(t) : 1 [V] \rightarrow 10 [V]. \quad (4.1)$$

4.1.2 Statické převodní charakteristiky samotných motorů M1 a M2

Statickou převodní charakteristikou je myšlena závislost mezi ustálenou vstupní veličinou a ustálenou výstupní veličinou. Pod pojmem převodní charakteristiky **samotných motorů M1 a M2** máme na mysli to, že v tomto okamžiku měříme pouze charakteristiky motorů, nikoliv celého kompletu spojených pohohů. Pružný gumový pás spojující pohony z obrázku 2.1 (hnědá barva) je tedy v tomto okamžiku sundaný.



Obrázek 4.1: Statická převodní charakteristika motoru M1 (bez gumového pásu)



Obrázek 4.2: Statická převodní charakteristika motoru M2 (bez gumového pásu)

Protože již známe přepočet jednotek 4.1 pro vstupní veličiny a z parametrů od výrobce známe pro jmenovité napětí $U = 10 \text{ V}$ maximální hodnotu otáček hřídele motoru (3000 ot./min), můžeme z tohoto bodu převodní charakteristiky na obrázku 4.1 jednoduše určit převodní konstantu pro **výstupní veličinu** úhlovou rychlost $\omega(t)$. Platí totiž

$$3000 \text{ ot./min} \doteq 314,16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.2)$$

Charakteristiky 4.1 a 4.2 se liší velmi nepatrně, a to ve velikostech směrnic přímky. Pro $u_1 = 10 \text{ V}$ odečítáme ustálenou hodnotu $\omega_1 \doteq 1,03 \text{ [°]}$, pro $u_2 = 10 \text{ V}$ potom $\omega_2 \doteq 1,025 \text{ [°]}$. Dostáváme tedy tyto přepočty jednotek **Matlab** \rightarrow **měřená veličina**

$$\omega_1(t) : 1,03 \text{ [°]} \rightarrow 314,16 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}] \Rightarrow 1 \text{ [°]} \rightarrow 305 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}], \quad (4.3)$$

$$\omega_2(t) : 1,025 \text{ [°]} \rightarrow 314,16 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}] \Rightarrow 1 \text{ [°]} \rightarrow 306,5 \text{ [rad} \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (4.4)$$

Z měření 4.1 a 4.2 provedených na samotných motorech lze vyhodnotit tyto důležité parametry uvedené v tabulce 4.1. Pásmo necitlivosti hraje důležitou roli při zkoumání linearity³. Saturace nás zase upozorňuje na omezení a maximální meze řízeného systému.

Označení motoru	Parametr	Hodnota
M1	pásmo necitlivosti v počátku	$u_1 = -0,6 \text{ V}$ až $0,6 \text{ V}$
M1	saturace	$\pm 10 \text{ V}$
M2	pásmo necitlivosti v počátku	$u_2 = -0,72 \text{ V}$ až $0,72 \text{ V}$
M2	saturace	$\pm 10 \text{ V}$

Tabulka 4.1: Odečtené parametry ze statických převodních charakteristik motorů

Statické zesílení přenosu samotného motoru M1 na otáčky ω_1 je možné získat jako směrnici přímky ze statické převodní charakteristiky z obrázku 4.1 takto

$$k_{s_{M1}} = \frac{y_{bod_2} - y_{bod_1}}{u_{bod_2} - u_{bod_1}} = \frac{0,58 - 0,365}{0,6 - 0,4} = \underline{1,075}. \quad (4.5)$$

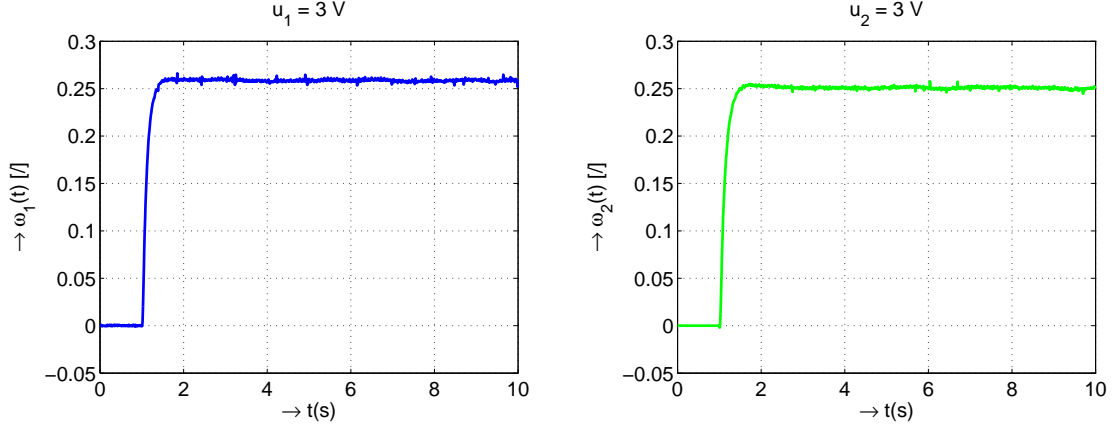
Obdobně pro samotný motor M2 dostáváme z obrázku 4.2 statické zesílení přenosu na otáčky ω_2

$$k_{s_{M2}} = \frac{y_{bod_2} - y_{bod_1}}{u_{bod_2} - u_{bod_1}} = \frac{0,573 - 0,356}{0,6 - 0,4} = \underline{1,085}. \quad (4.6)$$

Experimentální identifikací přechodových charakteristik jednotlivých motorů orientačně určíme časové konstanty pro samotné motory. Tento způsob identifikace je asi nejméně přesný, zato velmi jednoduchý. Pro naše účely a přibližný náhled tedy prozatím postačí. Pro levý servomotor M1 tedy byla změřena odezva $\omega_1(t)$ na vstupní skokový signál napětí $u_1 = 3 \text{ V}$, viz obr. 4.3 (vlevo). Z charakteru přechodové charakteristiky lze konstatovat, že se přibližně jedná o systém 1. řádu a pro ustálenou hodnotu výstupní

³V obrázcích 4.1 a 4.2 je červenou úsečkou vyznačena rozumná použitelná lineární oblast systému

veličiny $0,63\omega_1(\infty)$ lze přibližně odečíst časovou konstantu $T_{M_1} = 0,12$ s. Z odezvy $\omega_2(t)$ na vstupní skokový signál napětí $u_2 = 3$ V na obrázku 4.3 (vpravo) lze podobně (při detailním náhledu) odečíst pro ustálenou hodnotu výstupní veličiny $0,63\omega_2(\infty)$ časovou konstantu $T_{M_2} = 0,13$ s.



Obrázek 4.3: Přechodové charakteristiky samotných motorů M1 a M2 (bez gumového pásu)

Takto tedy můžeme napsat identifikovaný přenos pro samotný levý motor M1

$$G_{M_1}(s) = \frac{\Omega_1(s)}{U_1(s)} = \frac{k_{sM_1}}{T_{M_1} \cdot s + 1} = \frac{1,075}{0,12s + 1} \equiv \frac{k_{M_1}}{s + a_{M_1}} = \frac{8,96}{s + 8,33}. \quad (4.7)$$

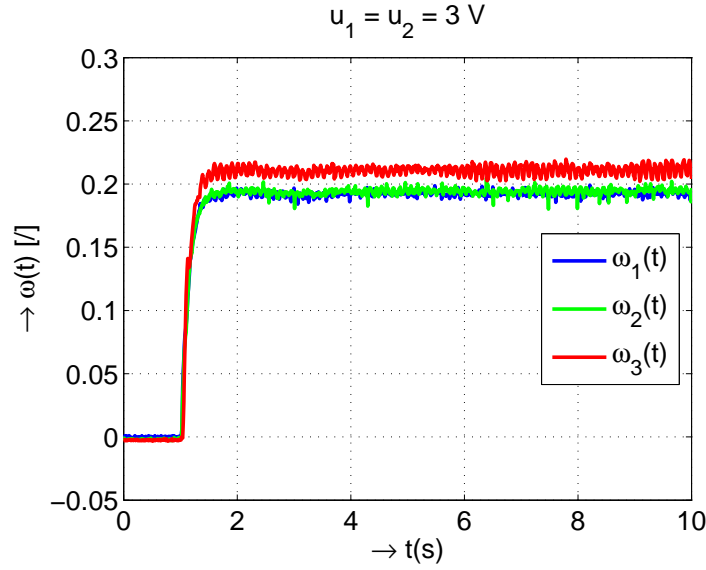
A podobně pro motor M2

$$G_{M_2}(s) = \frac{\Omega_2(s)}{U_2(s)} = \frac{k_{sM_2}}{T_{M_2} \cdot s + 1} = \frac{1,085}{0,13s + 1} \equiv \frac{k_{M_2}}{s + a_{M_2}} = \frac{8,35}{s + 7,69}. \quad (4.8)$$

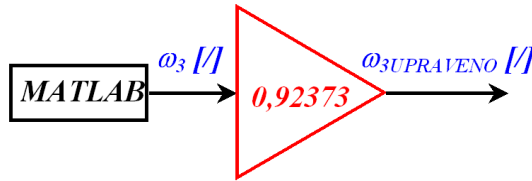
4.1.3 Převody jednotek pro úhlovou rychlost horní kladky

Do této chvíle jsme pro přepočty jednotlivých veličin využívali laboratorního modelu bez spojení pohonů a horní kladky pružným pásem. Nyní gumový pás nasadíme a určíme chybějící převod jednotek pro sledovanou výstupní úhlovou rychlost horní kladky $\omega_3(t)$. Na obrázku 4.4 máme vykresleny odezvy úhlových rychlostí $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ a $\omega_3(t)$ na vstupní skokový signál napětí $u_1 = u_2 = 3$ V. Pro tato stejná vstupní napětí totiž nebude docházet k žádnému prokluzování⁴ gumového pásu. Na první pohled nás zarazí, že úhlová rychlost $\omega_3(t)$ horní kladky je vyšší než úhlové rychlosti $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$ hnacích motorů M1 a M2, což není prakticky možné. Toto svědčí spíše o špatně zkalibrovaném senzoru pro rychlost $\omega_3(t)$. Úvahou by se totiž pro shodná vstupní napětí měly velikosti všech měřených úhlových rychlostí shodovat. S touto nepřesností si poradíme tak, že v Matlabu provedeme korekci velikosti úhlové rychlosti, jak je naznačeno na obrázku 4.5.

⁴viz kapitola 4.2.1



Obrázek 4.4: Odezvy úhlových rychlostí na skok vstupních napětí (model s gumovým pásem)



Obrázek 4.5: Korekce velikosti úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ horní kladky

Zároveň tak máme vyřešenu i důležitou otázku volby jedné řízené výstupní veličiny $\omega_3(t)$ laboratorního modelu CE108, která se zdánlivě neshoduje s odvozenými a zvolenými výstupními veličinami $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$ z kapitoly 3.4 (rovnice 3.27). Na příkladu obrázku 4.4 totiž vidíme, že za určitých podmínek a vstupních nastavení lze docílit shody všech měřených veličin $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ a $\omega_3(t)$ a soustava pohonů spojených pružným pásem se otáčí ve všech 3 měřených místech přibližně stejnou úhlovou rychlostí. Je tedy na nás, kterou ze tří úhlových rychlostí využijeme jako regulovanou veličinu. Měli bychom mít ale vždy na paměti, že skutečnou regulovanou veličinou by měla být úhlová rychlost kladky na pohyblivém rameni $\omega_3(t)$. Ta totiž společně s úhlem vychýlení ramene $\alpha(t)$ (odpovídá napnutí gumového pásu) reprezentuje veličinu z oblasti pracovní stanice z obrázku 1.2.

Pro upravenou veličinu $\omega_{3UPRAVENO}$ potom přibližně dostáváme stejný přepočítání jednotek **Matlab** → **měřená veličina** jako v případě veličin $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$ (přepočty 4.3, 4.4)

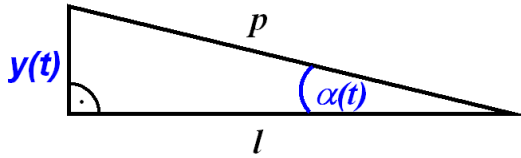
$$\omega_{3UPRAVENO}(t) : 1 [^\circ] \rightarrow 306 [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]. \quad (4.9)$$

4.1.4 Převody jednotek pro úhel vychýlení ramene

Převod jednotek **Matlab** \rightarrow **měřená veličina** pro veličinu úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$ je možné získat za pomoci stupnice (indikátor vychýlení ramene) z obrázku 2.4. Ručku ramene totiž můžeme na stupnici vychýlit na daný úhel ve stupních a v Matlabu se podívat na odpovídající bezrozměrnou hodnotu této veličiny. Získáme tedy tento přepočet

$$\alpha(t) : 1 [^\circ] \rightarrow 4,72 [^\circ] \doteq 0,0824 [\text{rad}]. \quad (4.10)$$

Aby bylo možné porovnávat tento měřený úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$ s délkovou výchylkou ramene $y(t)$ obsaženou v odvozeném matematickém popisu (3.27), je nutné vyjít z obrázku 4.6, který odpovídá veličinám zakreslených již na principiálním obrázku horní kladky a ramene 3.2.



Obrázek 4.6: Přepočet z úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$ na délkovou výchylku ramene $y(t)$

V obrázku 4.6 je $\alpha(t)$ [rad] okamžitý úhel vychýlení ramene, $y(t)$ [m] je okamžitá délková výchylka ramene, $l = 0,12$ m je vzdálenost středu horní kladky a bodu, kde je vodič ukotven a p [m] je vzniklá přepona. Platí tedy

$$y(t) = l \cdot \tan \alpha(t). \quad (4.11)$$

Jelikož se úhel $\alpha(t)$ může prakticky pohybovat pouze v rozmezí $\pm 5^\circ$, je možné provést zjednodušení, kdy pro velmi malý úhel v radiánech přibližně platí

$$\tan \alpha(t) \approx \sin \alpha(t) \approx \alpha(t). \quad (4.12)$$

Velikost veličiny $y(t)$ bude ještě experimentálně korigována konstantou c obsaženou v matematickém popisu 3.28. Ta bude zvolena tak, aby se v Matlabu přímo shodovala velikost měřené veličiny laboratorního modelu $\alpha(t)$ s velikostí veličiny $y(t)$ teoretického matematického modelu. V tuto chvíli je ale tedy možné díky zjednodušení 4.12 předpokládat, že přibližně platí

$$y(t) [\text{m}] \approx l \cdot \alpha(t) [\text{rad}] = 0,12 \cdot \alpha(t) [\text{rad}]. \quad (4.13)$$

Pokud si například zvolíme úhel vychýlení ramene $\alpha(t) = 1^\circ$, dostaneme

$$\alpha(t) \doteq 0,0175 \text{ rad} \Rightarrow y(t) \doteq 0,12 \cdot 0,0175 \text{ m} = \underline{2,1 \text{ mm}}.$$

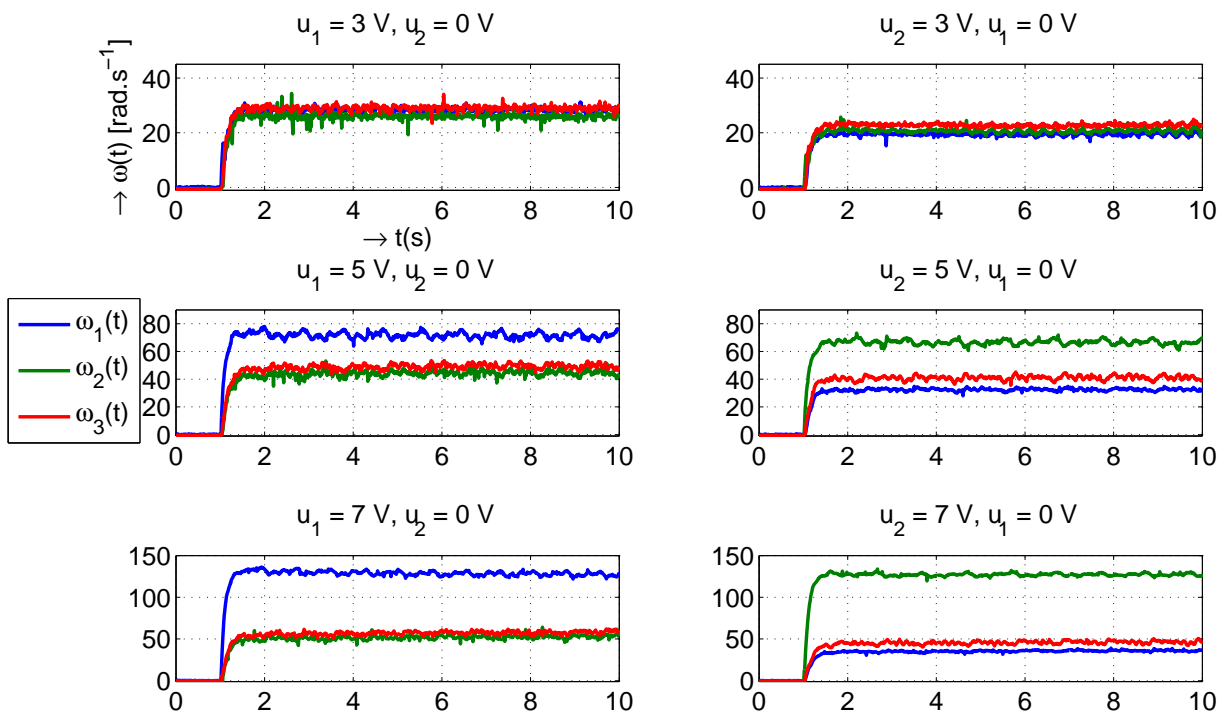
Tento údaj pro takto zvolený malý úhel přibližně odpovídá reálné skutečnosti a potvrzuje tak správnost naší úvahy.

4.2 Identifikace částí laboratorního modelu

V této fázi diplomové práce se již konkrétně zaměřím na samotnou identifikaci jednotlivých částí laboratorního modelu spojených pohonů \rightarrow neboli identifikaci konstant stavového modelu. Jedná se tedy o část *elektrickou* - 2 stejnosměrné motory a část *mechanickou* - kyvné rameno s pružinou a gumový pás.

4.2.1 Identifikace parametrů stejnosměrných motorů

Před tím, než začnu popisovat způsob zjišťování samotných neznámých konstant motorů, provedu ještě s modelem nejprve sérii několika velmi důležitých experimentů. Na motory M1 a M2 budu připojovat vstupní napětí $u_1(t)$ a $u_2(t)$ o různých velikostech. V jeden okamžik ale vždy pouze jedno z napětí $u_1(t)$ nebo $u_2(t)$, zbylé bude nastaveno vždy na hodnotu 0 V. A budu sledovat ustálené otáčky měřených veličin $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ a $\omega_3(t)$. Vybrané výsledky těchto pokusů jsou znázorněny na obrázku 4.7.



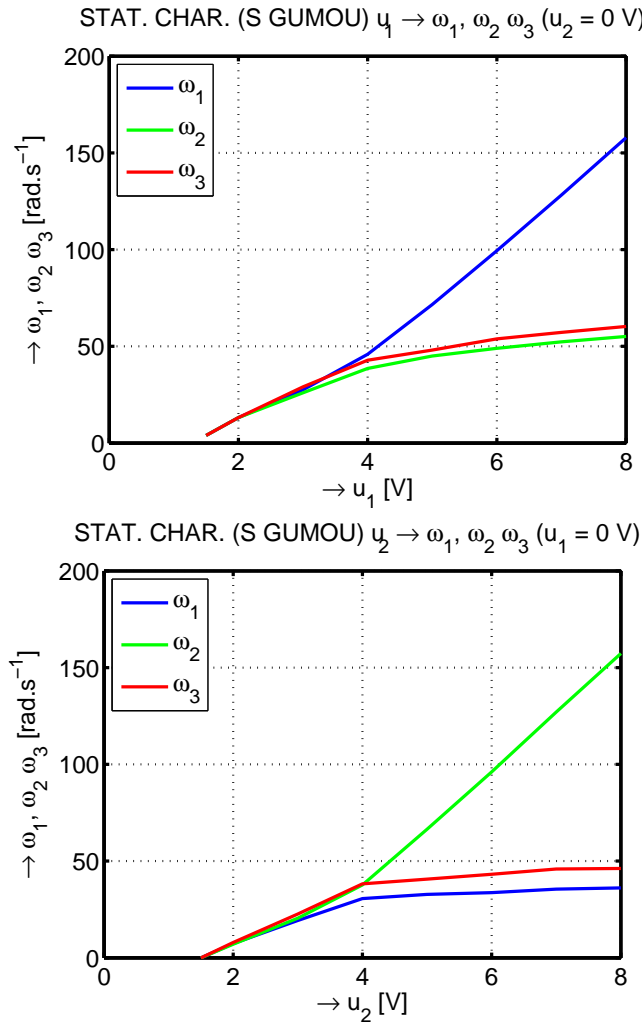
Obrázek 4.7: Prokluzování gumového pásu při velkých rozdílech v otáčkách motorů M1 a M2

Na levém a pravém horním obrázku jsou všechny měřené úhlové rychlosti přibližně stejně velké a vše se zdá být v pořádku. Pokud se ale podíváme na zbylé průběhy,

všimneme si, že zde začne docházet ke značnému nárustu úhlové rychlosti $\omega_1(t)$ nebo $\omega_2(t)$ a ostatní měřené rychlosti příliš nevzrůstají. V tomto okamžiku totiž začne docházet k **prokluzování gumového pásu** a u motoru, který se otáčí výrazně rychleji, začne docházet k nárustu úhlové rychlosti a podkluzování pásu na úkor zbylých 2 částí spojených pohonů. Lze tedy udělat závěr, který souvisí s rozdílem otáček $\omega_1(t)$ nebo $\omega_2(t)$, tj. hnacích pohonů M1 a M2. Pokud je rozdíl těchto otáček příliš velký - lze zapsat jako

$$|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \neq 0, \quad (4.14)$$

bude docházet k prokluzování gumového pásu a tím pádem i velkým nelinearitám v systému, které by bylo velmi složité popsat. Prokluz pásu by totiž nemusel být vždy deterministický. Dokončení experimentu z obrázku 4.7 i pro další body měření je přehledně vyneseno na obrázku 4.8. Zde je otestován extrémní příklad prokluzu, kdy se nejprve postupně zvyšuje vstupní napětí $u_1(t)$ (tedy i otáčky $\omega_1(t)$) a $u_2(t)$ je nulové nebo se naopak zvyšuje vstupní napětí $u_2(t)$ a $u_1(t)$ je nulové.

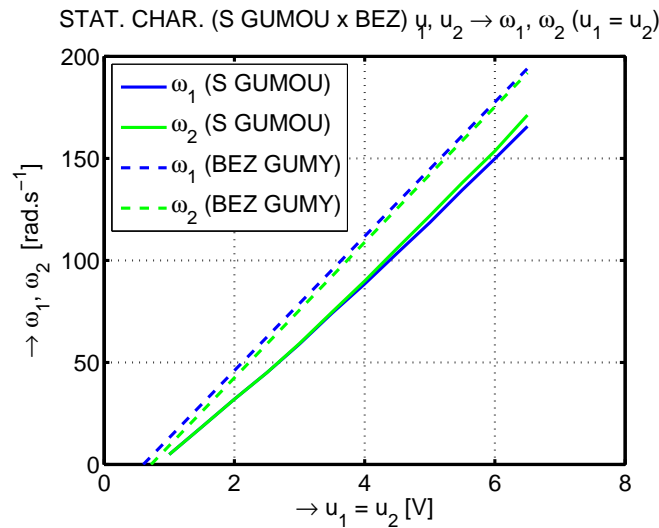


Obrázek 4.8: Statické charakteristiky - prokluzování při velkých rozdílech v otáčkách

Tato nepříjemná vlastnost prokluzování gumového pásu, která by nám velmi komplikovala matematický model odvozený v kapitolě 3 a vnášela by velké neurčitosti, nás nutí k tomu, abychom si pro následné řízení zvolili vhodný **pracovní bod** a v jeho okolí se dále pohybovali. Z předchozího je zřejmé, že vhodným pracovním bodem bude určitě situace, kdy se vstupní napětí (tedy i otáčky) motorů shodují. Dále je jistě výhodné využít vhodně zvolené lineární pracovní oblasti motorů z obrázku 4.1 nebo 4.2. Jako zvolený pracovní bod tedy můžeme použít toto nastavení vstupních napětí

$$\begin{aligned} u_{10} = u_{20} = 3 \text{ V} &\Rightarrow y_{10} = y_{20} = \omega_{10} = \omega_{20} = 61,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \\ y_{30} = y_0 &\approx \alpha_0 = 0 \text{ rad}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nyní přistoupíme k samotnému identifikačnímu experimentu, který nám dopomůže k nalezení neznámých konstant motoru M1 a M2. Pro zvolenou pracovní oblast v okolí pracovního bodu proměříme statické charakteristiky pohonů spojených pohonů s nasazeným gumovým pásem pro případ $u_1 = u_2$, tedy statické převodní charakteristiky $u_1, u_2 \rightarrow \omega_1, \omega_2$ ($u_1 = u_2$). V tomto případě by totiž nemělo docházet k žádnému prokluzování pásu. Výsledky těchto měření zároveň porovnáme se statickými charakteristikami samotných motorů 4.1 a 4.2 (tedy s případem **bez spojení gumovým pásem**) a vynešeme do společného grafu 4.9. V tomto grafu označení $u_1 = u_2$ u osy x nemusí nutně znamenat přesnou shodu napětí, ale zároveň tato charakteristika platí i pro **průměrnou hodnotu vstupních napětí**! Rozdíl v těchto hodnotách napětí ovšem nesmí být velký, jinak by začalo docházet ke zmiňovanému prokluzu gumového pásu.



Obrázek 4.9: Statická charakteristika spojených pohonů pro otáčky

Z těchto klíčových měření je zřejmé, že se směrnice přímky ze vztahu 4.5 (případně 4.6) při sprážení pohonů gumovým pásem zmenšila. Poklesu otáček $\omega_1(t)$ nebo $\omega_2(t)$ v měřeních s gumovým pásem oproti měření bez něj při stejných vstupních napětích si bylo možné všimnout již při porovnání průběhů 4.3 a 4.7 (za použití převodu 4.3 na

radiány) například pro vstupní napětí 3 V. Tento pokles při užití gumového pásu je nejspíš způsoben vzniklým *valivým odporem*, který vzniká mezi tělesem kruhového průřezu při jeho valivém pohybu a podložkou. Příčinou tohoto jevu je neexistence absolutně tuhého tělesa, tj. tělesa, které se nedeformuje účinkem jakkoliv velké síly - více o tomto pojednáno v [14]. Je tedy nutné z obrázku 4.9 určit směrnici nové přímký (při spřažení pohonů gumovým pásem), čímž identifikujeme první z neznámých parametrů k_1 modelu 3.29. Pro zjednodušení totiž uvažujeme, že motory M1 a M2 jsou co do vlastností totožné

$$\Rightarrow M1 \equiv M2 \Rightarrow k_1 = k_2, a_1 = a_2 \quad (4.16)$$

a ovlivňují tak soustavu spojených pohonů stejnou měrou. Tato symetrie nakonec přispěje k velké shodě laboratorního modelu s odvozeným matematickým modelem 3.29. Z nalezené směrnice k_s (získané z obr. 4.9 využitím přepočtů do bezrozměrných jednotek 4.1 a 4.9) tedy určíme

$$k_s = 1,02 \Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{k_s}{T_1} = \frac{k_s}{T_2} \doteq 7,8462, \quad (4.17)$$

kde za $T_1 = T_2$ bylo zvoleno 0,13 s (viz časová konstanta z 4.8). Platí tedy

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,13} \doteq 7,6923. \quad (4.18)$$

Z identifikace části stejnosměrných motorů máme v tuto chvíli určeny všechny potřebné neznámé konstanty (při využití zjednodušující úvahy 4.16) a můžeme se nyní zaměřit na identifikaci neznámých parametrů pružiny.

4.2.2 Identifikace parametrů kyvného ramene s pružinou

V kapitole 3.3 jsme dospěli ke konečnému tvaru pohybové rovnice pro harmonický kmitavý pohyb (3.20). Pomocí substituce

$$b_p = 2 \cdot b \cdot m_z; \quad k_p = \omega_0^2 \cdot m_z \quad (4.19)$$

můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\dot{v}_y(t) = -2bv_y(t) - \omega_0^2 y(t) - \frac{2 \cos \beta \cdot k_g}{m_z} l_{13}(t), \quad (4.20)$$

kde b je *konstanta (součinitel) útlumu* a ω_0 je *úhlová frekvence vlastních kmitů*. Nyní můžeme s laboratorním model provést identifikační experiment. Vychýlíme ručku ramene z klidové (vodorovné) polohy směrem dolů, pustíme a v Matlabu pomocí snímače úhlu vychýlení ramene zaznamenáme reakci pružiny. Tím určíme právě hodnoty konstant b a ω_0 . Jejich velikost totiž můžeme nalézt porovnáním modelu z rovnice 4.20 s průběhem provedeného experimentu. Diferenciální rovnici 4.20 je možné za předpokladu substituce 3.19 zapsat do tvaru *charakteristické rovnice*

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (4.21)$$

která má řešení

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}. \quad (4.22)$$

Pokud nyní provedeme volbu

$$b < \omega_0, \quad (4.23)$$

dostáváme případ tzv. **slabého tlumení**, který přesně charakterizuje náš případ tlumeného kmitavého pohybu pružiny a kdy oba kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní. Pro dané nastavení ladicího šroubu⁵ na laboratorním modelu CE108 tedy byly nakonec zvoleny tyto parametry

$$b = 1,4; \quad \omega_0 = 28. \quad (4.24)$$

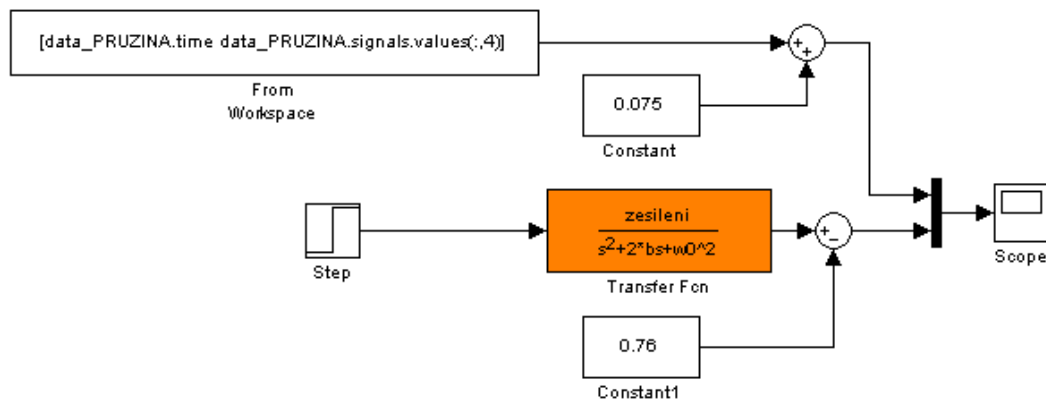
Posledním chybějícím parametrem je hmotnost kyvného ramene s horní kladkou, kterou lze vyčíst z dokumentace [4] - $m_z = 0,35$ kg. Dosadíme-li tyto hodnoty do 4.19, dostaneme hledané parametry pružiny

$$b_p = 0,98 \text{ [N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s]}; \quad k_p = 274,4 \text{ [N} \cdot \text{m}^{-1}]. \quad (4.25)$$

Rovnici 4.20 je možné simulovat v Simulinku [12] pomocí přenosu

$$G_{pruz}(s) = \frac{\text{zesileni}}{s^2 + 2b \cdot s + \omega_0^2}. \quad (4.26)$$

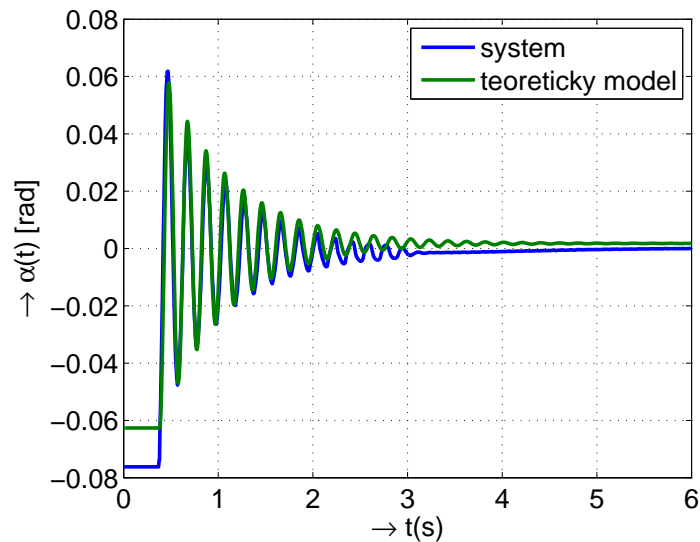
Simulační schéma pro porovnání naměřených dat laboratorního modelu a nalezeného přenosu chování pružiny je na obr. 4.10. Bloky *Constant* a *Constant1* slouží pouze k posunutí odezev pružiny do stejného místa. Je totiž jednak potřeba potlačit offset snímače pro úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$, kdy i v klidové poloze ramene není v Matlabu snímána nulová hodnota měřené veličiny $\alpha(t)$. Dále je nutné pomocí druhé konstanty posunout přechodovou charakteristiku přenosu 4.26 do stejného místa, do kterého je při experimentu vychýlena ručka ramene.



Obrázek 4.10: Simulační schéma pro porovnání chování pružiny systému a teoretického modelu

⁵ovlivňuje tuhost a tlumení pružiny

Na obrázku 4.11 vidíme výsledek celého experimentu jakožto porovnání odezvy pružiny systému CE108 a teoretického modelu. Naměřená odezva kmitání pružiny se velmi dobře shoduje s teoretickým modelem.

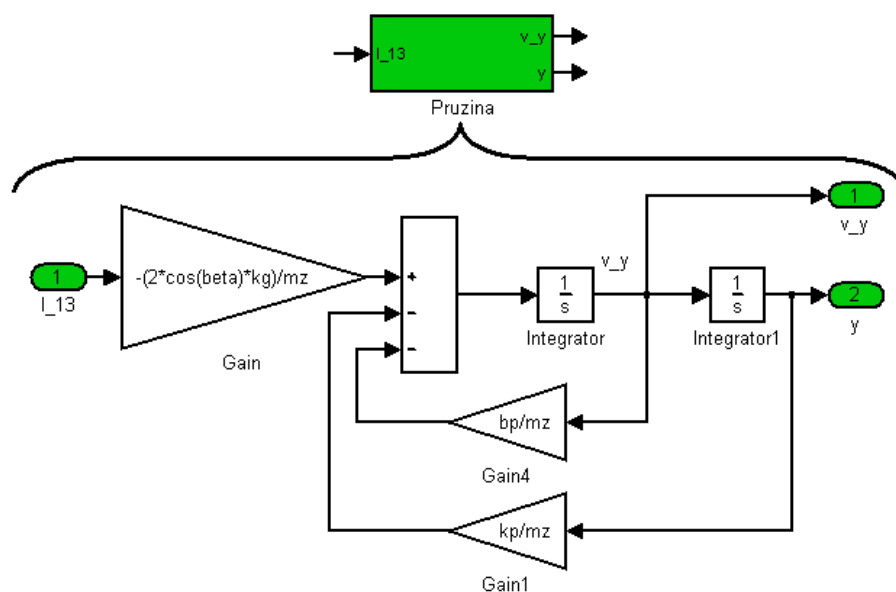


Obrázek 4.11: Porovnání chování pružiny systému a teoretického modelu

Zbývající konstantu

$$\frac{2 \cos \beta \cdot k_g}{m_z}$$

z šesté rovnice stavového modelu 3.28 jsem po sérii pokusů experimentálně nastavil na hodnotu $-3,85$. Pátou a šestou rovnici modelu 3.28 je tedy již v Simulinku možné namodelovat jako blok **Pružina** s vnitřní strukturou dle obr. 4.12.



Obrázek 4.12: Vnitřní struktura bloku **Pružina**

4.2.3 Identifikace parametrů gumového pásu

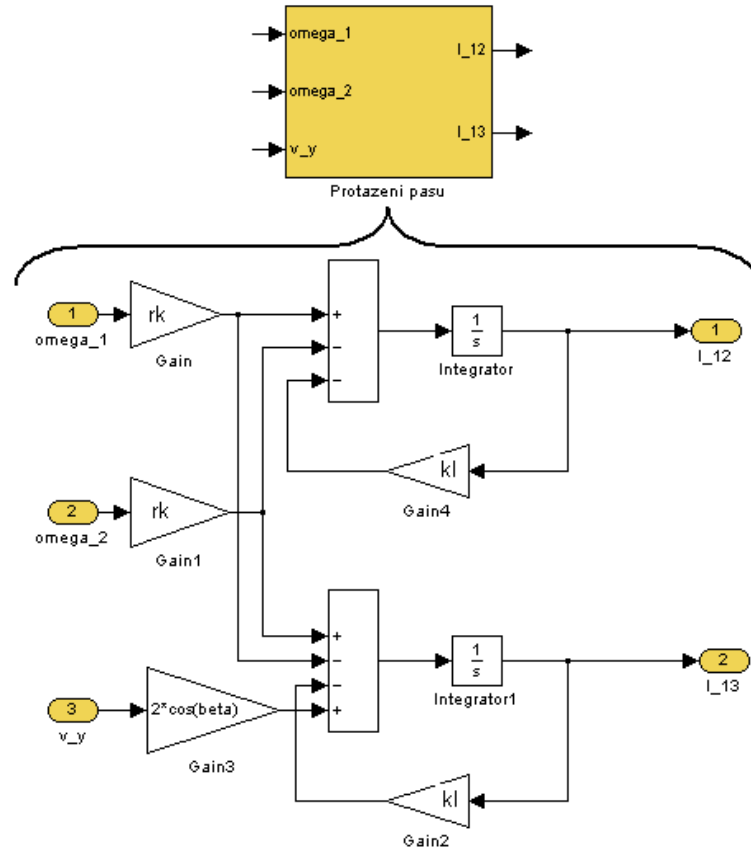
Jediný parametr popisující vlastnosti pružného pásu laboratorního modelu spojených pohonů z kapitoly 3.2, který můžeme nalézt v dokumentaci [4] je úhel

$$\beta = 30^\circ. \quad (4.27)$$

Ostatní parametry jako například pružnost gumového pásu k_g [Nm^{-1}] a konstanta prokluzu gumového pásu k_l [s^{-1}] jsou pro nás neznámé a zároveň i těžko identifikovatelné na základě nějakého experimentu. To je dáno především absencí nějakého senzoru, který by měřil prodloužení gumového pásu v úseku mezi motory M1 a M2 $l_{12}(t)$ [m] nebo prodloužení pásu v úseku mezi motory a horní kladkou $l_{13}(t)$ [m] (či $l_{23}(t)$ [m]). Takové měření by ale bylo prakticky velmi těžko realizovatelné. Proto nám nezbyde nic jiného, než tyto neznámé parametry zkoušet experimentálně nastavovat v Matlabu, a vyladit je za pomoci porovnání simulace se skutečnými průběhy laboratorního modelu. Sérií experimentů jsem tedy v Matlabu dospěl k těmto konečným hodnotám konstant gumového pásu

$$k_g = 10; \quad k_l = 10; \quad r_k = 10. \quad (4.28)$$

Blok pro rovnice **Protažení pásu** (3. a 4. rovnice z 3.28) je tedy možné modelovat takto - viz obr. 4.13.

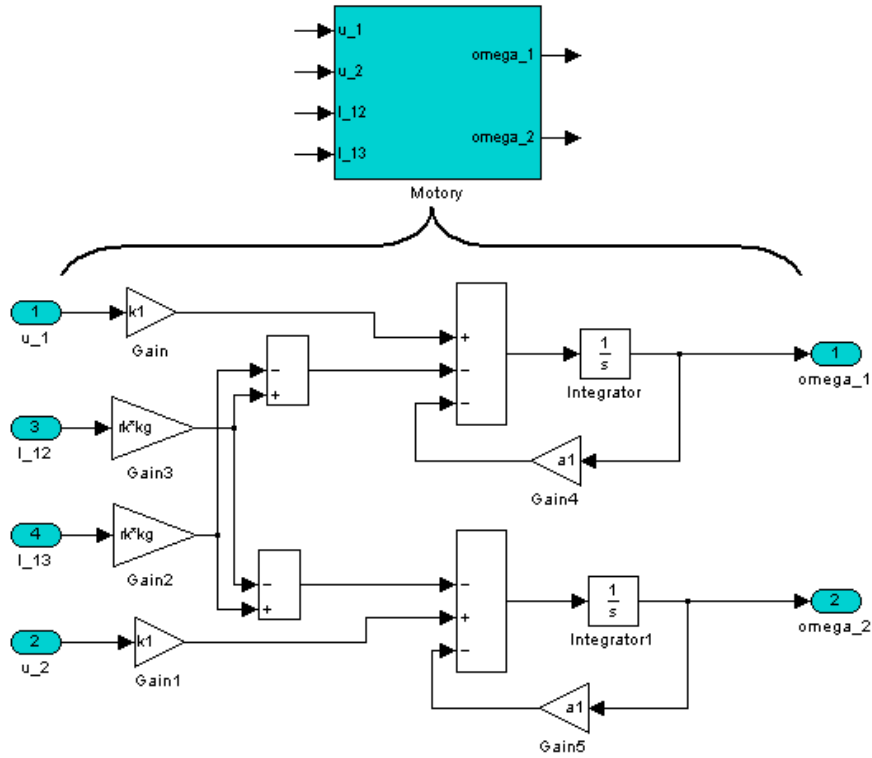


Obrázek 4.13: Vnitřní struktura bloku **Protažení pásu**

4.3 Kompletace identifikovaného modelu

Na předchozích stránkách byla provedena identifikace jednotlivých částí laboratorního modelu spojených pohonů CE108. Cílem bylo postupně nalézt konstanty stavového modelu, který byl sestaven na základě fyzikálních zákonů popisujících dynamiku systému. Nyní jednotlivé poznatky sloučíme a sestavíme tak celkový model MIMO systému spojených pohonů, který bude tvořit základ pro návrh řízení po celý zbytek práce.

Konstanty k_g a r_k , které jsou provázené s první a druhou rovnicí (rovnice motorů) modelu 3.28, jsem experimentálně zvolil již v 4.28. Vnitřní struktura bloku **Motory** je tedy již také známa a je rozkreslena na obr. 4.14.



Obrázek 4.14: Vnitřní struktura bloku **Motory**

Pokud bychom provedli **linearizaci systému** 3.28, který lze obecně popsat soustavou nelineárních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}\tag{4.29}$$

pomocí Taylorova rozvoje (například dle [9])

$$\begin{aligned}f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &\approx \\ &\approx f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \sum_{k=1}^{n_x} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (x_k(t) - x_{k0}) + \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (u_k(t) - u_{k0}),\end{aligned}\tag{4.30}$$

kde vektor $\mathbf{u}(t)$ je vektor n_u vstupů, $\mathbf{x}(t)$ je vektor n_x vnitřních stavů a $\mathbf{y}(t)$ je vektor n_y výstupů, dostame opět stejné rovnice jako jsou v 3.28. Pouze se bude jednat o odchylkový model ve tvaru

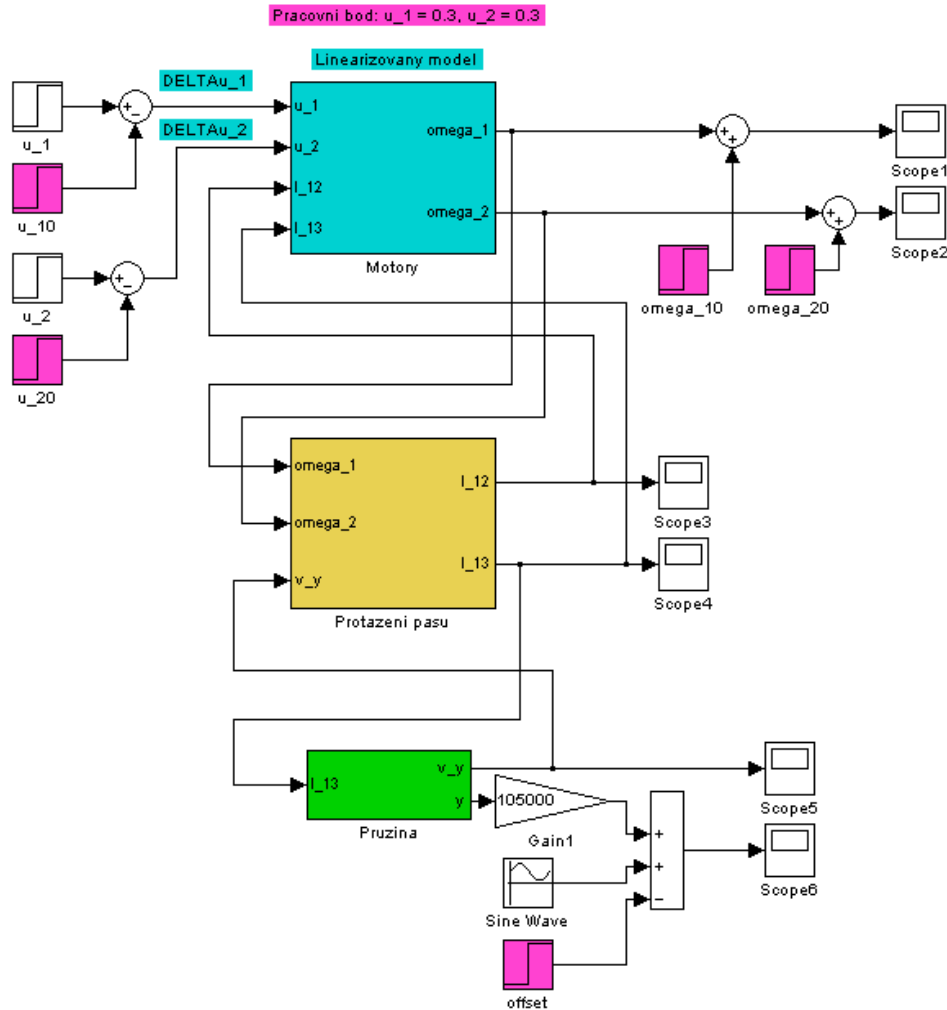
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(t), \quad (4.31)$$

$$\Delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}(t), \quad (4.32)$$

kde vektory odchylek jsou

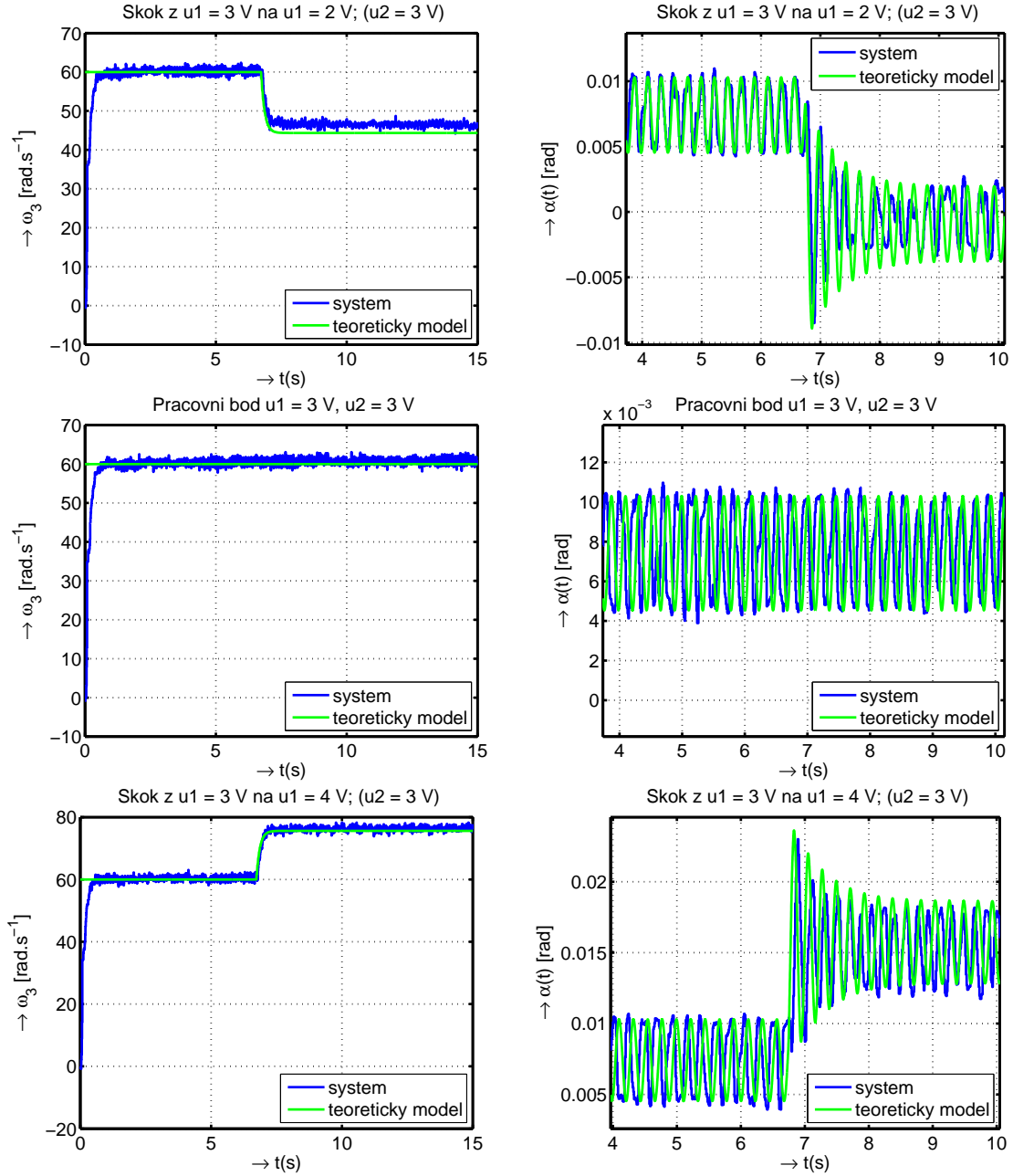
$$\Delta\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) - u_{10} \\ u_2(t) - u_{20} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{10} \\ x_2(t) - x_{20} \\ \vdots \\ x_6(t) - x_{60} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) - y_{10} \\ y_2(t) - y_{20} \\ y_3(t) - y_{30} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

A jak již bylo zmíněno v kapitole 4.2.1, díky složité matematicky popsatelnému prokluzování gumového pásu je nutné provozovat systém právě v okolí zvoleného **pracovního bodu** 4.15. Simulinkové zapojení celého teoretického (odchylkového) modelu spojených pohonů vztaheného k pracovnímu bodu 4.15 je na obr. 4.15.



Obrázek 4.15: Simulinkové zapojení modelu spojených pohonů

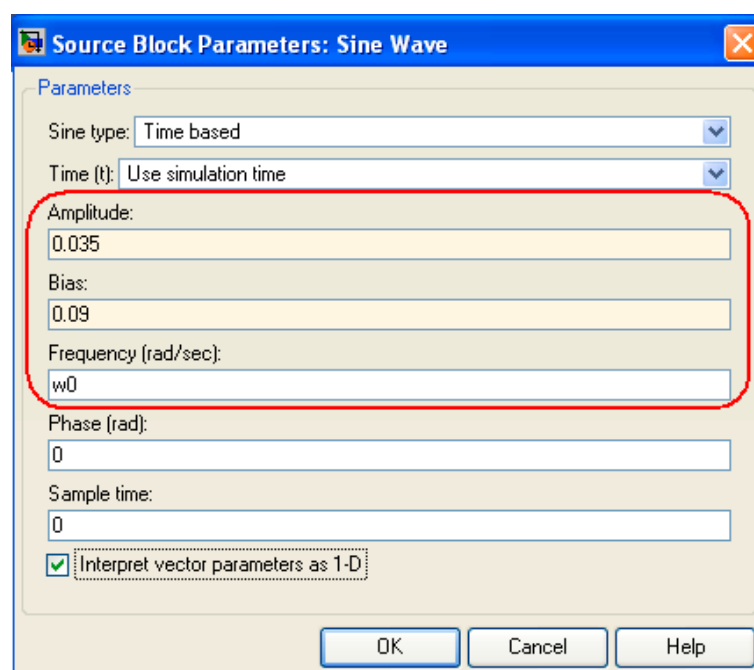
Model se skládá z již dříve popsaných bloků *Motory*, *Protažení pásu* a *Pružina*. Na obr. 4.16 je zobrazeno finální porovnání laboratorního modelu spojených pohonů s modelem teoretickým.



Obrázek 4.16: Ověření shody laboratorního a teoretického modelu (skoky u_1)

Ze všech průbehů je patrná velmi dobrá shoda teoretického modelu s laboratorním modelem CE108. To svědčí o poměrně dostatečném způsobu identifikace. Pouze je zde potřeba vysvětlit některé mírné korekce a nedostatky laboratorního modelu, díky kterým bylo nutné část teoretického modelu popisující chování pružiny nepatrně upravit (viz obr. 4.15):

1. Na všech průbězích úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$ (pravý sloupeček obr. 4.16) je patrný výrazný **netlumený harmonický pohyb** pružiny. Ten by ale podle teoretického modelu neměl vůbec nastávat. Podle matematického modelu by při přechodovém ději mělo dojít pouze k utlumení harmonických kmitů pružiny (viz obr. 4.11). Tento neblahý kmitavý pohyb je nejspíš způsoben tím, že se ve skutečnosti úplně přesně neshodují otáčky ω_1 a ω_2 . Tento jejich nesoulad pravděpodobně určitým způsobem přispěje ke chvění a rezonanci celého systému. Z tohoto důvodu je tedy i do matematického modelu na obr. 4.15 přidán blok *Sine Wave* (viz obr. 4.17) s amplitudou $0,035 [] \approx 2,884 \cdot 10^{-3}$ rad a frekvencí vlastních kmitů $\omega_0 = 28$ (viz. identifikace vlastností pružiny 4.24).
2. Dalším neblahým faktorem je výrazné **vychýlení ručky ramene z klidové polohy** i v případě, že se nacházíme v relativní klidové poloze při shodných otáčkách ω_1 a ω_2 , kdy $u_1 = u_2$. V takovém případě by teoreticky síly měly být vyrovnané a ručka ramene by měla být na 0° . Nejspíš ale díky ne úplně přesné konstrukci a nesymetrii laboratorního modelu tomu tak není. Proto je i tento offset klidové polohy přidán také do teoretického modelu v podobě ”matlabovské” hodnoty $0,09 [] \approx 7,416 \cdot 10^{-3}$ rad - viz obr. 4.17.

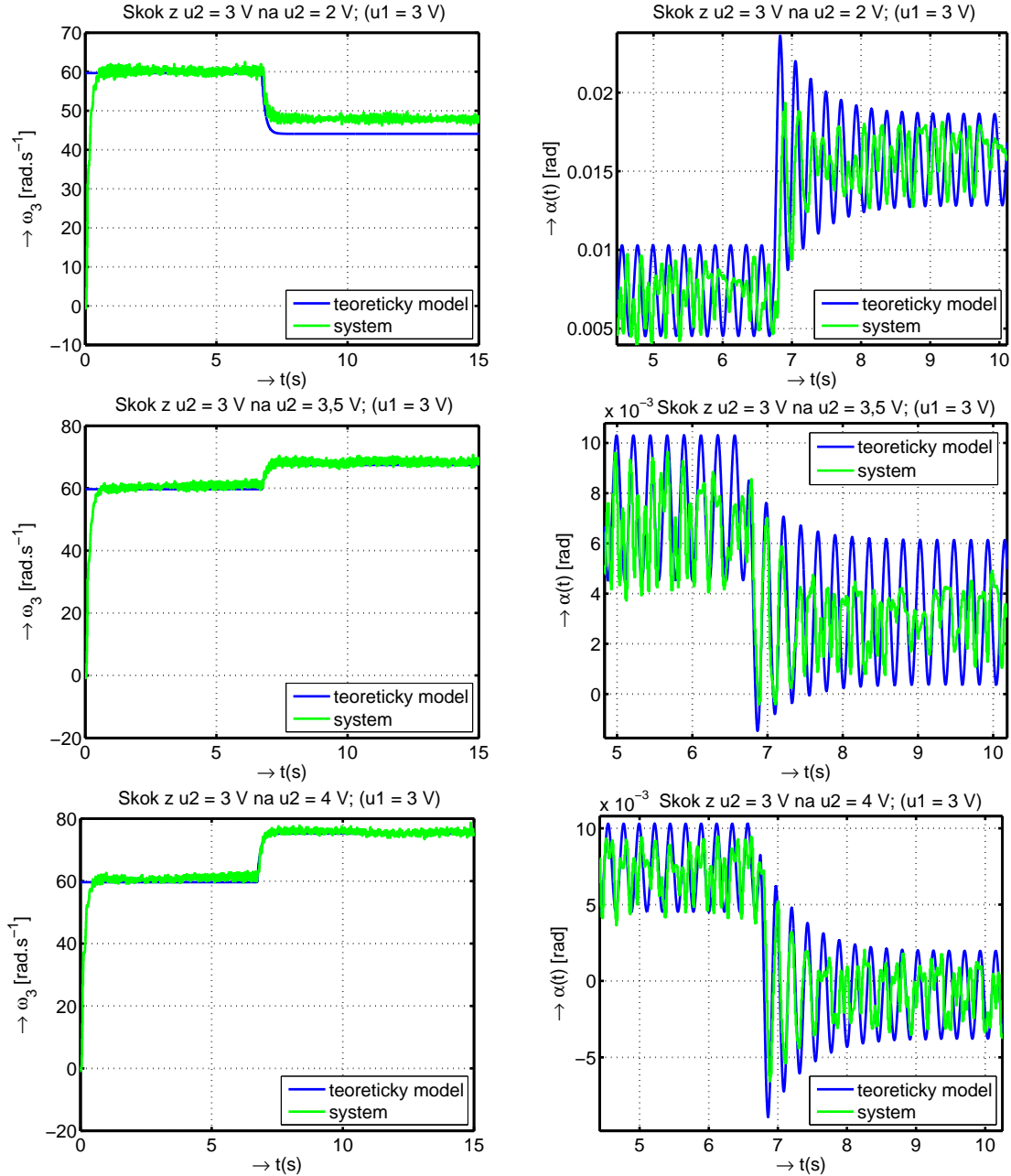


Obrázek 4.17: Nastavení parametrů bloku *Sine Wave* pro korekci vlastností pružiny

3. Posledním blokem modelu z obr. 4.15, který je třeba zmínit, je zesílení *Gain1*, který představuje konstantu c z výstupní matice matematického modelu 3.29 a slouží k nastavení zesílení v Matlabu pro shodu údaje úhlu vychýlení laboratorního modelu $\alpha(t) []$ a délkové výchylky teoretického modelu $y(t) []$. Poté již stačí pro přepočet

na radiány využít pouze převodu 4.10.

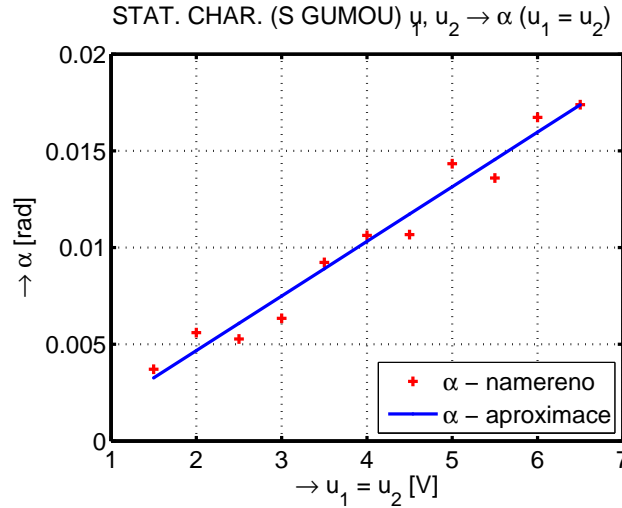
Podobné skoky vstupního napětí z pracovního bodu jako na obrázcích 4.16 může změřit i pro napětí u_2 - viz obr. 4.18.



Obrázek 4.18: Ověření shody laboratorního a teoretického modelu (skoky u_2)

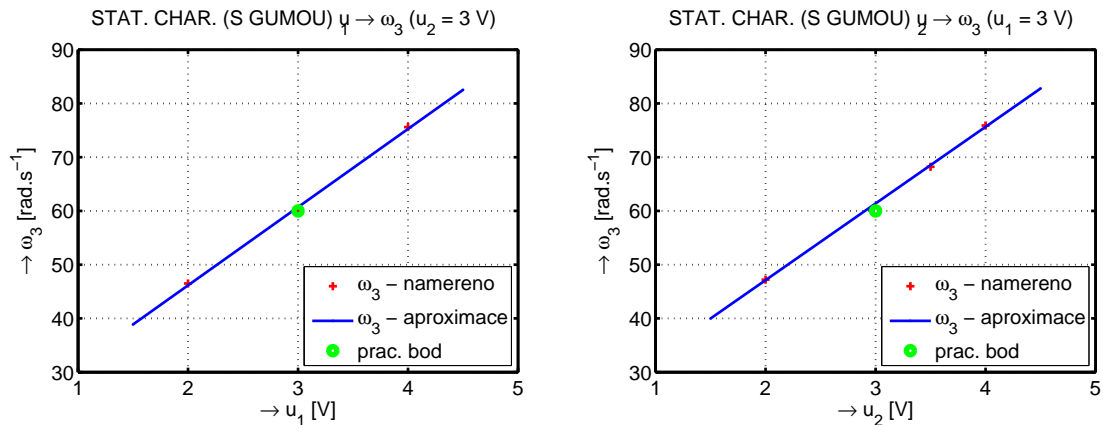
Pro výstupní veličinu $\omega_3(t)$ se odezvy přibližně shodují s obr. 4.16. Pro úhel vychýlení ramene opět poměrně dobře souhlasí teoretický model s modelem laboratorním. Ovšem výchylky ramene jsou samozřejmě z principu spojených pohonů v opačném směru oproti obr. 4.16.

Pro úplnost nyní také uvedu změřenou statickou převodní charakteristiku pro $u_1, u_2 \rightarrow \alpha$ ($u_1 = u_2$) - viz. obr. 4.19, kde se ustálená hodnota kmitů výchylky ramene $\alpha(t)$ odečítala poměrně obtížně. Proto jsou tyto hodnoty vyneseny formou bodů a proloženy přímkou. Je zde patrný offset úhlu z nulové hodnoty pracovního bodu o $7,416 \cdot 10^{-3}$ rad zmiňovaný v předchozím textu. Rovněž zde platí, že označení $u_1 = u_2$ u osy x nemusí nutně znamenat přesnou shodu napětí, ale zároveň tato charakteristika platí i pro **průměrnou hodnotu vstupních napětí**.

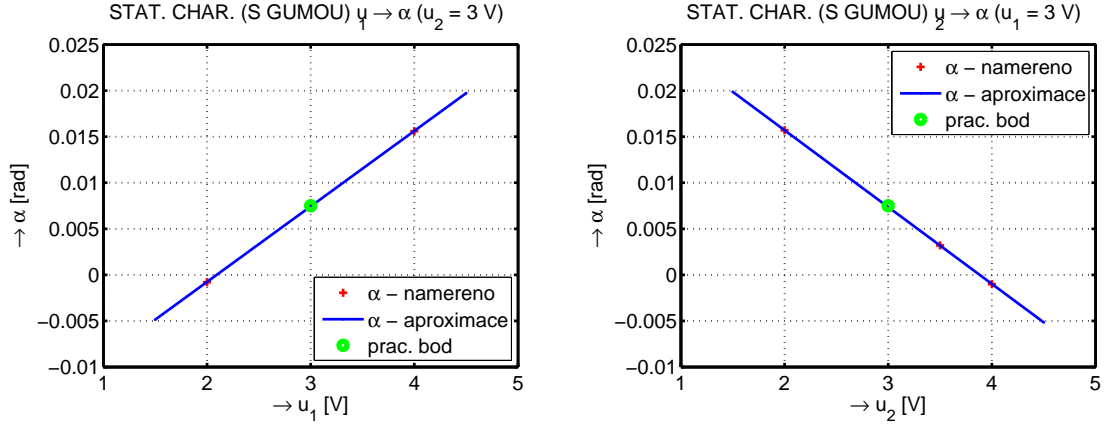


Obrázek 4.19: Statická charakteristika spojených pohonů pro úhel vychýlení ramene

Z charakteristik 4.16, 4.18 (nebo i za použití průměrných hodnot vstupních napětí z charakteristik 4.9 a 4.19) je dále možné vykreslit detail statických převodních charakteristik celého MIMO systému v okolí pracovního bodu pro obě výstupní veličiny (ω_3 a α) - viz obr. 4.20 a 4.21).



Obrázek 4.20: Statická charakteristika spojených pohonů pro otáčky - DETAIL



Obrázek 4.21: Statická charakteristika spojených pohonů pro úhel vychýlení ramene - DETAIL

Je vidět, že se vždy pohybujeme ve velmi malém okolí pracovního bodu 4.15. Důležité ale je, že tato oblast je lineární. Proměřovat vzdálenější okolí pracovního bodu nemá smysl, neboť již hnací otáčky obou motorů začínají být příliš rozdílné a dochází k prokluzování pásu. Tato lineární pracovní oblast z obrázků 4.20 a 4.21 bude velmi klíčová při pozdějších návrzích řízení laboratorního modelu a bude nám omezovat pracovní rozsah. Ze statické charakteristiky pro úhel α je opět patrný offset úhlu pracovního bodu.

Nyní se tedy můžeme podívat na konečnou číselnou podobu jednotlivých matic lineárního modelu (vztaženého k pracovnímu bodu 4.15), tj. dosazení námi identifikovaných hodnot do 3.29:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -7,692 & 0 & -1000 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -7,692 & 1000 & -1000 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & -10 & 0 & 1,732 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3,85 & -784 & -2,8 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 7,846 & 0 \\ 0 & 7,846 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 105000 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Nyní je možné v Matlabu z těchto matic vytvořit stavový systém pomocí příkazu

$$system = ss(A,B,C,D)$$

a z toho následně určit prvky této přenosové matice

$$\mathbf{G}(s) = \begin{matrix} & \begin{matrix} U_1(s) & U_2(s) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Omega_1(s) \\ \Omega_2(s) \\ Y(s) \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.35)$$

celého MIMO systému laboratorního modelu spojených pohonů. Tyto dílčí přenosy získáme v Matlabu například pomocí příkazu

$$G = tf(system).$$

Dostáváme tedy přenosové funkce z 1. vstupu na příslušné 3 výstupy

$$\begin{aligned} g_{11}(s) &= \frac{7,846s^5 + 239,2s^4 + 1,657 \cdot 10^5 s^3 + 2,191 \cdot 10^6 s^2 + 1,295 \cdot 10^8 s + 1,235 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}, \\ g_{21}(s) &= \frac{1,569 \cdot 10^5 s^3 + 2,009 \cdot 10^6 s^2 + 1,279 \cdot 10^8 s + 1,23 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}, \\ g_{31}(s) &= \frac{3,172 \cdot 10^7 s^2 + 5,612 \cdot 10^8 s + 2,44 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9} \end{aligned} \quad (4.36)$$

a přenosové funkce z 2. vstupu na příslušné 3 výstupy

$$\begin{aligned} g_{12}(s) &= \frac{1,569 \cdot 10^5 s^3 + 2,009 \cdot 10^6 s^2 + 1,279 \cdot 10^8 s + 1,23 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}, \\ g_{22}(s) &= \frac{7,846s^5 + 239,2s^4 + 1,657 \cdot 10^5 s^3 + 2,191 \cdot 10^6 s^2 + 1,295 \cdot 10^8 s + 1,235 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}, \\ g_{32}(s) &= \frac{-3,172 \cdot 10^7 s^2 - 5,612 \cdot 10^8 s - 2,44 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

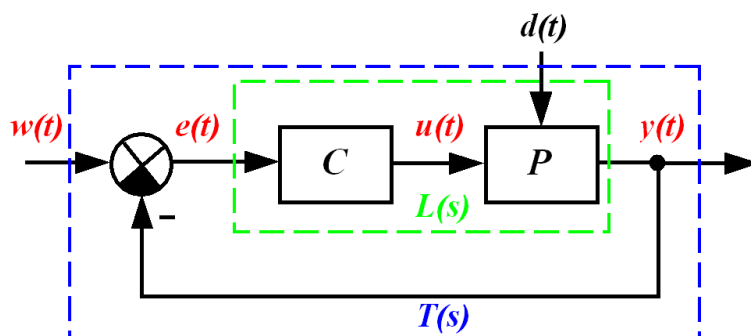
Na závěr této kapitoly zabývající se identifikací laboratorního modelu spojených pohonů je třeba ještě poznamenat, že neblahým faktorem, který poměrně výrazně ovlivňuje vlastnosti laboratorního modelu, je *okolní teplota*. Teplota má totiž také vliv na vlastnosti hnacích motorů a nepatrně také na chování pružiny. Chování teoretického modelu z obr. 4.15 se potom ne vždy úplně shoduje s chováním skutečného laboratorní modelu a jeho konstanty je potom nutné v tomto případě nepatrně upravit.

Kapitola 5

Regulace jednotlivých výstupů MIMO systému

Hlavním cílem, ke kterému v této práci směřujeme, je návrh co možná neefektivnějšího řízení pro laboratorní model spojených pohonů. V této kapitole se nebudeme snažit řídit model jako celek, ale zaměříme se nejprve na návrh regulátorů pro jednotlivé výstupní veličiny ("SISO přístup"). Budou zde použity dva poměrně rozdílné přístupy:

- "*Klasická teorie řízení*": Jedná se o zpětnovazební řízení se zápornou zpětnou vazbou (především návrh **PID** regulátorů). Schéma "klasického" zpětnovazebního obvodu je na obr. 5.1.
- "*Moderní teorie řízení*": Charakteristickou vlastností je využívání matematických modelů k popisu řízených procesů a převádění návrhu regulátorů na **optimalizační úlohu**. Z této oblasti budeme především využívat - kvadraticky optimální regulátor (**LQ** regulátor), stochasticky optimálního pozorovatele stavu (**Kalmanův filtr**) a zpětnou vazbu od výstupu stochastického systému (**LQG** regulátor).



Obrázek 5.1: Schéma klasického zpětnovazebního obvodu (regulační smyčka)

Pod pojmem *zpětnovazební obvod* [9] obvykle rozumíme regulační smyčku, která nejčastěji obsahuje dva základní členy: **regulovanou soustavu** P a **regulátor** C .

Dále se ve smyčce vyskytují signály:

$w(t)$... žádaná hodnota výstupu,

$e(t)$... regulační odchylka,

$u(t)$... akční zásah (výstup regulátoru, vstup soustavy),

$y(t)$... regulovaná veličina (výstupu soustavy),

$d(t)$... porucha (vstup soustavy).

Z regulačního obvodu na obrázku 5.1 je zřejmé, že regulační odchylka $e(t)$ se určí jako rozdíl žádané hodnoty a výstupu soustavy

$$e(t) = w(t) - y(t). \quad (5.1)$$

Na obrázku 5.1 je dále vyznačen **přenos otevřené smyčky** $L(s)$ v Laplaceově transformaci, který zahrnuje přenos regulační smyčky po rozpojení zpětné vazby

$$L(s) = P(s) \cdot C(s). \quad (5.2)$$

Veličinu $T(s)$, která označuje přenos z $w(t)$ na $y(t)$, potom nazýváme **přenosem uzavřené smyčky** nebo též **dolňkovou citlivostí**

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \quad (5.3)$$

Kvalitu regulace můžeme posuzovat například podle těchto několika ukazatelů a pojmů, které se mohou v textu dále vyskytovat [2]:

1. Z přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu:

- *Doba náběhu*

Určí se jako rozdíl okamžiků, kdy regulovaná veličina $y(t)$ dosahuje právě 10 % a 90 % ustálené hodnoty.

- *Doba ustálení*

Je doba, za kterou klesne rozdíl mezi regulovanou veličinou $y(t)$ a její ustálenou hodnotou $y(\infty)$ pod 5 %.

- *Maximální překmit*

2. Z frekvenční charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu:

- *Rezonanční převýšení*

Je název pro maximální hodnotu zesílení ve frekvenční charakteristice (v jednotkách dB).

- *Šířka přenášeného pásma*

Označuje frekvenci, na níž poklesne zesílení o 3 dB oproti zesílení na nízkých frekvencích.

- *Amplitudová bezpečnost*

Říká nám, kolikrát se ještě můžeme zvětšit zesílení v otevřené smyčce, než se uzavřený regulační obvod dostane na mez stability.

- *Fázová bezpečnost*

Říká nám, o jak velký úhel si můžeme dovolit zpozdít fázi v otevřené smyčce $L(j\omega)$ na frekvenci, pro kterou má přenos $L(s)$ jednotkové zesílení, než se tato fáze dostane na 180° a zpětnovazební systém ($T(s)$) se tak ocitne na hranici stability.

Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, nejprve se pro jednoduchost zaměříme na návrh řízení pro jednotlivé části laboratorního MIMO systému. A to na řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni a na řízení úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$. V prvních podkapitolách (5.1 a 5.2) se budu věnovat návrhu regulátorů z oblasti "klasická teorie řízení" a v dalších podkapitolách využiji pro návrh znalosti z oblasti "moderní teorie řízení".

5.1 Návrh PI regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni

Metod, jak navrhnout pro námi identifikovaný teoretický model spojených pohonů s daným přenosem v Laplaceově transformaci spojitý regulátor (PID), je v dnešní době několik. Může to být například

- Metoda umisťování pólů (GMK⁶),
- Frekvenční metoda návrhu,
- Specifická metoda založená na tvarování frekvenční charakteristiky (Loop-shaping),
- Kombinovaná metoda.

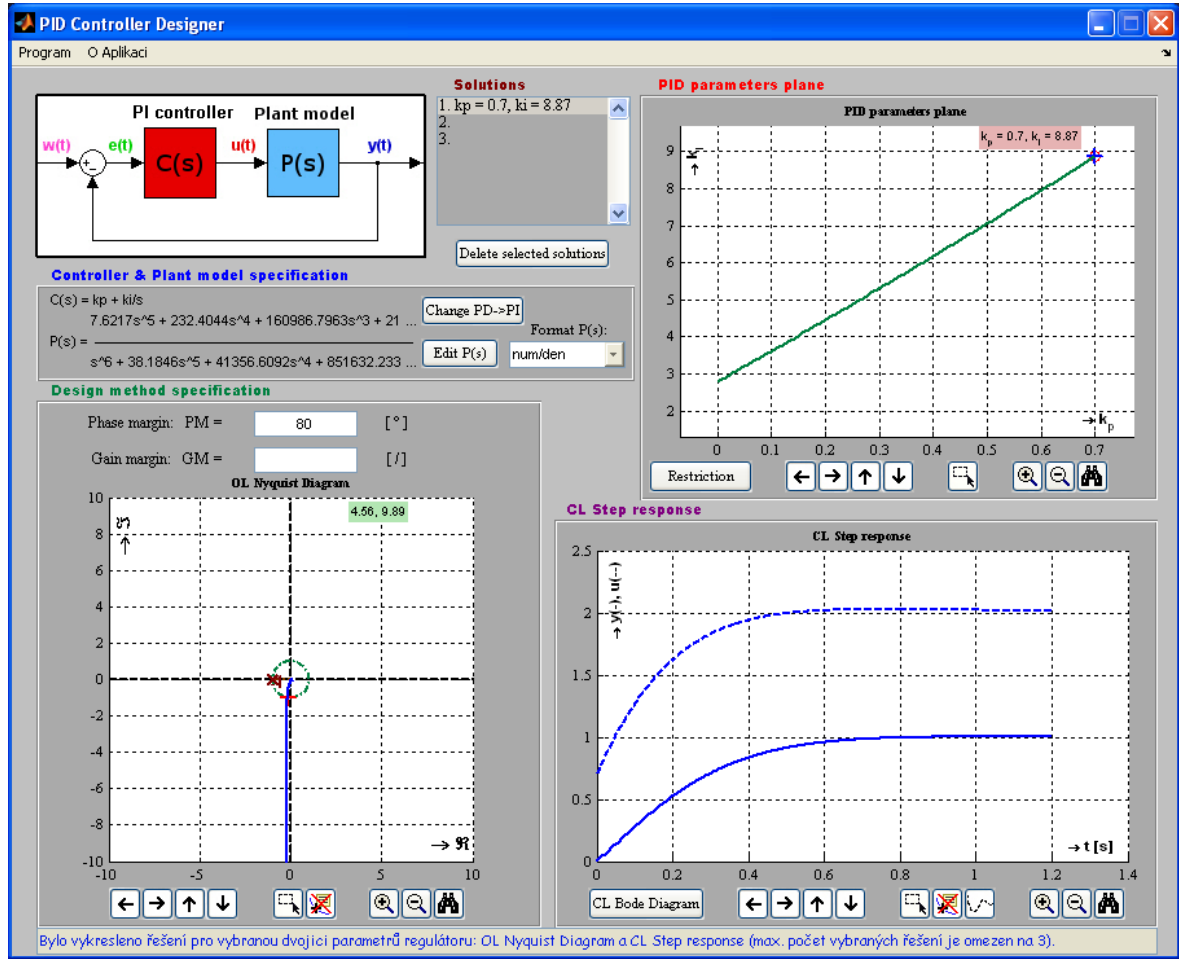
Já si nejprve v tomto případě zvolím metodu návrhu spojitýho regulátoru pomocí aplikace vytvořené v rámci bakalářské práce [10]. Stručně řečeno, metoda návrhu je v této aplikaci založena na principu tvarování frekvenční charakteristiky otevřené smyčky $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$ na základě tvarujících bodů odpovídajících zadané **amplitudové** či **fázové bezpečnosti**.

Při návrhu PI regulátoru vycházíme ze znalosti spojitýho přenosu řízené soustavy. Protože z předchozí identifikace (kapitola 4.1.3) laboratorního modelu víme, že se údaje ze senzorů všech tří měřených úhlových rychlostí ω_1 , ω_2 a ω_3 přibližně shodují, můžeme použít první přenos $g_{11}(s)$ z přenosové matice 4.35, tedy přenos z napětí prvního motoru M1 na úhlovou rychlost ω_1 (tj. první rovnici z výrazu 4.36)

⁶geometrické místo kořenů (též anglicky RL - **R**oot **L**ocus)

$$P_1(s) = \frac{7,846s^5 + 239,2s^4 + 1,657 \cdot 10^5 s^3 + 2,191 \cdot 10^6 s^2 + 1,295 \cdot 10^8 s + 1,235 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}. \quad (5.4)$$

Tento přenos 5.4 se zadává do aplikace jako jeden ze vstupních parametrů formou koeficientů čitatele a jmenovatele - viz obr. 5.2.



Obrázek 5.2: Aplikace PID Controller Designer pro návrh PI regulátoru pro řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ horní kladky

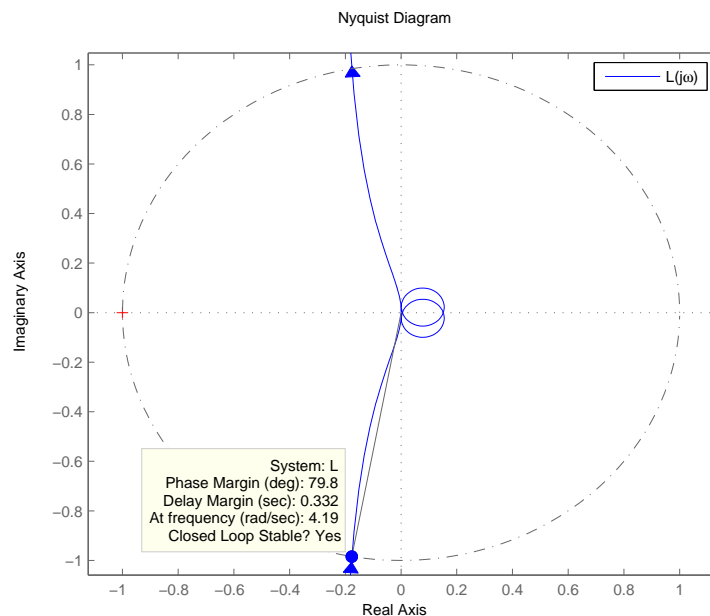
Jako vstupní parametr aplikace vystihující kvalitu regulace jsem si zvolil fázovou bezpečnost $PM = 80^\circ$. Na obrázku 5.2 v pravém horním rohu (oblast "PID parameters plane") je zobrazena parametrická křivka pro parametry k_p a k_i , která odpovídá zvolené fázové bezpečnosti. Na této křivce je možno si zvolit parametry k_p a k_i pro vhodnou rychlost odezvy a především danou velikost překmitu regulované veličiny $\omega_3(t)$. Při návrhu řízení dané soustavy je zároveň nutné a velmi důležité myslet na omezující podmínky pro vstupní a výstupní veličiny reálného laboratorního modelu. Jelikož jsem v mém případě

zvolil téměř minimální překmit regulované veličiny⁷ a budu se při řízení modelu pohybovat pouze v určitém menším okolí zvoleného pracovního bodu (viz 4.15), je pro mne úvaha nad reálnými omezeními veličin již vyřešena. Důležité je si uvědomit, že navrhujeme řízení pro odchylový model (4.31). A tomu musíme tedy přizpůsobit i simulinkové schéma jednak pro teoretický model a jednak pro reálný laboratorní systém.

Parametry zvoleného **PI regulátoru** jsou tedy tyto:

$$k_p = 0,7; \quad k_i = 8,87 \Rightarrow \quad C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = 0,7 + \frac{8,87}{s}. \quad (5.5)$$

Pro kontrolu správnosti návrhu PI regulátoru pro zvolenou fázovou bezpečnost se můžeme přesvědčit obrázkem 5.3, na kterém je vykreslena Nyquistova křivka otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ s navrženým PI regulátorem. Fázová bezpečnost skutečně splňuje náš zvolený požadavek $PM = 80^\circ$.



Obrázek 5.3: Nyquistova křivka otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ s navrženým PI regulátorem

Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ horní kladky spojených pohonů pomocí navrženého PI regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.1 (simulace) a A.2 (reálný systém). Ve schématu A.2 je možné si všimnout jednak bloku zesílení **Gain** (0.92373), o kterém už je ale zmínka v kapitole 4.1.3, ale především je zde i blok **Lowpass digital elliptic filter**, díky kterému je na výstup regulované veličiny $\omega_3(t)$ aplikována filtrace. Bez filtrace je totiž výstupní signál velmi zašuměný. To by znesnadňovalo samotnou regulaci, v akční veličině by se šum rovněž projevoval a

⁷i tak je rychlost odezvy při řízení velmi uspokojivá

následkem by bylo mnoho zbytečných změn při akčním zásahu PI regulátoru. Proto jsem se rozhodl do regulačního obvodu přidat filtr typu dolní propust, který vysokofrekvenční šum potlačí. Zvolil jsem si přímý návrh eliptického IIR⁸ filtru v Matlabu [12] pomocí příkazu *ellip*.

```
%Vstupni parametry eliptickeho filtru
Ts=1e-4
n=5
rp=1
wn=0.11
rs=20
%Navrh koeficientu a,b
[b,a]=ellip(n,rp,rs,wn)
%Vytvoreni prenosove fce
iir=tf(b,a,Ts)

%Vykresleni frekvencnich charakteristik filtru
freqz(b,a);
```

Obrázek 5.4: Návrh eliptického filtru typu dolní propust pomocí Matlabu

Celý návrh filtru pomocí Matlabu je uveden na obrázku 5.4, kde

- **Vstupními parametry jsou:**

T_s ... perioda vzorkování,

n ... řád filtru (dále jen n),

wn ... normovaný mezní (hraniční, kritický, zlomový) kmitočet - pokles o 3 dB,

rp ... zvlnění v propustném pásmu (passband ripple) (dále jen rp),

rs ... odstup nepropustného pásma (stopband ripple) (dále jen rs),

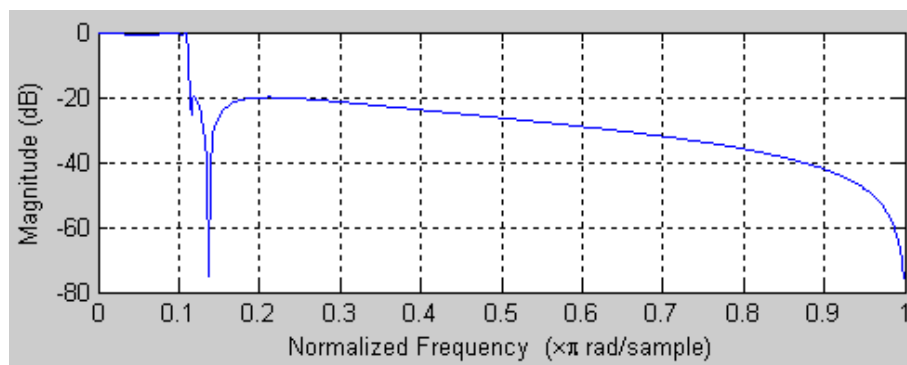
- **Výstupními parametry jsou:**

b ... vektor koeficientů vstupních vzorků standardní diferenční rovnice,

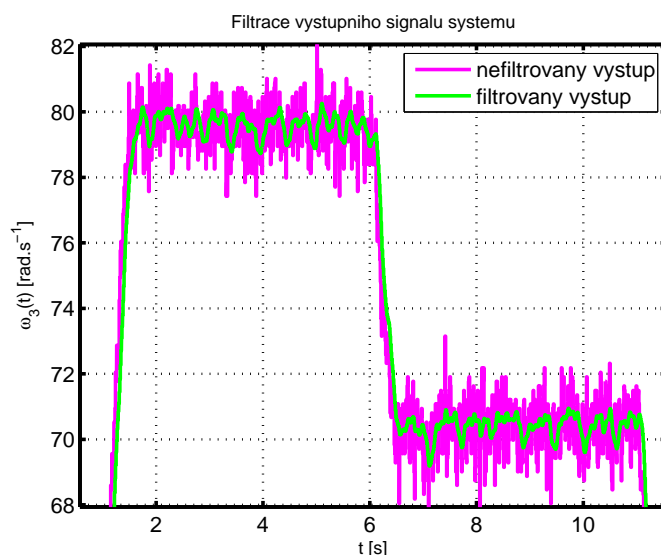
a ... vektor koeficientů výstupních vzorků standardní diferenční rovnice.

Posledním příkazem z obrázku 5.4 vykreslíme amplitudovou frekvenční charakteristiku navrženého filtru - viz obr. 5.5. Na obrázku 5.6 je zobrazen detail filtrace výstupního signálu $\omega_3(t)$ při regulaci. Je zde vidět, že zpoždění signálu po filtraci je téměř minimální, a o to nám šlo při návrhu filtru především.

⁸Infinite Impulse Response = Filtr s nekonečnou impulzní odezvou



Obrázek 5.5: Amplitudová frekvenční charakteristika navrženého filtru - elliptic IIR, dolní propust, $\omega_n = 0,11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 0,0175 \text{ Hz}$

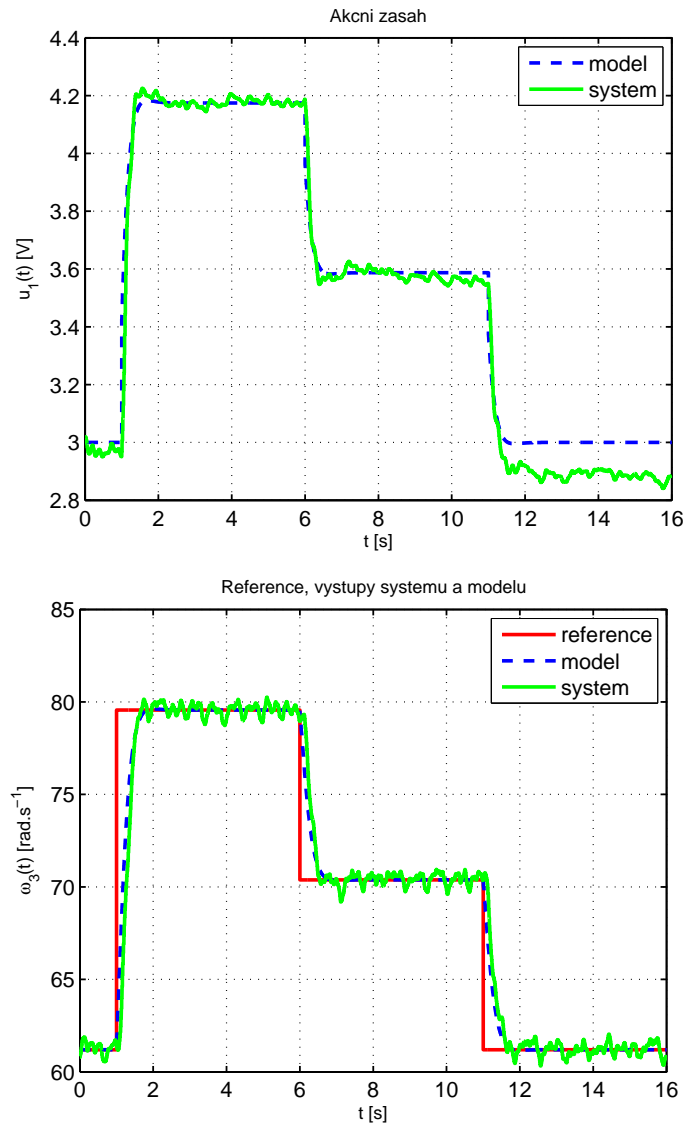


Obrázek 5.6: Detail filtrace výstupního signálu $\omega_3(t)$

Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni spojených pohonů a matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého PI regulátoru je zachycen na obrázku 5.7.

Na závěr této kapitoly si dovoluji ještě několik poznámek. Jde především o výběr a uplatnění jednotlivých složek PID regulátoru. Jistě víme, že s roustoucím zesílením k_p roste rychlost přechodového děje, tím pádem ale i velikost akčního zásahu. Větší integrační složka nám zase přechodový děj zpomalí, ale zaručí nám nulovou trvalou regulační odchylku. A to je velice podstatné. Derivační složka má zase schopnost rychle reagovat na změny regulační odchylky $e(t)$, tím pádem i změny žádané hodnoty $w(t)$. Jednou z nepříjemných vlastností "D složky" je ale zesilování a citlivost na vysokofrekvenční šumy. A ty, jak jsme si mohli všimnout např. na obr. 5.7, jsou v této regulační úloze poměrně

výrazné. Proto bezpečně postačí i vhodně nastavená složka P a I a derivační složku není třeba využívat.



Obrázek 5.7: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni pomocí *PI regulátoru*

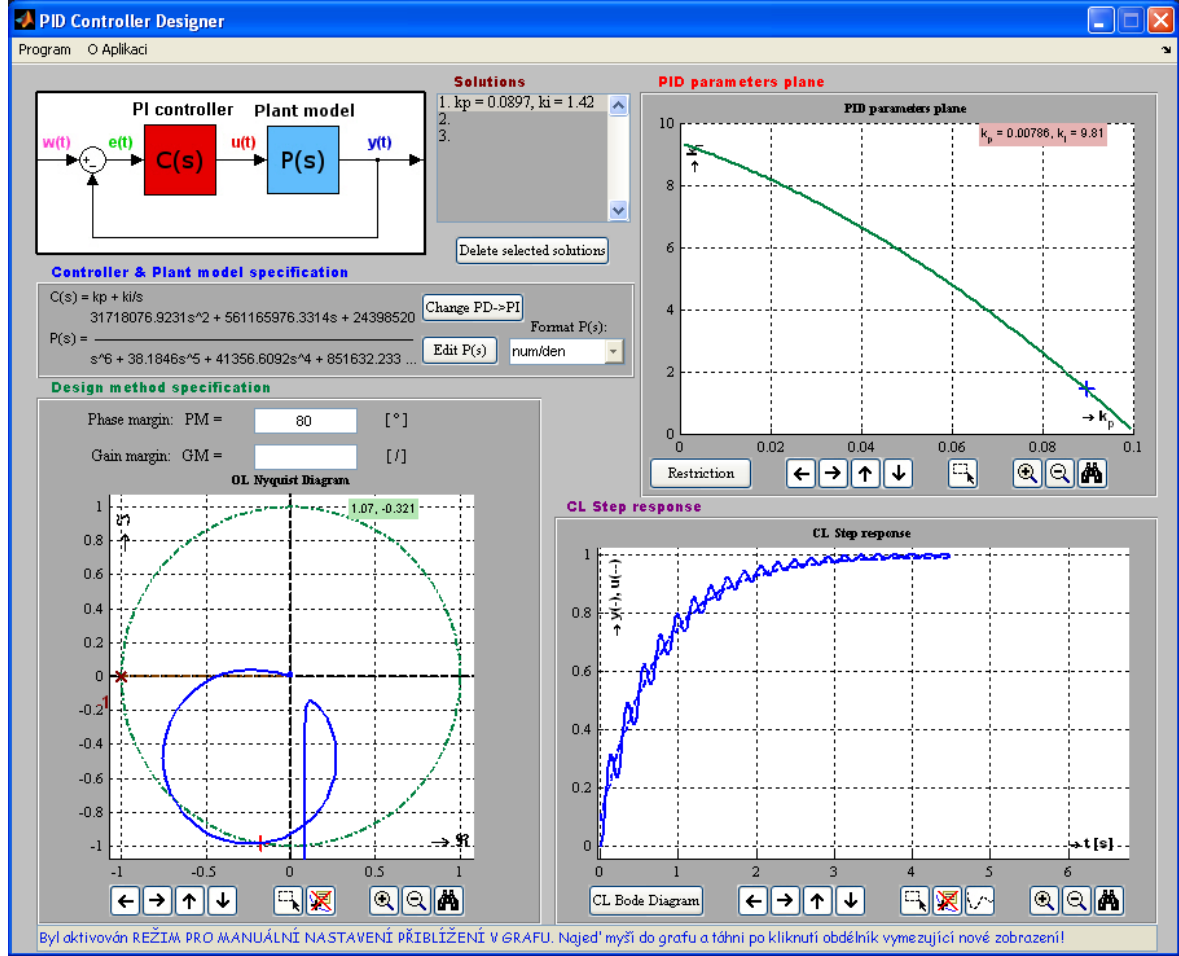
5.2 Návrh PI regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene

Návrh řízení v této části bude velmi podobný předchozí kapitole. Regulovanou veličinou již ale nebude úhlová rychlost kladky na pohyblivém rameni, nýbrž úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$. K návrhu PI regulátoru využijeme rovněž stejné aplikace. Nyní budeme ovšem navrhovat regulátor pro přenos $g_{31}(s)$ z přenosové matice 4.35, tedy přenos z napětí prvního

motoru M1 na výchylku $y \approx \alpha$ (tj. třetí rovnici z výrazu 4.36)

$$P_2(s) = \frac{3,172 \cdot 10^7 s^2 + 5,612 \cdot 10^8 s + 2,44 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18 s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}. \quad (5.6)$$

Tento přenos zadáme opět do aplikace jako jeden ze vstupních parametrů formou koeficientů čitatele a jmenovatele a zvolíme opět jako parametr aplikace vystihující kvalitu regulace fázovou bezpečnost $PM = 80^\circ$ - viz obr. 5.8.



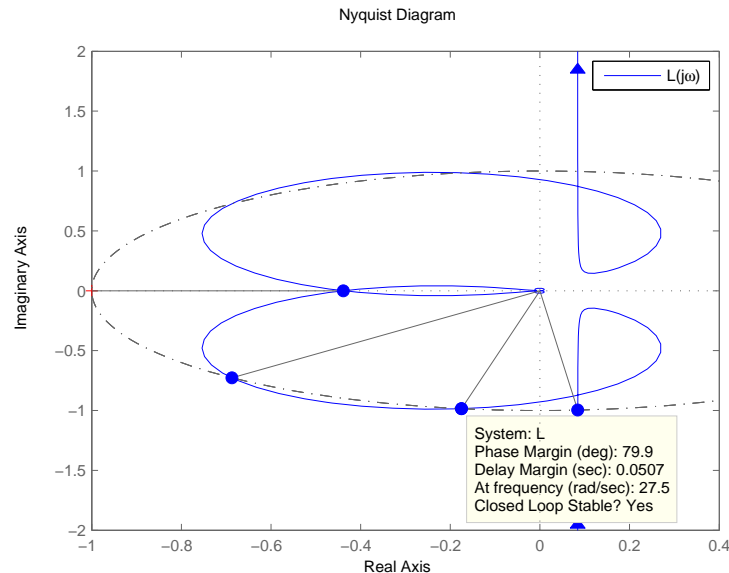
Obrázek 5.8: Aplikace PID Controller Designer pro návrh PI regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$

Parametry k_p a k_i jsem na parametrické křivce opět zvolil tak, aby nastával nulový překmit regulované veličiny a přesto byla rychlost odezvy stále plně dostačující. Nad maximálními možnými hodnotami vstupních veličin laboratorního modelu už potom tedy není nutné uvažovat (pohyb v malém okolí pracovního bodu + nulový překmit regulované veličiny) a omezení jsou tedy splněna.

Parametry zvoleného **PI regulátoru** jsou tedy tyto:

$$k_p = 0,0897; \quad k_i = 1,42 \Rightarrow \quad C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = 0,0897 + \frac{1,42}{s}. \quad (5.7)$$

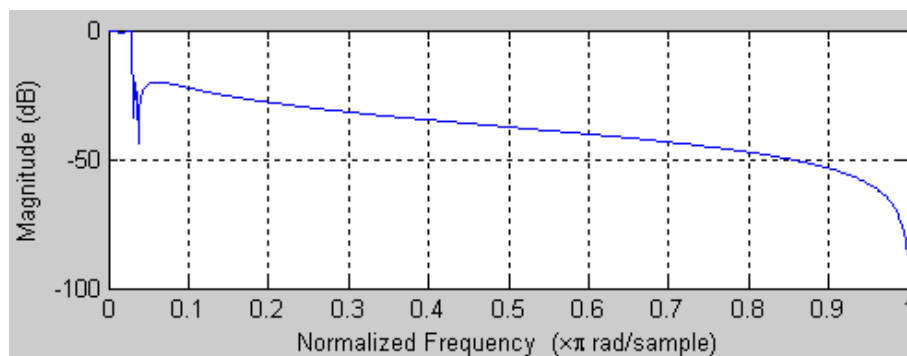
Pro kontrolu správnosti návrhu PI regulátoru pro zvolenou fázovou bezpečnost se můžeme opět přesvědčit obrázkem 5.9, na kterém je vykreslena Nyquistova křivka otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ s navrženým PI regulátorem. Fázová bezpečnost skutečně splňuje náš zvolený požadavek $PM = 80^\circ$.



Obrázek 5.9: Nyquistova křivka otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ s navrženým PI regulátorem

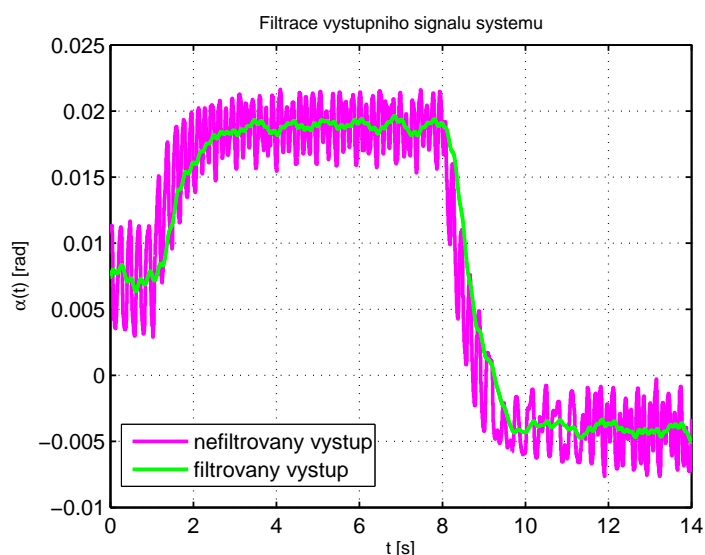
Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$ spojených pohonů pomocí navrženého PI regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.3 (simulace) a A.4 (reálný systém). V A.4 a nově i v A.3 je možné si opět bloku **Lowpass digital elliptic filter**, díky kterému je na výstup regulované veličiny $\alpha(t)$ aplikována filtrace. Tu je nyní potřeba nově přidat i do regulačního obvodu pro simulaci, neboť je potřeba se fitrem zbavit parazitních netlumených kmitů⁹. V tomto případě je tedy filtrace nutná. Bez filtrace by akční veličina začala oscilovat v rytmu oscilace výstupní veličiny a regulační obvod by se mohl stát nestabilní. Přidaný parazitní oscilační člen totiž není u modelu soustavy při návrhu PI regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene vůbec brán v úvahu! Navrhnul jsem proto opět filtr typu dolní propust, který eliminuje jak vysokofrekvenční šum, tak zmiňované netlumené oscilace. Přímý návrh eliptického IIR filtru v Matlabu [12] pomocí příkazu **ellip** provedeme naprosto stejným způsobem jako na obrázku 5.4, liší se pouze vstupní parametr pro zlomový kmitočet - nově $\omega_n = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Posledním příkazem z obrázku 5.4 vykreslíme amplitudovou frekvenční charakteristiku navrženého filtru - viz obr. 5.10.

⁹ty se vyskytují jak u reálného laboratorního modelu, tak byly přidány do teretického simulačního modelu (viz kapitola 4.3)



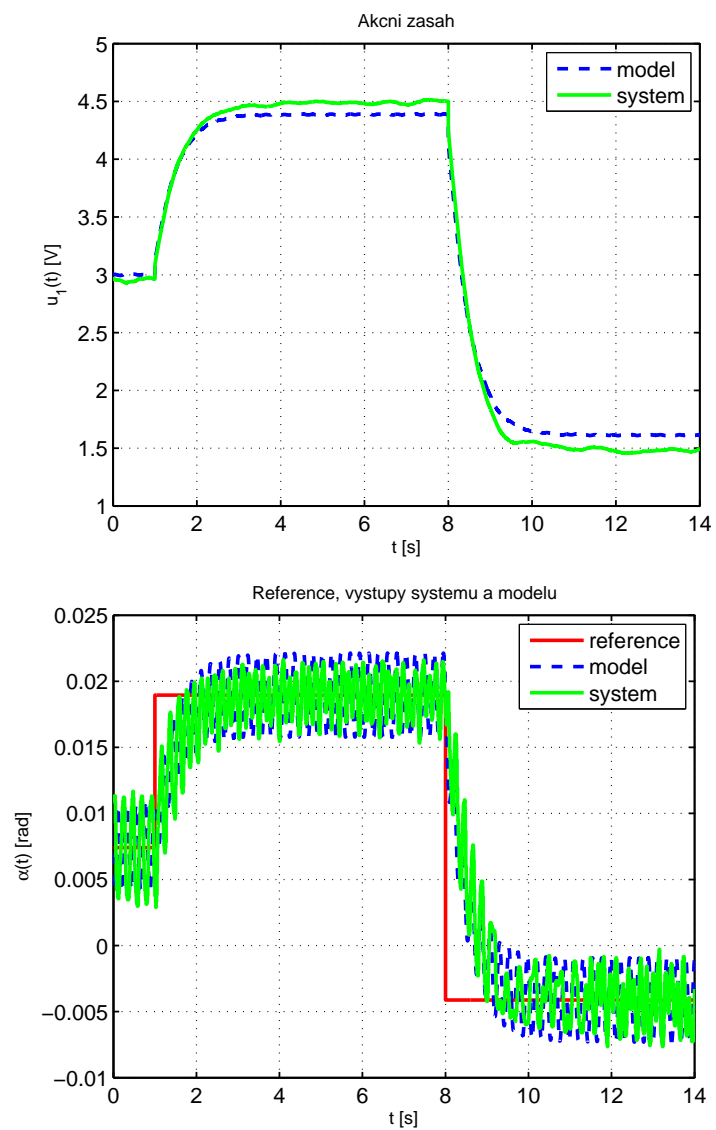
Obrázek 5.10: Amplitudová frekvenční charakteristika navrženého filtru - elliptic IIR, dolní propust, $\omega_n = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 0,00477 \text{ Hz}$

Na obrázku 5.6 je zobrazena filtrace výstupního signálu $\alpha(t)$ při regulaci. Je zde vidět, že zpoždění signálu po filtraci je opět téměř minimální a nevznáší tak příliš velké zpoždění do regulačního obvodu.



Obrázek 5.11: Filtrace výstupního signálu $\alpha(t)$

Průběh regulace úhlu vychýlení $\alpha(t)$ spojených pohonů a matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého PI regulátoru je zachycen na obrázku 5.12.



Obrázek 5.12: Průběh regulace úhlu vychýlení $\alpha(t)$ ramene pomocí *PI regulátoru*

5.3 Návrh LQ regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni

V této chvíli již opustíme oblast "klasické teorie řízení" a pustíme se do návrhu řízení z oblasti "moderní teorie". Konkrétně budeme navrhovat **LQ regulátor** pro řízení úhlové rychlosti horní kladky laboratorního modelu. Jak je již vysvětleno na začátku práce v "Seznamu použitých zkratk", označení **LQ** nám vyjadřuje, že se bude jednat o návrh kvadraticky optimálního regulátoru pro lineární systém. Takový návrh pro nalezení optimálního řízení zahrnuje nalezení řešení nějakého optimalizačního problému. V případě LQ regulátoru to bude minimalizace nějakého kvadratického kritéria. V takovém kritériu potom mohou být velmi vhodně zahrnuty určité požadavky na kvalitu regulace (minimalizace vstupních, výstupních či jiných veličin regulačního obvodu). Ještě na dovysvětlení - podle stavu systému rozeznáváme 2 případy:

- stav *je přímo měřitelný* = **LQR řízení** (zpětná vazba od stavu)
- stav *není přímo měřitelný* = **LQG řízení** (zpětná vazba od výstupu + odhad stavu systému)

LQ regulátor sám o sobě je **zpětnovazební stavový** regulátor, který "nuluje" (stabilizuje či minimalizuje) stavy systému podle kritéria

$$\begin{aligned} J(u_0^{N-1} | \mathbf{x}(0)) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde u_0^{N-1} je aplikovaná posloupnost řízení za předpokladu, že začínáme řídit z nějakého počátečního stavu $\mathbf{x}(0)$, první součtový člen představuje tzv. cenu koncového stavu a druhý člen cenu všech předchozích stavů a řízení. Matice \mathbf{Q} je pozitivně semidefinitní váhová matice stavů a matice \mathbf{R} pozitivně definitní váhová matice vstupů.

V případě kvadraticky optimálního řízení potom řešíme optimalizační úlohu typu:

$$\mathbf{u}^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} J. \quad (5.9)$$

Tu můžeme dle literatury [11] díky znalosti **principu optimality** a využitím operace **doplnění na úplný čtverec** postupnými úpravami vyřešit. Dostaneme tedy potom minimum kritéria 5.8, což bude představovat optimální řízení ve tvaru

$$\mathbf{u}^*(k) = - \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{x}(k), \quad (5.10)$$

kde

$$\mathbf{K}(k) = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A} \quad (5.11)$$

je tzv. **Kalmanovo zesílení**, $\mathbf{P}(k)$ je tzv. matice kvadratické formy a udává optimální hodnotu kritéria 5.8 a matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou matice stavového modelu diskrétního stabilizovatelného dynamického systému. Optimální zákon řízení 5.10 tedy vede na stavovou zpětnou vazbu. Optimální hodnota kritéria $\mathbf{P}(k)$ se nazývá **diferenční Riccatiho rovnice** a má tento tvar

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B} \mathbf{K}(k). \quad (5.12)$$

Rovnici 5.12 potom řešíme zpětnou rekurzí (iterací) v čase s koncovou podmínkou $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}$. Pokud Kalmanovo zesílení $\mathbf{K}(k)$ konverguje k nějaké limitní hodnotě, potom platí

$$\mathbf{P}(k) \rightarrow \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}(k) \rightarrow \mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (5.13)$$

Získáme tak časově neměnný LQ regulátor, který má stejnou strukturu jako běžná stavová zpětná vazba. LQ řízení může tedy stabilizovat libovolnou - i vícerozměrovou (MIMO) soustavu. To se nám bude hodit především při návrhu řízení pro celkový MIMO systém spojených pohonů CE108 v kapitole 6.2. Dále je možné poznamenat, že všechny stabilizující regulátory jsou parametrizovány maticemi kritéria \mathbf{Q} a \mathbf{R} . Volbou těchto matic potom dochází k "ladění" regulátoru.

Naší cílem ale není stabilizovat stavy systému do počátku (to je úloha LQ regulace - stav systému $\mathbf{x}(k) \rightarrow \mathbf{0}$), ale optimálně **sledovat** určitou trajektorii $w(k)$ (výstup systému $y(k) \rightarrow w(k)$). Bude tedy muset klasickou úlohu LQ regulace poměrně zmodifikovat. Úloze **kvadraticky optimálního sledování** se potom říká **kvadraticky optimální servo-mechanismus**, kdy referenční trajektorie je generována lineárním dynamickým systémem¹⁰.

Jelikož v našem případě navrhujeme řízení v diskrétní oblasti s periodou vzorkování $T_s = 0,01$ s, provedeme nejprve diskretizaci identifikovaného přenosu $P_1(s)$ (5.4) pro úhlovou rychlost. Obecně zapsaný stavový popis tohoto diskretizovaného systému vypadá takto:

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d u(k), \quad (5.14)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k). \quad (5.15)$$

Hlavní změnou oproti předchozí LQ regulaci bude formulace nového kritéria optimality. Cílem bude do kritéria 5.8 zahrnout výstup systému $y(k)$, který má (na zvoleném horizontu délky N) sledovat konstantní referenční signál $w(k)$. Protože víme, že pro regulační obvod platí

$$e(k) = w(k) - y(k), \quad (5.16)$$

můžeme nové kritérium definovat takto

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{e^T(k) \mathbf{Q}' e(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}' \mathbf{u}(k)\}, \quad (5.17)$$

¹⁰existuje také úloha **kvadraticky optimálního programového řízení**, kde je ale referenční trajektorie dána předem jako funkce času

kde \mathbf{Q}' je váhová matice regulační odchylky a \mathbf{R}' je "nová" váhová matice vstupů.

V úloze kvadraticky optimálního servomechanismu je tedy referenční trajektorie $w(k)$ dána jako výstup lineárního dynamického systému. Tento systém je možné jakožto generátor referenčního signálu zapsat takto¹¹

$$x_w(k+1) = x_w(k), \quad (5.18)$$

$$w(k) = x_w(k). \quad (5.19)$$

Do vztahu pro regulační odchylku 5.16 je potom možné dosadit z 5.15 takto

$$e(k) = w(k) - y(k) = w(k) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d u(k). \quad (5.20)$$

Pro **odstranění trvalé regulační odchylky**, která může vznikat z důvodu nějaké neurčitosti v systému, bude nutné rozšířit původní diskretizovaný systém (rovnice 5.14) ještě o integrační složku, tj. **sumátor regulační odchylky**, jehož diskrétní stavové rovnice lze zapsat takto

$$x_{sum}(k+1) = x_{sum}(k) + e(k) = x_{sum}(k) + x_w(k) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d u(k), \quad (5.21)$$

$$y_{sum}(k) = x_{sum}(k). \quad (5.22)$$

Výsledná úloha **kvadraticky optimálního servomechanismu** tedy nakonec bude zahrnovat tyto 3 hlavní části:

- diskrétní stavový model regulované soustavy
- generátor referenčního signálu
- sumátor regulační odchylky

Z důvodu rozšíření systému o sumátor regulační odchylky je nutné přidat do kritéria 5.17 ještě další člen

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ e^T(k) \mathbf{Q}' e(k) + y_{sum}^T(k) \mathbf{Q}_{sum} y_{sum}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}' \mathbf{u}(k) \right\}, \quad (5.23)$$

kde \mathbf{Q}_{sum} je váhová matice regulační odchylky.

Pro náš případ tedy na závěr zkompletujeme matice **"super rozšířeného systému"** (kompletace stavových rovnic). Pro tento stavový vektor

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ x_w(k) \\ x_{sum}(k) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

tedy máme systém

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k), \quad (5.25)$$

¹¹jedná se vlastně o diskrétní integrátor

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ -\mathbf{C}_d & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ 0 \\ -\mathbf{D}_d \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Jelikož umíme najít pouze minimum kritéria ve tvaru 5.8 (standardní problém kvadraticky optimálního regulátoru), musíme nejprve i kritérium 5.23 převést do této formy. Jedině v tomto tvaru totiž umíme nalézt řešením diferenční Riccatiho rovnice 5.12 optimální zákon řízení 5.10. Do kritéria pro kvadraticky optimální sledování 5.23 tedy dosadíme z 5.20 a dostáváme

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (\mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k) - x_w(k))^T \mathbf{Q}' (\mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k) - x_w(k)) + \dots \right\}. \quad (5.27)$$

Po dalších úpravách dostáváme standardní tvar kritéria LQ regulátoru:

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & u^T(k) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}' \mathbf{C}_d & -\mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}' \mathbf{C}_d & \mathbf{Q}' & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{Q}_{sum} & 0 \\ \hline \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{D}_d^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}_d + \mathbf{R}' \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.28)$$

kde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}' \mathbf{C}_d & -\mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}' & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}' \mathbf{C}_d & \mathbf{Q}' & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{Q}_{sum} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{D}_d^T \mathbf{Q}' \mathbf{D}_d + \mathbf{R}' \quad (5.29)$$

jsou váhové matice stavů a vstupu. Řešením pomocí iterativního výpočtu Kalmanova zesílení 5.11 a Riccatiho rovnice 5.12 pro náš konkrétní případ spojených pohonů nyní získáváme tyto matice

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

které použijeme do optimálního zákona řízení 5.10

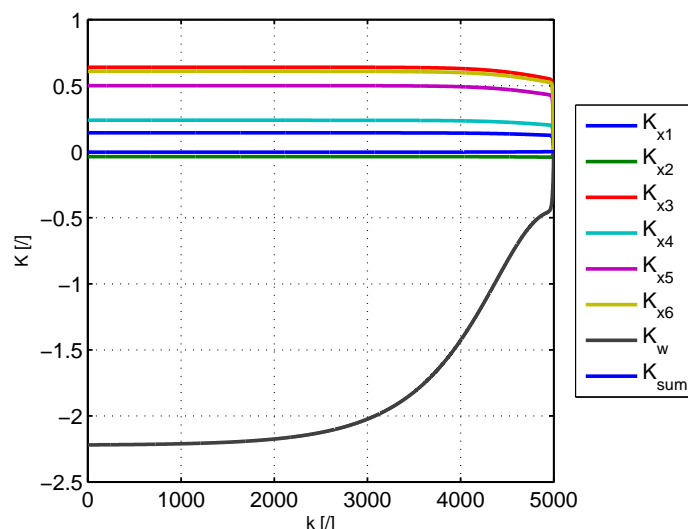
$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}(k) \cdot \mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_d(k) - K_2 x_w(k) - K_3 x_{sum}(k). \quad (5.31)$$

Optimální hodnoty vah kritéria 5.23 byly po sérii experimentů v Matlabu a Simuliku zvoleny jako

$$\mathbf{Q}' = 1 \cdot 10^{-3}, \quad \mathbf{Q}_{sum} = 1 \cdot 10^{-8}, \quad \mathbf{R}' = 1 \cdot 10^{-3}. \quad (5.32)$$

Průběh Kalmanova zesílení \mathbf{K} optimálního zákona řízení 5.31 je vykreslen na obrázku 5.13, kde zpětným postupem v čase dostáváme ustálené hodnoty jednotlivých složek

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0,143 & -0,037 & 0,64 & 0,238 & 0,5 & 0,608 \end{bmatrix}, \quad K_2 = -2,219, \quad K_3 = -0,0031. \quad (5.33)$$



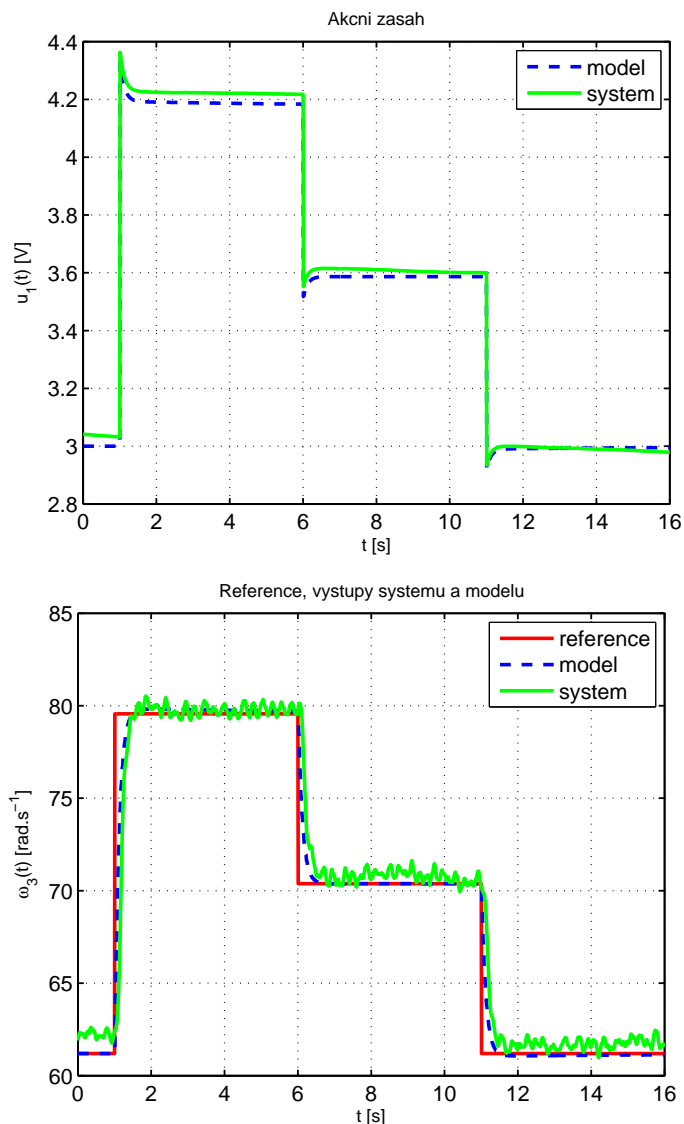
Obrázek 5.13: Průběhy iterací Kalmanova zesílení LQ regulátoru

Oproti návrhu PI regulátoru bylo nyní při návrhu LQ regulátoru respektováno omezení na řízení. Při tomto řízení se totiž již objevuje mírný překmit regulované veličiny, proto bylo nutné zajistit, abychom se při řízení příliš nevzdalovali od pracovního bodu a akční zásah byl $u_1(t)$ adekvátní. Dále zde ale byla opět snaha o co nejlepší kvalitu regulace.

Výsledky navržené LQ regulace byly demonstrovány na zvoleném referenčním signálu. Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ horní kladky spojených pohonů pomocí navrženého LQ regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.5 (simulace) a A.6 (reálný systém). Simulinková schémata musí být opět přizpůsobena pro správnou regulaci z pracovního bodu. Regulovaná úhlová rychlost reálného systému je opět na výstupu pro "hladší zobrazení" filtrována již navrženým eliptickým filtrem typu dolní propust. Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni spojených pohonů a matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého LQ regulátoru je zachycen na obrázku 5.14.

Pokud se podíváme na způsob řízení v zapojení na obrázku A.6, můžeme si všimnout, že stavy, které jsou použity pro řízení laboratorního modelu spojených pohonů, jsou získávány z identifikovaného modelu, nikoliv tedy ze systému reálného. Mohlo by se tedy zdát, že se jedná o přímovazební řízení. V tomto zapojení je ovšem vnášena informace o výstupu reálného systému prostřednictvím sumátoru regulační odchylky. Zpětná vazba je tedy vytvořena touto formou. Úplná stavová zpětná vazba je navržena hned v následující kapitole 5.4.

Na závěr této kapitoly o LQ sledování (kvadraticky optimální servomechanismus) je možné ještě zmínit, že v simulinkových schématech je **zpětnovazební část** s \mathbf{K}_1 nezávislá na vlastnostech generátoru referenčního signálu a stavy generátoru referenčního signálu tvoří tzv. **část přímovazební** (\mathbf{K}_2).



Obrázek 5.14: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni pomocí **LQ regulátoru**

5.4 Návrh LQG regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni

V případě, kdy není měřitelný stav procesu, je nutné tento stav optimálně odhadovat na základě pozorování vstupů a výstupů systému. V **deterministické formulaci** problému je možné k odhadování stavu sestavit klasického **pozorovatele stavu**. Ve **stochastické formulaci** problému lze úlohu dohadu stavu formulovat ve smyslu optimálního LMS¹² odhadu stavu. Výsledný pozorovatel stavu se potom nazývá **Kalmanův filtr** a k jeho činnosti se postupně propracujeme.

¹²Linear Mean Square

Nechť $\tilde{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})$ je označení pro odhad stavu získaný na základě měřených dat \mathbf{y} výstupu systému a chyba odhadu stavu nechť je

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}). \quad (5.34)$$

LMS odhad je potom lineární odhad minimalizující střední kvadratickou chybu. Je možné definovat kritérium

$$J_{LMS} = \varepsilon \left\{ \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} \right\}, \quad (5.35)$$

kde předpokládáme, že hledaná data $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})$ jsou pouze afinní funkcí měřených dat \mathbf{y}

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}. \quad (5.36)$$

Dle literatury [11] je potom možné dokázat, že **optimální odhad stavu** minimalizující střední kvadratickou chybu je tedy dán vztahem

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mu_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_y). \quad (5.37)$$

Můžeme tedy vidět, že odhad $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})$ závisí pouze na prvních dvou momentech - středních hodnotách μ_x a μ_y a kovariančních maticích odhadu \mathbf{P}_{xy} a \mathbf{P}_{yy} . **Kovarianční matici chyby odhadu stavu** je potom možné po dosazení odvodit

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \varepsilon \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}))^T \right\} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx}. \quad (5.38)$$

Nyní si můžeme napsat rovnice **diskrétního stochastického systému**

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (5.39)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k), \quad (5.40)$$

kde **šum procesu** $\mathbf{v}(k)$ a **šum měření** $\mathbf{e}(k)$ jsou diskrétní bílé posloupnosti s nulovou střední hodnotou

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0} \quad (5.41)$$

a známou kovarianční maticí

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta(k_1 - k_2), \quad \delta(k_1 - k_2) \begin{cases} = 1 & k_1 = k_2 \\ = 0 & k_1 \neq k_2 \end{cases}. \quad (5.42)$$

Ze vztahu 5.42 vidíme, že šumy jsou navzájem korelované, ale v různých časových okamžicích jsou již nezávislé. Kovarianční matice jsou symetrické a uvažujeme $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{R} > \mathbf{0}$. Nyní předpokládejme, že v k -tém kroku algoritmu známe **apriorní odhad** stavu $\mathbf{x}(k)$ (tj. odhad využívající data až do času $k-1$, ale neberoucí v úvahu data $\mathbf{y}(k)$), jehož podmíněnou střední hodnotu můžeme označit

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k-1). \quad (5.43)$$

Kovarianční matici chyby odhadu stavu můžeme označit

$$\mathbf{P}(k | k - 1). \quad (5.44)$$

Po změření hodnoty výstupu $\mathbf{y}(k)$ chceme tyto hodnoty aktualizovat a získat **aposteriorní odhad** stavu $\hat{\mathbf{x}}(k | k)$ (tj. odhad zahrnující měření $\mathbf{y}(k)$) a příslušnou kovarianční matici chyby odhadu $\mathbf{P}(k | k)$. Pro Kalmanův filtr pro nekorelované šумы procesu a měření ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$!!!) nyní nejprve odvodíme vývoj střední hodnoty¹³ rovnic systému 5.39 a 5.40

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k - 1) = \varepsilon \{ \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k), \quad (5.45)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k | k - 1) = \varepsilon \{ \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{e}(k) \} = \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k). \quad (5.46)$$

Dále také máme vývoj chyb odhadu rovnic systému

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1 | k - 1) = \mathbf{x}(k + 1) - \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k - 1) = \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{v}(k), \quad (5.47)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k | k - 1) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k | k - 1) = \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{e}(k), \quad (5.48)$$

díky kterým můžeme odvodit také kovarianční matice chyby odhadu stavu a výstupu

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k + 1) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix}^T \middle| k - 1 \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Například \mathbf{P}_{xx} potom určíme dosazením a úpravou vztahu 5.47

$$\mathbf{P}_{xx} = \varepsilon \{ \tilde{\mathbf{x}}(k + 1 | k - 1) \tilde{\mathbf{x}}^T(k + 1 | k - 1) \} = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \quad (5.50)$$

Podobným způsobem bychom získali i \mathbf{P}_{xy} , \mathbf{P}_{yx} a \mathbf{P}_{yy}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} & \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T \\ \mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{A}_d^T & \mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Stále uvažujeme, že šумы procesu a měření jsou nekorelované ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$). Nyní můžeme dosadit složky výrazu 5.51 do 5.37 a získáváme konečný vztah pro odhad stavu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k - 1) &= \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \\ &+ \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T \left(\mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \right)^{-1} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}(k | k - 1) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k)). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Dosazením jednotlivých složek výrazu 5.51 zase dostaneme konečný vztah pro kovarianční matici chyby odhadu stavu, která bývá označována jako **Riccatiho rovnice pro Kalmanův filtr**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k + 1 | k - 1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} - \\ &- \left(\mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T \right) \left(\mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{A}_d^T \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

V rovnicích 5.52 a 5.53 je možné označit jako **Kalmanovo zesílení filtru**

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T \left(\mathbf{C}_d \mathbf{P}(k | k - 1) \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \right)^{-1}. \quad (5.54)$$

¹³označení $\hat{\mathbf{x}}$ má v textu stejný význam jako μ_x a $\hat{\mathbf{y}}$ jako μ_y - viz rovnice 5.37

Rovnice 5.52 a 5.53 představují algoritmus Kalmanova filtru a dají se rozdělit do dvou nezávislých kroků

1. **Datový (filtrační) krok** Kalmanova filtru

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{L}'(k)\varepsilon(k|k-1), \quad (5.55)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}'(k)\mathbf{C}_d\mathbf{P}(k|k-1), \quad (5.56)$$

kde $\mathbf{L}'(k)$ je **Kalmanovo zesílení datového kroku** a $\varepsilon(k|k-1)$ je **chyba odhadu výstupu**

$$\varepsilon(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_d\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(k). \quad (5.57)$$

2. **Časový (predikční) krok** Kalmanova filtru

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}_d\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(k), \quad (5.58)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}_d\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}. \quad (5.59)$$

Na závěr vysvětlení činnosti Kalmanova filtru je možné si všimnout, že do rovnice 5.52 je možné dosadit Kalmanovo zesílení (5.54) a dostáváme podobný tvar jako v případě deterministického pozorovatele stavů

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k-1) = \mathbf{A}_d\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(k)(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_d\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(k)). \quad (5.60)$$

Matice $\mathbf{L}(k)$ je ovšem navržena optimálně pro **kovarianční matici šumu procesu** \mathbf{Q} a **kovarianční matici šumu měření** \mathbf{R} .

Při návrhu Kalmanova filtru pro laboratorní model spojených pohonů jsem tedy nejprve výpočtem **rozptylu** ustálené hodnoty měřené reugolované veličiny $\omega_3(t)$ přibližně stanovil hodnotu kovarianční matice šumu měření

$$\mathbf{R} = \sigma_e^2 = 1 \cdot 10^{-6} \quad (5.61)$$

a kovarianční matici šumu procesu jsem potom vhodně zvolil jako

$$\mathbf{Q} = eye(6) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

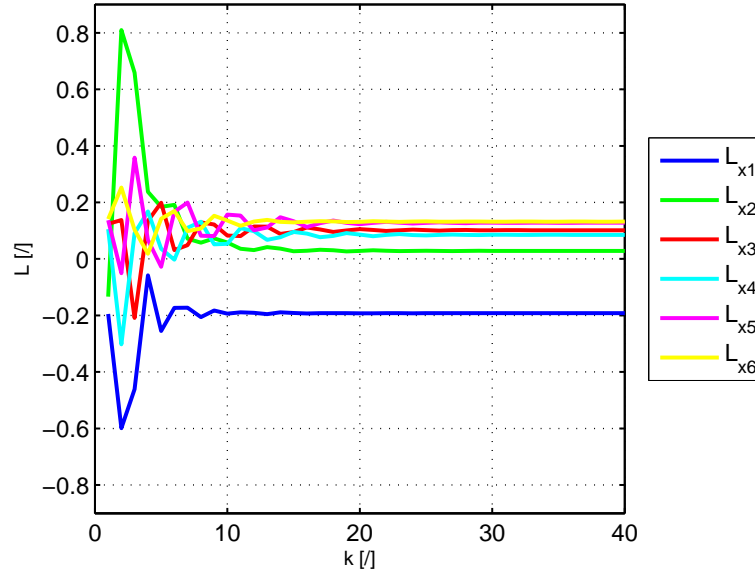
Dále se návrh Kalmanova filtru řeší obdobným způsobem jako u LQ regulátoru. V tomto případě se iteračně řeší rovnice 5.55 a 5.56 datového kroku a rovnice 5.58 a 5.59 časového kroku, dokud nedosáhneme ustáleného Kalmanova zesílení datového kroku $\mathbf{L}'(k) \rightarrow \mathbf{L}'$. Kalmanovo zesílení celého filtru potom v závěru získáme

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{A}_d\mathbf{L}'. \quad (5.63)$$

Pomocí Matlabu tedy byla nalezena tato Kalmanova zesílení

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0,192 & 0,0284 & 0,1015 & 0,0851 & 0,128 & 0,132 \end{bmatrix}^T. \quad (5.64)$$

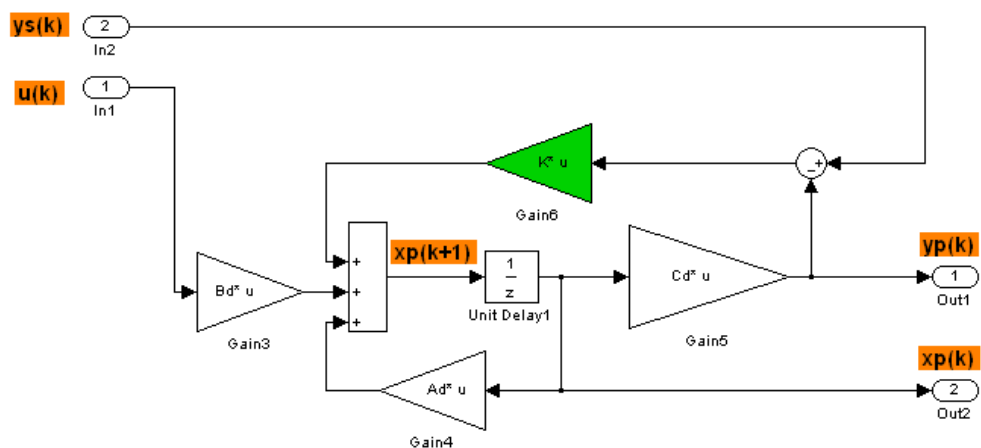
Průběhy iterací Kalmanova zesílení \mathbf{L} pro Kalmanův filtr pro 6 stavů systému jsou vykresleny na obrázku 5.15. U Kalmanova filtru se oproti návrhu LQ řízení neiteruje zpětně v čase, ale ve směru času.



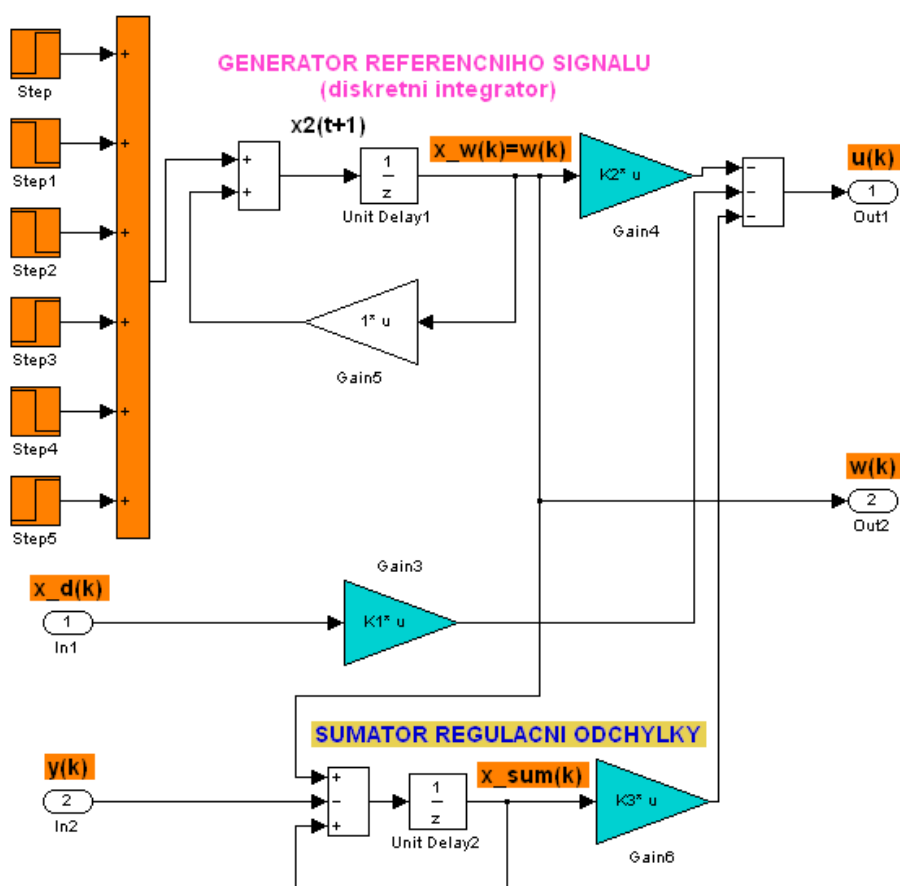
Obrázek 5.15: Průběhy iterací Kalmanova zesílení pro Kalmanův filtr

Výsledky navržené LQG regulace byly demonstrovány na zvoleném referenčním signálu. Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ horní kladky spojených pohonů pomocí navrženého LQG regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.7 (simulace) a A.8 (reálný systém).

Simulinková schémata musí být opět přizpůsobena pro správnou regulaci z pracovního bodu. Regulovaná úhlová rychlost reálného systému je opět na výstupu pro "hladší zobrazení" filtrována již navrženým eliptickým filtrem typu dolní propust. Vnitřní struktury bloků **Kalmanův filtr** a **LQ regulátor** z těchto schemat jsou rozkresleny na obrázcích 5.16 a 5.17.

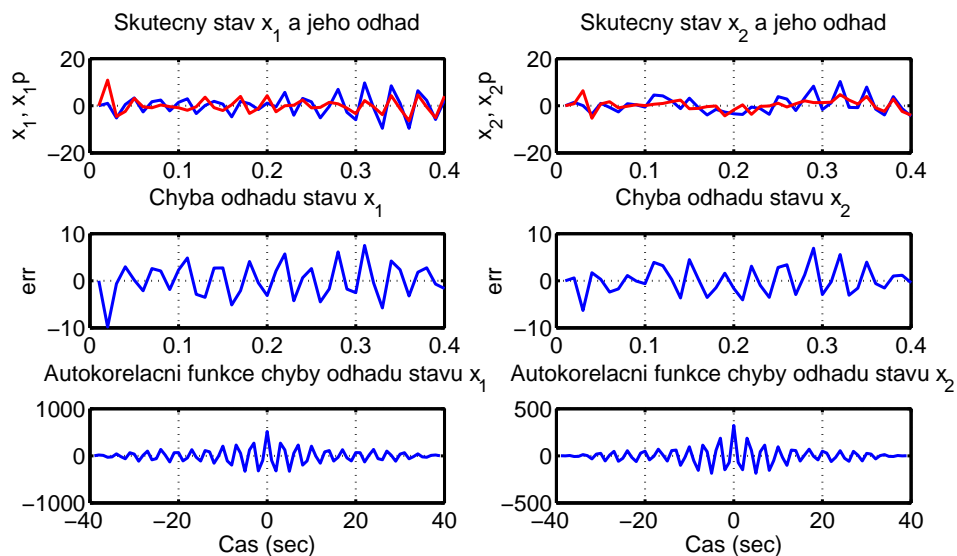


Obrázek 5.16: Vnitřní struktura bloku Kalmanův filtr (z LQG regulátoru)

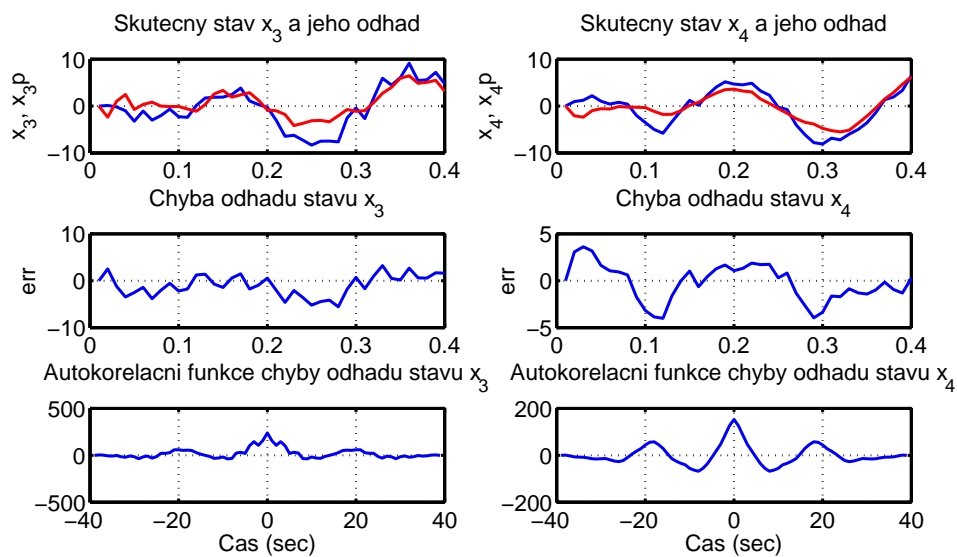


Obrázek 5.17: Vnitřní struktura bloku LQ regulátor (z LQG regulátoru)

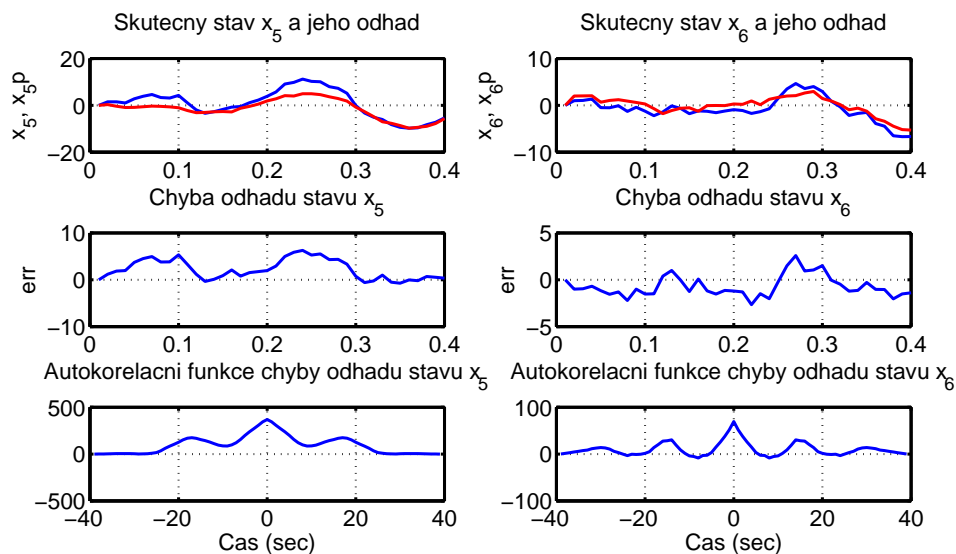
Na obrázcích 5.18, 5.19, 5.20 a 5.21 jsou potom vykresleny průběhy skutečných a odhadovaných stavů a skutečného a odhadovaného výstupu s příslušnými autokorelačními funkcemi chyb odhadu. Z autokorelační funkce chyby odhadu výstupu je vlastně vidět, že se jedná o bílý šum.



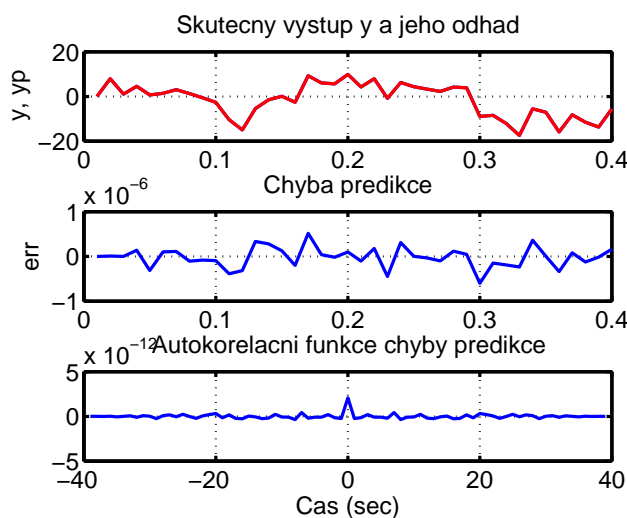
Obrázek 5.18: Průběhy skutečných a odhadovaných stavů $x_1(k)$ a $x_2(k)$ teoretického modelu spojených pohonů



Obrázek 5.19: Průběhy skutečných a odhadovaných stavů $x_3(k)$ a $x_4(k)$ teoretického modelu spojených pohonů

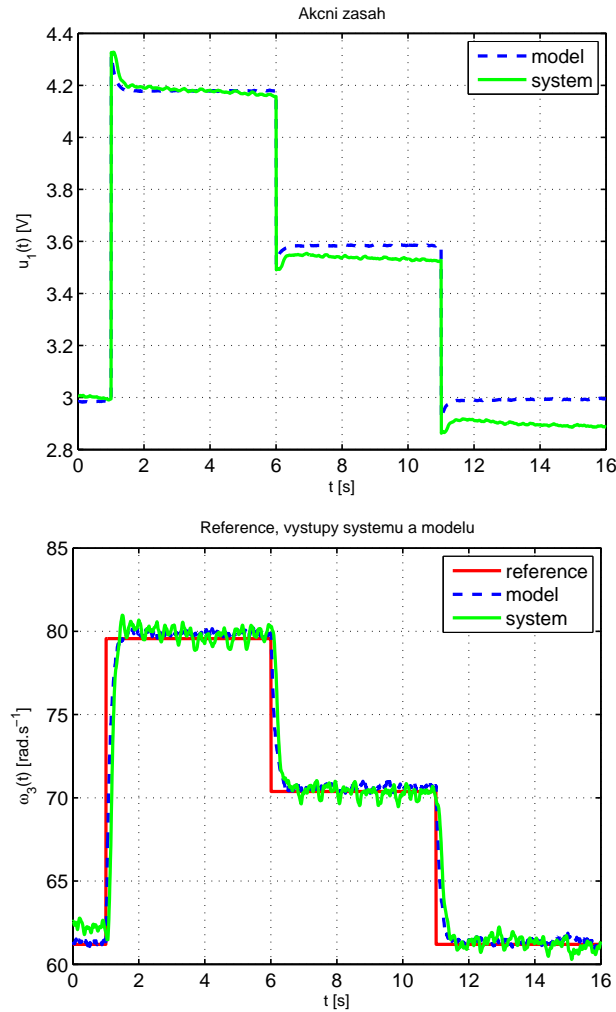


Obrázek 5.20: Průběhy skutečných a odhadovaných stavů $x_5(k)$ a $x_6(k)$ teoretického modelu spojených pohonů



Obrázek 5.21: Průběhy skutečného a odhadovaného stavů výstupu $y(k)$ teoretického modelu spojených pohonů

Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni spojených pohonů a matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého LQG regulátoru je zachycen na obrázku 5.22. Z těchto regulačních průběhů je patrné, že se od LQ regulace příliš neliší a je tedy možné pouze na základě vstupu a výstupu systému pomocí Kalmanova filtru velmi dobře odhadovat všech 6 stavů.



Obrázek 5.22: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni pomocí **LQG regulátoru**

5.5 Návrh LQG regulátoru pro řízení úhlu vychýlení ramene

V předchozí kapitole jsme navrhovali LQG regulátor pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni (tedy pro přenos matematického modelu 5.4). Nyní navrhujeme naprosto stejným způsobem i řízení pro úhel vychýlení ramene $\alpha(t)$, tedy pro přenos 5.6.

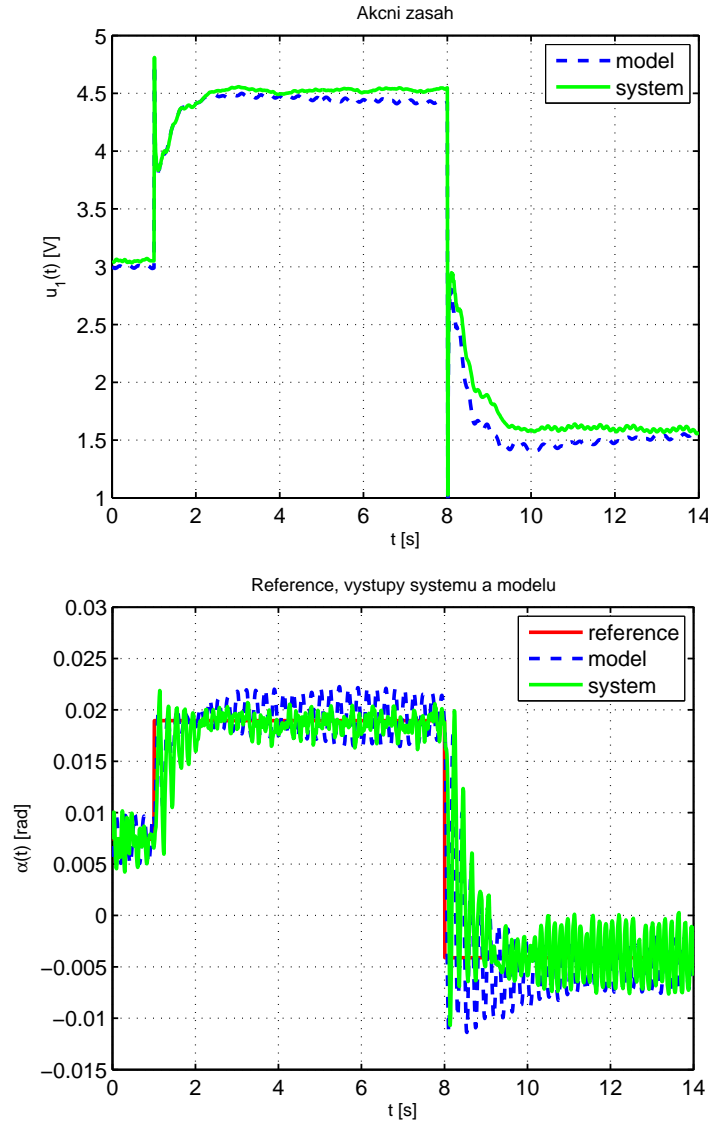
Kovarianční matici šumu měření jsem v tomto případě ponechal stejnou jako v předchozí kapitole

$$\mathbf{R} = 1 \cdot 10^{-6} \quad (5.65)$$

a kovarianční matici šumu procesu jsem potom po sérii experimentů nastavil jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Výsledky navržené LQG regulace byly demonstrovány na zvoleném referenčním signálu. Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení úhlu vychýlení ramene $\alpha(t)$ spojených pohonů pomocí navrženého LQG regulátoru je uvedeno v příloze na obrázku A.9 (simulace). Simulinkové schéma pro řízení reálného modelu je až na parametry pracovního bodu a zapojení výstupu shodné se schematem A.8.



Obrázek 5.23: Průběh regulace úhlu vychýlení $\alpha(t)$ ramene pomocí *LQG regulátoru*

Novinkou v regulačním obvodu pro simulaci na matematickém modelu na obrázku A.9 je začlenění parazitního kmitání úhlu vychýlení. To je realizováno pomocí přidaného bloku *Sine Wave*. Regulovaný výstup (úhel vychýlení) je tedy již při simulaci filtrován navrženým eliptickým filtrem typu dolní propust z obrázku 5.10. Průběh regulace úhlu vychýlení $\alpha(t)$ spojených pohonů a matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého LQG regulátoru je zachycen na obrázku 5.23.

5.6 Úprava LQG regulátoru pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni s odhadem poruchového zatěžovacího momentu

V této kapitole provedeme rozšíření návrhu Kalmanova filtru z kapitoly 5.4 o informaci o přídatném *poruchovém zatěžovacím momentu*. Ten může být simulován pomocí *druhého motoru M2* (tj. pravého motoru). K tomuto účelu použijeme pro návrh tzv. metodu *"unknown input observer"*, jejíž princip spočívá v přidání integrační složky do Kalmanova filtru (tzn. ke stavovému popisu, který se při návrhu filtru používá). Přičemž předpokládáme, že do tohoto přídatného integrátoru vstupuje *bílý šum* $v'(k)$ a jeho výstup bude vytvářet *"barevný šum" procesu*. Tímto tedy vytvoříme tzv. odhadovač neznámé (neměřitelné) poruchy, kterou představuje zatěžovací moment.

- Původní stavový popis systému se po diskretizaci skládá z matic: \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d , \mathbf{D}_d .
- Přídatný integrátor se spojitým přenosem $P_{\text{int}}(s) = 1/s$ je možné považovat za jakýsi *tvarovací filtr šumu procesu*, který je po diskretizaci a převodu do stavového popisu popsán maticemi \mathbf{A}_v , \mathbf{B}_v , \mathbf{C}_v , \mathbf{D}_v .

Výsledný **ROZŠÍŘENÝ SYSTÉM** (tzn. stav původního systému + stav tvarovacího filtru šumu procesu), pro který budeme navrhovat Kalmanův filtr, bude nyní vypadat takto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v \\ \vdots \\ \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} v'(k), \quad (5.67)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_d + e(k),$$

kde $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ $v'(k)$ je **nový šum procesu** a $e(k)$ **šum měření**. Je tedy nutné přepočítat **kovarianční matici šumu procesu** \mathbf{Q}_{new}

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(k) & v'(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(k) \\ v'(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \right\} = \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_v \\ \vdots \\ \mathbf{D}_v \\ \mathbf{B}_v \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T = \mathbf{Q}_{extend}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Matice \mathbf{Q}_{new} už bude mít nyní rozměr 7. Máme tedy nové matice rozšířeného systému

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{extend} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v \\ \vdots \\ \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{extend} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{extend} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{extend} = \mathbf{D}_d, \end{aligned} \quad (5.69)$$

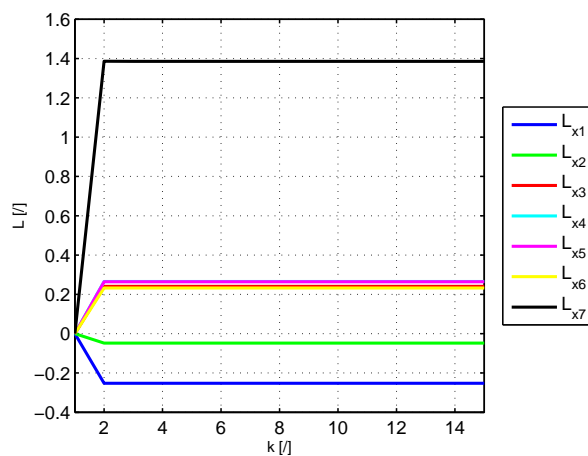
pro které provedeme výpočet matice Kalmanova zesílení

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0,252 & -0,048 & 0,241 & 0,265 & 0,264 & 0,232 & 1,386 \end{bmatrix}^T. \quad (5.70)$$

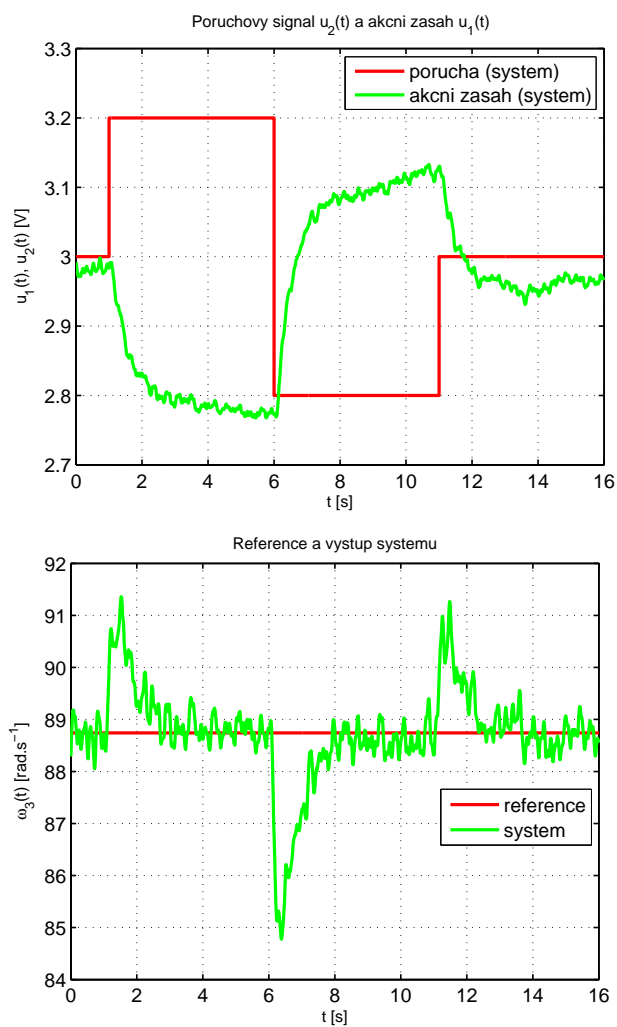
Průběhy iterací Kalmanova zesílení \mathbf{L} pro Kalmanův filtr nyní již pro 7 stavů systému jsou vykresleny na obrázku 5.24.

Výsledky této **modifikované LQG regulace otáček** $\omega_3(t)$ byly demonstrovány při působení poruchového zatěžovacího momentu, který byl vytvářen uměle pomocí pravého motoru (vstup $u_2(t)$). Referenční signál byl nastaven na konstantní hodnotu. Simulinkové schéma regulační smyčky je uvedeno v příloze na obrázku A.8 (reálný systém). Je možné si zde všimnout odděleného stavu pro pozorování odhadovaného zatěžovacího momentu.

Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ při působení poruchového zatěžovacího momentu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého LQG regulátoru je zachycen na obrázku 5.25. V tomto průběhu je vidět, že poruchový zatěžovací moment byl bez problému vyregulován.

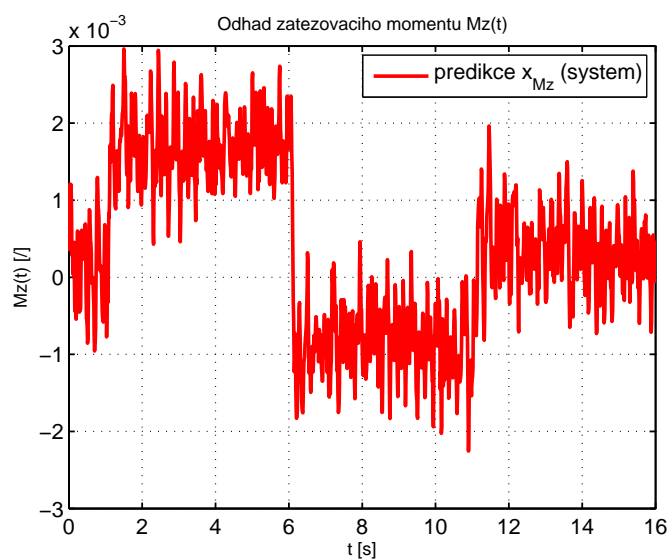


Obrázek 5.24: Průběhy iterací Kalmanova zesílení pro Kalmanův filtr



Obrázek 5.25: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ s odhadem poruchového zatěžovacího momentu pomocí *LQG regulátoru*

Průběh *odhadu zatěžovacího momentu* je potom vykreslen na obrázku 5.26. Zde si můžeme všimnout, že tento odhad tvarově skutečně velmi dobře odpovídá vstupnímu poruchovému zatěžovacímu momentu z obrázku 5.25.



Obrázek 5.26: Odhad poruchového zatěžovacího momentu

Kapitola 6

Regulace MIMO systému jako celku

V případě laboratorního modelu spojených pohonů (a samozřejmě i velmi často v technické praxi) se setkáváme se systémem, který má více vstupních a výstupních veličin. Každá ze vstupních veličin může tedy současně ovlivňovat více výstupních veličin. Vzájemnými interakcemi mezi vstupními a výstupními veličinami potom mohou vznikat složité dynamické souvislosti a vazby (viz [7] a [1]).

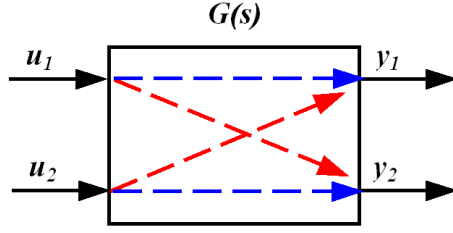
Na tomo místě je třeba zmínit, že MIMO systémy je možné řídit buď jedním regulátorem (**centralizované řízení**), nebo více regulátory. Pokud předpokládáme řízení více regulátory a neexistují žádná strukturální omezení na řídicí systém (tj. regulátory mohou být propojeny s libovolnými vstupy a výstupy), budeme hovořit o **vícesmyčkové regulaci**. Charakteristickým rysem vícesmyčkové regulace je interaktivnost regulačních smyček a metody návrhu smyčkových regulátorů musí docílit **eliminaci vlivu interakcí**. O to se budeme především v závěru této finální kapitoly snažit.

V první podkapitole 6.1 se budu nejprve zabývat návrhem vícesmyčkového **PI regulátoru**, v podkapitole 6.2 provedu návrh **centralizovaného řízení** pro celý MIMO systém v podobě **LQ regulátoru** a v poslední podkapitole bude předveden způsob návrhu regulátoru pro eliminaci interakcí z kapitoly 6.3 - konkrétně v podobě **dynamického rozvazovacího regulátoru**.

Řízení MIMO systémů je tedy komplikované především z důvodu interakcí mezi jednotlivými vstupy a výstupy. Míru těchto interakcí je možné určit pomocí tzv. **matice relativních zesílení RGA**¹³ (rozebráno v [1]). RGA se používá jako hlavní nástroj pro párování vstupů a výstupů pro MIMO systémy. A to především při návrhu vícesmyčkové regulace. RGA nám tedy ukáže, jaká kombinace vstup-výstup bude s nejmenší mírou interakce pro ostatní regulační smyčky. Díky této informaci potom bude možný návrh izolovaných regulátorů v kapitole 6.1 pro tyto konkrétní páry vstup-výstup.

Náš MIMO systém spojených pohonů z kapitoly 2.2 je možné schematicky překreslit dle používaných vstupů a výstupů obrázkem 6.1, kde $y_1 = \omega_3$ a $y_2 = \alpha$.

¹³viz Seznam použitých zkratk v úvodu práce

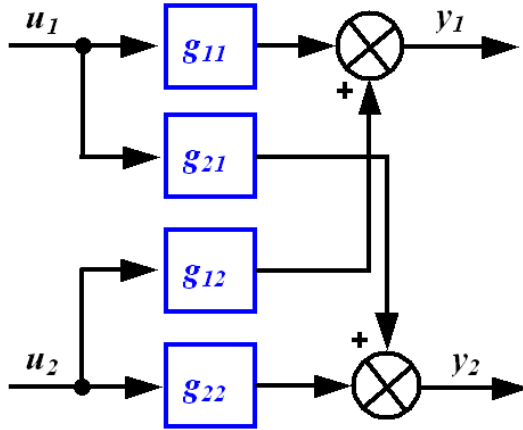


Obrázek 6.1: Možné párování vstupů a výstupů (pro MIMO systém 2×2)

Z přenosové matice systému spojených pohonů (4.35) použijeme tedy pouze přenosy pro 2 vstupy a 2 výstupy (první a třetí řádek matice), neboť z již odvozeného matematického modelu platí, že $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_3$. Máme tedy

$$\mathbf{G}_{new}(s) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (6.1)$$

Tuto přenosovou matici 6.1 je potom možné symbolicky rozkreslit do obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: Blokové schéma dílčích přenosů přenosové matice $\mathbf{G}_{new}(s)$

Pro ustálený stav ($\omega = 0$) potom můžeme z tohoto obrázku sepsat výstupní rovnice $\mathbf{y} = \mathbf{G}_{new}(s) \cdot \mathbf{u}$

$$y_1 = g_{11}(0)u_1 + g_{12}(0)u_2, \quad (6.2)$$

$$y_2 = g_{21}(0)u_1 + g_{22}(0)u_2. \quad (6.3)$$

Pro posouzení míry interaktivnosti a vhodného párování můžeme nyní zavést již zmiňovanou ***RGA matici relativních zesílení*** $\Lambda = [\lambda_{ij}]$, jejíž prvky jsou určeny poměrem ***statických zesílení otevřené smyčky*** a ***statických zesílení otevřené smyčky při respektování uzavření druhé smyčky***.

- Pro určení statického zesílení otevřené smyčky se předpokládá, že je nějaká smyčka otevřená (rozpojená), tj. vstup nějakého okruhu je nulový. Z obrázku 6.2 tedy můžeme například z rovnice 6.2 vyjádřit případ otevření druhé smyčky, kdy

$$u_2 = 0 \Rightarrow y_1 = g_{11}(0)u_1. \quad (6.4)$$

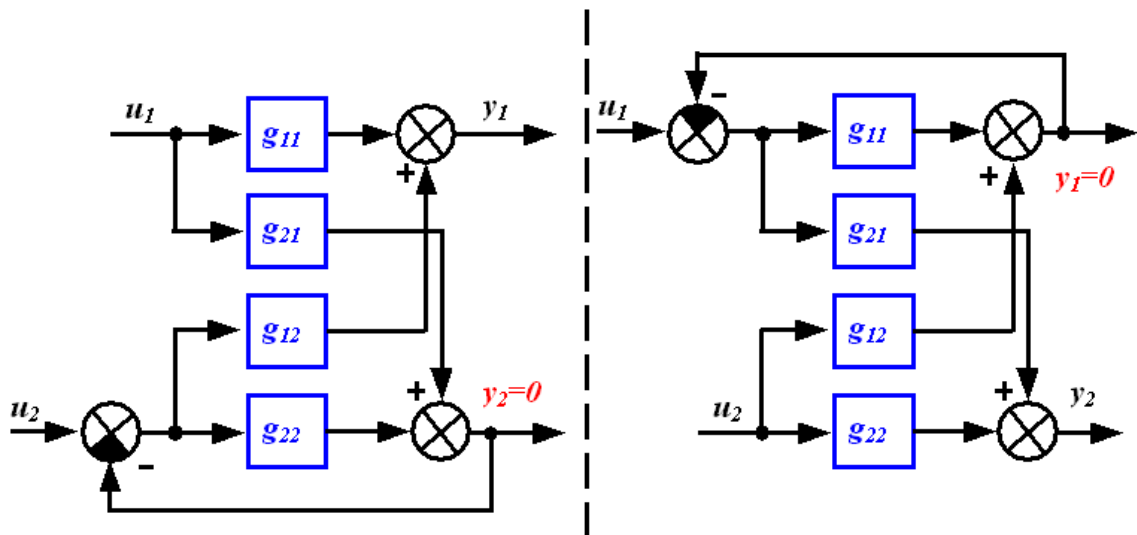
Jedním z hledaných *statických zesílení otevřené smyčky* je tedy $g_{11}(0)$. Totéž je možné provést i pro zbylé 3 případy z rovnic 6.2 a 6.3

$$u_1 = 0 \Rightarrow y_1 = g_{12}(0)u_2. \quad (6.5)$$

$$u_2 = 0 \Rightarrow y_2 = g_{21}(0)u_1. \quad (6.6)$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow y_2 = g_{22}(0)u_2. \quad (6.7)$$

- Pro určení statického zesílení otevřené smyčky při respektování uzavření druhé smyčky se předpokládá, že je uzavřen zpětnovazební obvod druhé smyčky a její výstup je nulový. Dva možné případy uzavření smyček nám ilustruje obrázek 6.3.



Obrázek 6.3: Bloková schémata 2 možných uzavřených smyček

Pro podmínku $y_2 = 0$ například dostáváme z rovnice 6.3

$$0 = g_{21}(0)u_1 + g_{22}(0)u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{g_{21}(0)}{g_{22}(0)}u_1. \quad (6.8)$$

Dosazením do 6.2 potom dostáváme hledané *statické zesílení otevřené smyčky* $\hat{g}_{11}(0)$ *při respektování uzavření druhé smyčky*

$$y_2 = 0 : y_1 = \underbrace{\left(g_{11}(0) - \frac{g_{21}(0)}{g_{22}(0)} \right)}_{=\hat{g}_{11}(0)} u_1. \quad (6.9)$$

Porovnáním vztahů 6.4 a 6.9 je vidět, že zesílení $g_{11}(0)$ se změní na $\hat{g}_{11}(0)$. Důležité hledané **relativní zesílení** λ_{11} (prvek matice $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}]$) tedy nakonec bude

$$\lambda_{11} = \frac{g_{11}(0)}{\hat{g}_{11}(0)} = \frac{g_{11}(0)g_{22}(0)}{g_{11}(0)g_{22}(0) - g_{12}(0)g_{21}(0)}. \quad (6.10)$$

Pro podmínku $y_1 = 0$ bychom potom dostali z rovnice 6.2

$$0 = g_{11}(0)u_1 + g_{12}(0)u_2 \Rightarrow u_1 = -\frac{g_{12}(0)}{g_{11}(0)}u_2. \quad (6.11)$$

Dosazením do 6.3 potom dostáváme hledané **statické zesílení otevřené smyčky** $\hat{g}_{22}(0)$ **při respektování uzavření druhé smyčky**

$$y_1 = 0 : \quad y_2 = \underbrace{\left(g_{22}(0) - \frac{g_{12}(0)}{g_{11}(0)} \right)}_{=\hat{g}_{22}(0)} u_2. \quad (6.12)$$

Porovnáním vztahů 6.7 a 6.12 je vidět, že zesílení $g_{22}(0)$ se změní na $\hat{g}_{22}(0)$. Nyní vidíme, že hledané **relativní zesílení** λ_{22} vyjde po úpravách naprosto stejně jako relativní zesílení λ_{11} (6.10)

$$\lambda_{22} = \frac{g_{22}(0)}{\hat{g}_{22}(0)} = \frac{g_{11}(0)g_{22}(0)}{g_{11}(0)g_{22}(0) - g_{12}(0)g_{21}(0)} = \lambda_{11}. \quad (6.13)$$

Jednou z důležitých vlastností RGA matice je, že řádkový i sloupcový součet této matice je vždy roven 1. Pro RGA matici MIMO systému 2×2 , která má obecně tvar

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

potom můžeme na základě znalosti doplňku do 1 rovnou psát

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Nyní si můžeme napsat něco o tom, o čem nám vlastně prvky RGA matice vypovídají a jak je možné na jejich základě vhodně zvolit párování vstup-výstup. Pokud

- $\lambda_{ij} = 1$... máme nejlepší párování (y_i, u_j) , protože zesílení otevřené smyčky není ovlivněno uzavřením druhé smyčky (interakce jsou tedy minimální).
- $\lambda_{ij} > 1$... bude nutné větší zesílení regulátoru v uzavřené smyčce – pokud by ostatní smyčky byly otevřené, je nebezpečí nestability (silné interakce a citlivost na neurčitosti).
- $\lambda_{ij} < 0$... zesílení uzavřené smyčky má opačné znaménko než zesílení otevřené smyčky, což může způsobit nestabilitu při regulaci v otevřené smyčce.

- $0 < \lambda_{ij} < 1 \quad \dots \quad$ lze doporučit $\lambda_{ij} \in (0, 5; 1)$.

V výše popsaného lze tedy udělat závěr - ***lze doporučit párování těch vstupních a výstupních veličin, kde $\lambda_{ij} \rightarrow 1$, ale vyhnout se párování, kde λ_{ij} je nulové nebo záporné.***

Přenosy naší nové přenosové matice $\mathbf{G}_{new}(s)$ pro laboratorní model spojených pohonů, se kterými budeme nyní pracovat, pro připomenutí jsou

$$g_{11}(s) = \frac{7,846s^5 + 239,2s^4 + 1,657 \cdot 10^5 s^3 + 2,191 \cdot 10^6 s^2 + 1,295 \cdot 10^8 s + 1,235 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9},$$

$$g_{21}(s) = \frac{3,172 \cdot 10^7 s^2 + 5,612 \cdot 10^8 s + 2,44 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}, \quad (6.16)$$

$$g_{12}(s) = \frac{1,569 \cdot 10^5 s^3 + 2,009 \cdot 10^6 s^2 + 1,279 \cdot 10^8 s + 1,23 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9},$$

$$g_{22}(s) = \frac{-3,172 \cdot 10^7 s^2 - 5,612 \cdot 10^8 s - 2,44 \cdot 10^9}{s^6 + 38,18s^5 + 4,136 \cdot 10^4 s^4 + 8,516 \cdot 10^5 s^3 + 3,693 \cdot 10^7 s^2 + 5,666 \cdot 10^8 s + 2,417 \cdot 10^9}.$$

V čitateli posledního přenosu $g_{22}(s)$ vidíme samá záporná znaménka. Příslušný PI regulátor v následující kapitole bude ale vhodnější navrhovat pro "kladný" přenos a do regulační smyčky s řízením $u_2(t)$ přidat blok se zesílením -1 . Po této drobné úpravě se ale změní znaménko čitatele přenosu $g_{12}(s)$ (jeho vstupem je rovněž řízení $u_2(t)$). Pro tento (nediagonální) přenos ale řízení nenavrhujeme, proto jsou již všechny další úvahy v pořádku. Nyní tedy po této drobné úpravě provedeme výpočet pro ustálený stav ($\omega = 0$), kdy dostaneme

$$g_{11}(0) = 0,511; \quad g_{21}(0) = 1,0095; \quad g_{12}(0) = -0,509; \quad g_{22}(0) = 1,0095. \quad (6.17)$$

Po dosazení tohoto do rovnice 6.13 dostáváme RGA matici relativních zesílení pro laboratorní model spojených pohonů

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,501 & 0,499 \\ 0,499 & 0,501 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Dle výše napsaného je vidět, že hodnota $\lambda = 0,501$ ještě leží v doporučeném intervalu $\lambda_{ij} \in (0, 5; 1)$ (i když na samé hranici). Zvolená kombinace párování $u_1 \rightarrow y_1$ (přes $g_{11}(s)$)

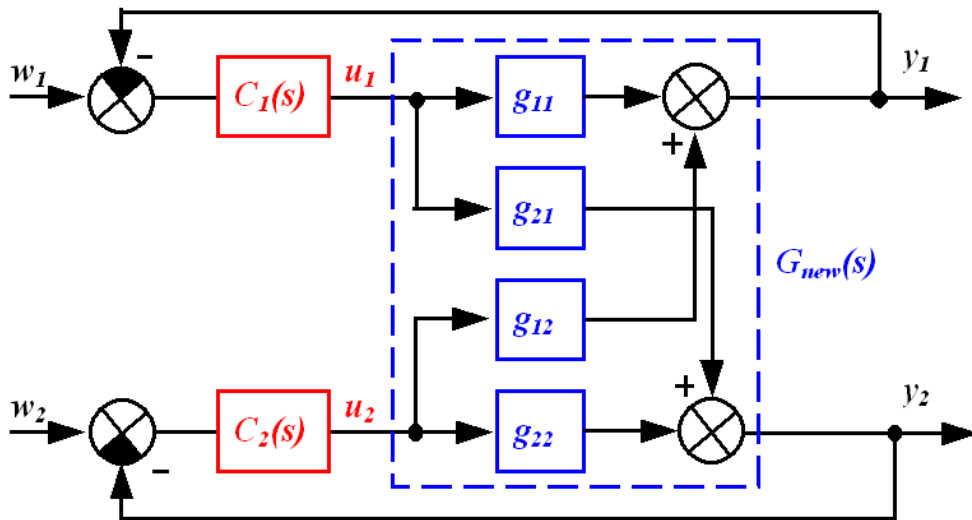
a $u_2 \rightarrow y_2$ (přes $g_{22}(s)$) je tedy ještě poměrně vhodná. Je ale zřejmé, že k poměrně silným interakcím docházet bude. Pokud bychom prohodily řídicí (utvořili tedy páry $u_1 \rightarrow y_2$ a $u_2 \rightarrow y_1$), dojde pouze k prohození řádků v RGA matici relativních zesílení. Dostaly bychom tedy relativní zesílení

$$\tilde{\lambda} = 1 - \lambda = 0,499. \quad (6.19)$$

Tato varianta párování již leží mimo doporučený interval a je tedy horší než předchozí.

6.1 Návrh vícesmyčkového PI regulátoru

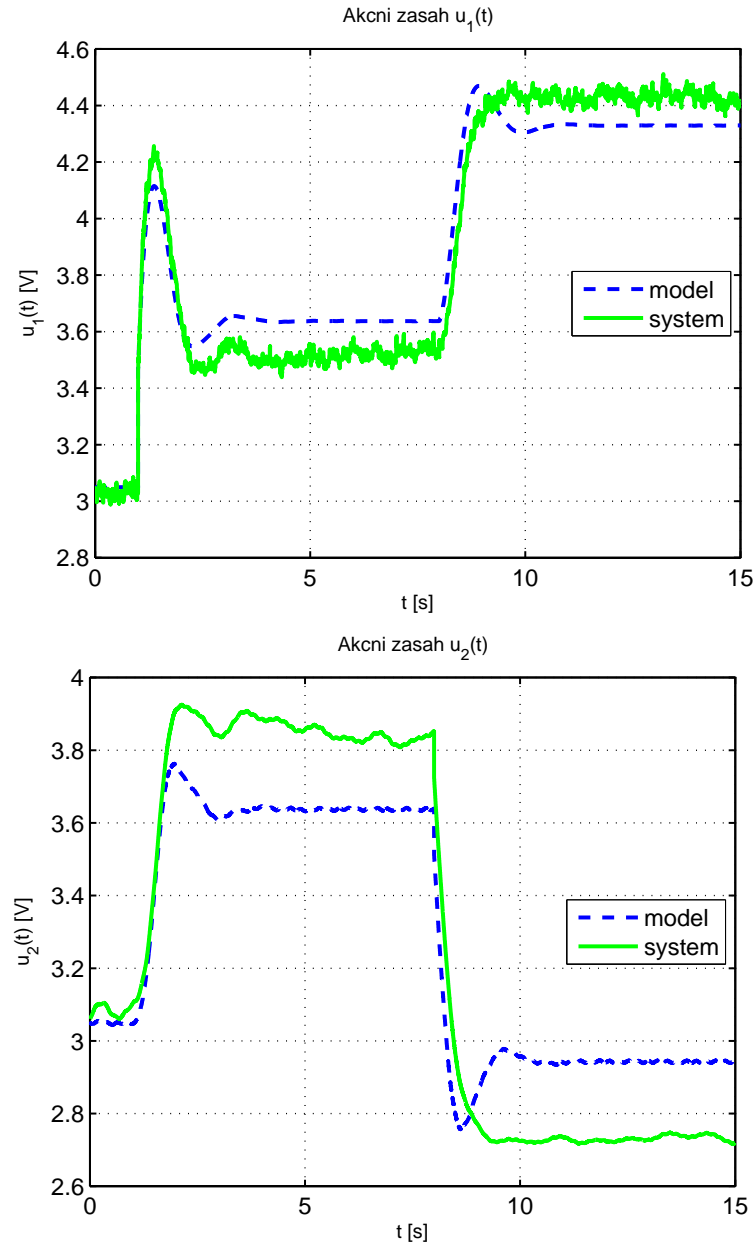
Po předchozí analýze MIMO systému jsme tedy nyní již schopni navrhnout "decentralizované" PI řízení celého laboratorního modelu spojených pohonů. Cílem metody vícesmyčkové regulace je navrhnout jednotlivé smyčkové regulátory pro přenosy na diagonále (tedy pro přenosy $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$) nějakou metodou používanou pro SISO systémy. Neuvažujeme tudíž "interakční přenosy" v přenosové matici $\mathbf{G}_{new}(s)$, tj. přenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ budeme ignorovat. V našem případě již není důvod, proč bychom nemohli použít PI regulátory navrhnuté pro zmiňované přenosy již v kapitolách 5.1 a 5.2. Vždyť právě ty již byly navrženy pro jednotlivé okruhy jako nejvhodnější. Schematické znázornění dvousmyčkové PI regulace MIMO systému je na obrázku 6.4.



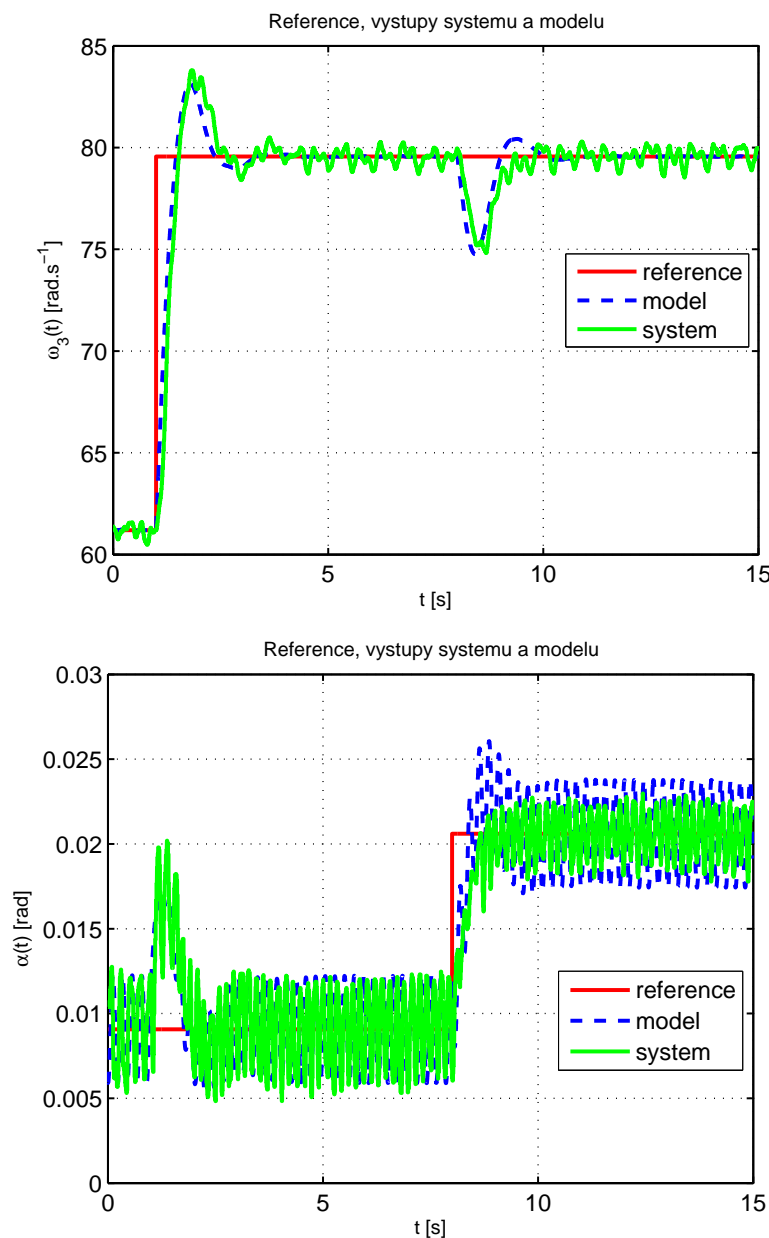
Obrázek 6.4: Schematické znázornění dvousmyčkové PI regulace MIMO systému

Pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni $\omega_3(t) \equiv y_1(t)$ tedy použijeme PI regulátor s přenosem 5.5 a pro regulaci úhlu vychýlení ramene $\alpha(t) \equiv y_2(t)$ zase PI regulátor s přenosem 5.7. Simulinkové schéma dvousmyčkové PI regulace MIMO systému spojených pohonů je uvedeno v příloze na obrázcích A.11 (simulace) a A.12 (reálný systém). V regulační smyčce pro akční veličinu $u_2(t)$ je možné si všimnout již zmiňovaného **přidaného bloku zesílení "−1"**.

Na obrázcích 6.5 a 6.6 je odezva systému (akční zásahy, reference a výstupy) na jednotkový skok žádané hodnoty $w_1(t)$ v čase 1 s a na jednotkový skok žádané hodnoty $w_2(t)$ v čase 8 s při dvousmyčkové PI regulaci. Na obrázku 6.6 je vidět, že změna $w_1(t)$ má vliv i na výstup $y_2(t)$ a $w_2(t)$ má zase vliv na výstup $y_1(t)$. Dochází tedy ke zmiňovaným interakcím. S tím jsme ale již při návrhu teoreticky počítali a interakce jsou poměrně rychle vyregulovány.



Obrázek 6.5: Průběh *dvousmyčkové PI regulace* - akční zásahy



Obrázek 6.6: Průběh *dvousmyčkové PI regulace* - výstupní veličiny

6.2 Návrh LQ regulátoru pro celý MIMO systém

V kapitole 5.3 jsme navrhovali LQ řízení úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni. Šlo tedy o regulaci pouze jediného okruhu MIMO systému (návrh byl proveden pouze pro dílčí přenos $g_{11}(s)$). Nic nám ovšem nebrání navrhnout řízení pro přenosovou matici $\mathbf{G}_{new}(s)$ celého MIMO systému. Jelikož se při návrhu LQ sledování pracuje především se stavovým popisem systému, je přechod výpočtu na složitější systém velice přirozený. Dojde především k rozšíření příslušných matic a vektorů používaných při výpočtech o příslušné rozměry. LQ regulace MIMO systému je typický zástupce *cen-*

tralizovaného typu řízení.

Návrh tedy provádíme pro přenosovou matici $\mathbf{G}_{new}(s)$ (6.1), ze které získáme nejprve pomocí příkazu

$$system = ss(G_{new})$$

stavový popis celého MIMO systému, který bude mít nyní nově 12 stavů, 2 vstupy, 2 výstupy. Po diskretizaci tohoto systému s periodou vzorkování $T_s = 0,01$ s tedy máme pro

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k), \quad (6.20)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k), \quad (6.21)$$

vektory

$$\mathbf{x}_d(k) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(t) = \omega_3(t) \\ y_2(t) = \alpha(t) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

a rozměry matic

$$\mathbf{A}_d \dots 12 \times 12, \mathbf{B}_d \dots 12 \times 2, \mathbf{C}_d \dots 2 \times 12, \mathbf{D}_d \dots 2 \times 2. \quad (6.23)$$

Nyní již máme nově 2 generátory referenčních signálů

$$x_{w_1}(k+1) = x_{w_1}(k), \quad (6.24)$$

$$x_{w_2}(k+1) = x_{w_2}(k), \quad (6.25)$$

dále potom také 2 rovnice sumátorů regulačních odchylek

$$\begin{aligned} x_{sum_1}(k+1) &= x_{sum_1}(k) + e_1(k) = x_{sum_1}(k) + x_{w_1}(k) - y_1(t) = \\ &= x_{sum_1}(k) + x_{w_1}(k) - \mathbf{C}_d(1,:) \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d(1,:) u_1(k), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} x_{sum_2}(k+1) &= x_{sum_2}(k) + e_2(k) = x_{sum_2}(k) + x_{w_2}(k) - y_2(t) = \\ &= x_{sum_2}(k) + x_{w_2}(k) - \mathbf{C}_d(2,:) \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d(2,:) u_2(k). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Pokud sloučíme všechny tyto stavy

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_{12}(k) \\ x_{w_1}(k) \\ x_{w_2}(k) \\ x_{sum_1}(k) \\ x_{sum_2}(k) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

do "*super rozšířeného MIMO systému*", dostáváme tyto matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_d & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_d \end{bmatrix}; \quad (6.29)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = [\mathbf{0}].$$

Váhové matice \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}_{sum} a \mathbf{R}' kritéria 5.23 mají nyní nově díky 2 vstupům a 2 výstupům rozměr 2×2 . Optimální hodnoty vah kritéria byly po sérii experimentů v Matlabu a Simulinku zvoleny jako

$$\mathbf{Q}' = 1 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{sum} = 1 \cdot 10^{-7} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}' = 1 \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Váhové matice \mathbf{Q} a \mathbf{R} upraveného kritéria 5.28 mají stejný tvar (jako v 5.29), změní se opět jejich rozměr

$$\mathbf{Q} \dots 16 \times 16, \quad \mathbf{R} \dots 2 \times 2. \quad (6.31)$$

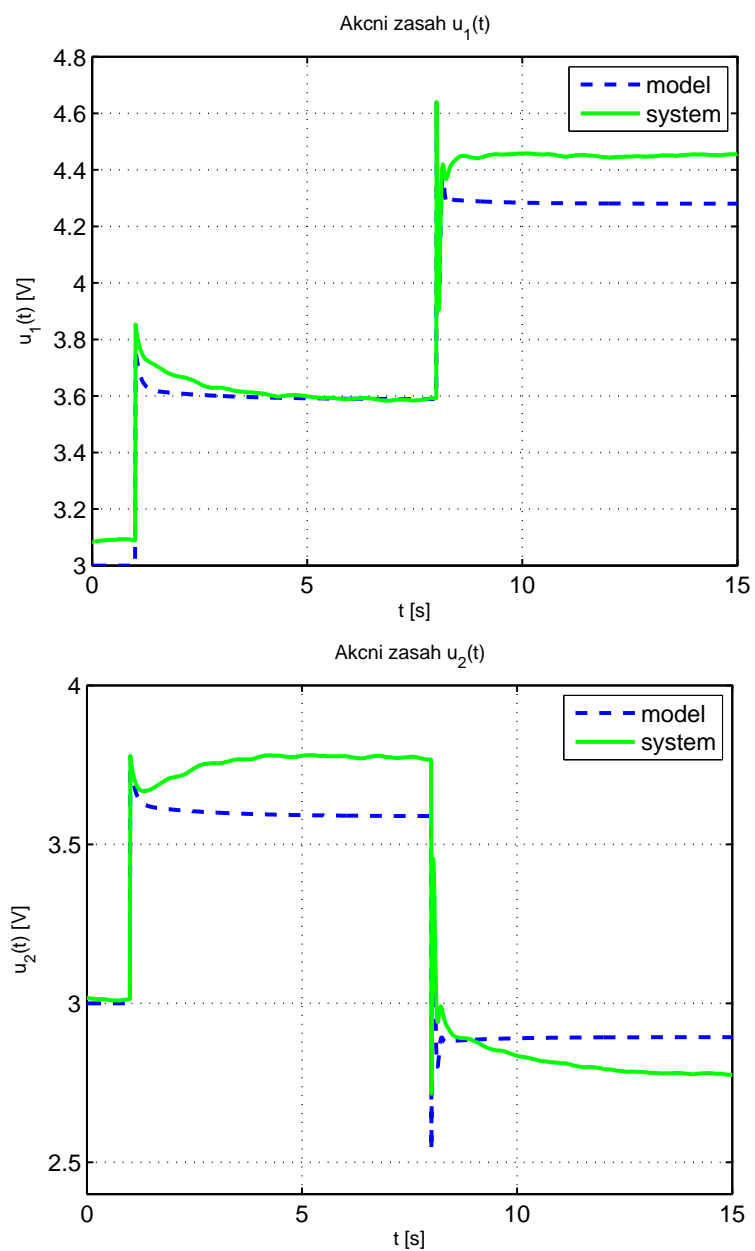
Zpětným postupem v čase dostáváme ustálené hodnoty jednotlivých složek Kalmanova zesílení. V tomto případě již nepůjde o vektory, nýbrž o matice

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 2,06 & 0,66 & 10,04 & 4,61 & 1,69 & 0,91 \\ -1,78 & -0,62 & -8,62 & -4,32 & -1,13 & -0,24 \\ -1,77 & -0,3 & -4,3 & -4,32 & -1,12 & -0,24 \\ 2,07 & 0,34 & 5,03 & 4,62 & 1,69 & 0,91 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

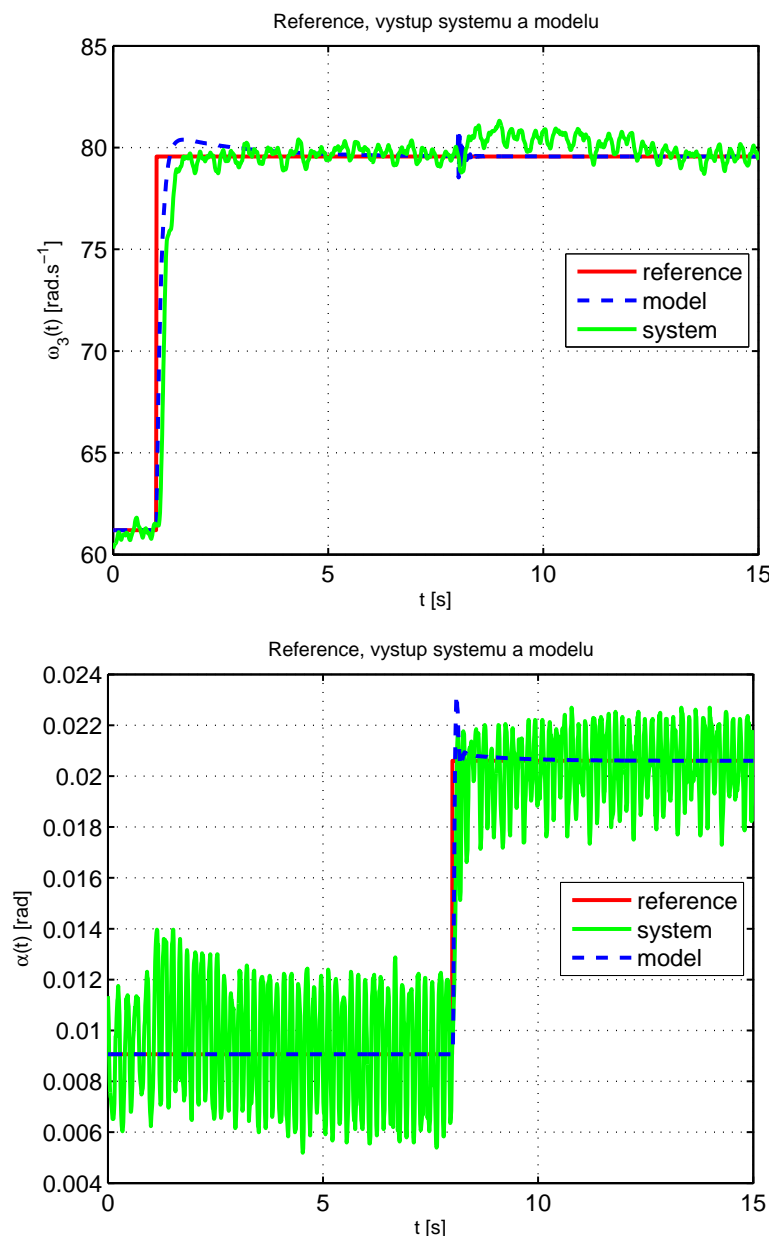
$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1,27 & -0,75 \\ -1,27 & 0,75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} -0,007 & -0,006 \\ -0,007 & 0,006 \end{bmatrix}.$$

Simulinkové schéma regulace MIMO systému spojených pohonů pomocí navrženého LQ regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.13 (simulace) a A.14 (reálný systém). Jedná se o velmi podobné jako při LQ řízení jednotlivého okruhu MIMO systému. Rozdíl je ovšem v rozšíření pro 2 vstupní a 2 výstupní veličiny.

Na obrázcích 6.7 a 6.8 je odezva systému (akční zásahy, reference a výstupy) na jednotkový skok žádané hodnoty $w_1(t)$ v čase 1 s a na jednotkový skok žádané hodnoty $w_2(t)$ v čase 8 s při LQ regulaci MIMO systému. Na obrázku 6.8 je vidět, že vliv interakcí je oproti dvousmyčkové PI regulaci z předcházející části téměř potlačen.



Obrázek 6.7: Průběh regulace *MIMO systému LQ regulátorem* - akční zásahy



Obrázek 6.8: Průběh regulace *MIMO systému LQ regulátorem* - výstupní veličiny

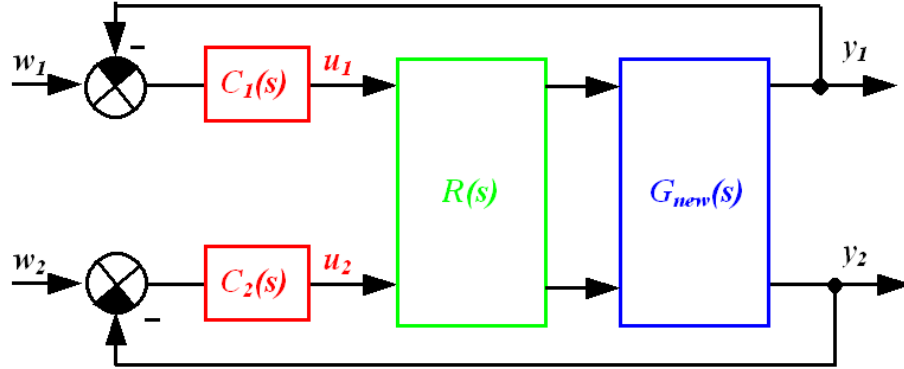
6.3 Návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru

V kapitole 6.1 jsme navrhovali PI regulátory pouze pro diagonální prvky přenosové matice systému. Nediagonální přenosy $g_{12}(s)$ a $g_{21}(s)$ jsme při návrhu nebrali v úvahu, proto jsme mohli na obrázku 6.6 pozorovat interakce. Ty byly vyvolány právě zbylými vazbami $u_1 \rightarrow y_2$ a $u_2 \rightarrow y_1$. Nyní si tedy ukážeme jak navrhnout **rozvazbující kompenzátor** $R(s)$, díky kterému dosáhneme diagonální přenosové matice řízeného systému. Dojde k tzv. rozvazbení MIMO systému (anglicky *decoupling*).

Diagonální přenosové matice je možné dle [6] dosáhnout 2 způsoby

- dynamickým rozvazbovacím regulátorem
- stavovým rozvazbovacím regulátorem

První případ využívá vnějšího popisu řízeného systému a druhý popisu vnitřního. Já se v této kapitole zaměřím pouze na návrh dynamického rozvazbovacího regulátoru. Jeho schematické znázornění je na obrázku 6.9



Obrázek 6.9: Schematické znázornění dynamického rozvazbovacího regulátoru

Způsob návrhu toho typu regulátoru spočívá v těchto krocích

1. Výběr vhodného párování vstupů a výstupů podle RGA.
2. Návrh kompenzátoru $\mathbf{R}(s)$.
3. Návrh smyčkových regulátorů.

Určení správného párování již bylo rozebráno v úvodu této kapitoly 6, proto se nyní můžeme věnovat návrhu rozvazbujícího kompenzátoru $\mathbf{R}(s)$. Dle literatury [6] budeme požadovat, aby

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{G}_{new}(s), \quad (6.33)$$

kde $\mathbf{D}(s)$ bude vhodně zvolená diagonální matice přenosových funkcí

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Dle 6.33 by matice rozvazbovacího kompenzátoru $\mathbf{R}(s)$ měla být určena jako

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{G}_{new}^{-1}(s)\mathbf{D}(s) = \frac{\text{adj } \mathbf{G}_{new}(s)}{\det \mathbf{G}_{new}(s)}\mathbf{D}(s). \quad (6.35)$$

Pokud budeme vycházet z požadavku zamezení interakce regulačních smyček, je pro nás nejlepší volba

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Po dosazení 6.36 do rovnice 6.35 dostáváme konečný tvar matice přenosových funkcí $\mathbf{R}(s)$ rozvazbovacího kompenzátoru, který by měl zaručit diagonalitu přenosové matice systému,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s) &= \begin{bmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) \\ r_{21}(s) & r_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} g_{22}(s) & -g_{12}(s) \\ -g_{21}(s) & g_{11}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 \\ 0 & g_{22}(s) \end{bmatrix}}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{\begin{bmatrix} g_{11}(s)g_{22}(s) & -g_{12}(s)g_{22}(s) \\ -g_{21}(s)g_{11}(s) & g_{11}(s)g_{22}(s) \end{bmatrix}}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)}.\end{aligned}\quad (6.37)$$

Z tohoto tedy dostáváme přenosové funkce matice $\mathbf{R}(s)$

$$\begin{aligned}r_{11}(s) &= r_{22}(s) = \frac{g_{11}(s)g_{22}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1 - K(s)} = \bar{K}^{-1}(s), \\ r_{12}(s) &= -\frac{g_{12}(s)g_{22}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1 - K(s)} \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} = -\bar{K}^{-1}(s) \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)}, \\ r_{21}(s) &= -\frac{g_{21}(s)g_{11}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)} = \frac{1}{1 - K(s)} \frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} = -\bar{K}^{-1}(s) \frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)},\end{aligned}\quad (6.38)$$

kde

$$K(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} \quad (6.39)$$

je vazbový činitel a $\bar{K}(s) = 1 - K(s)$.

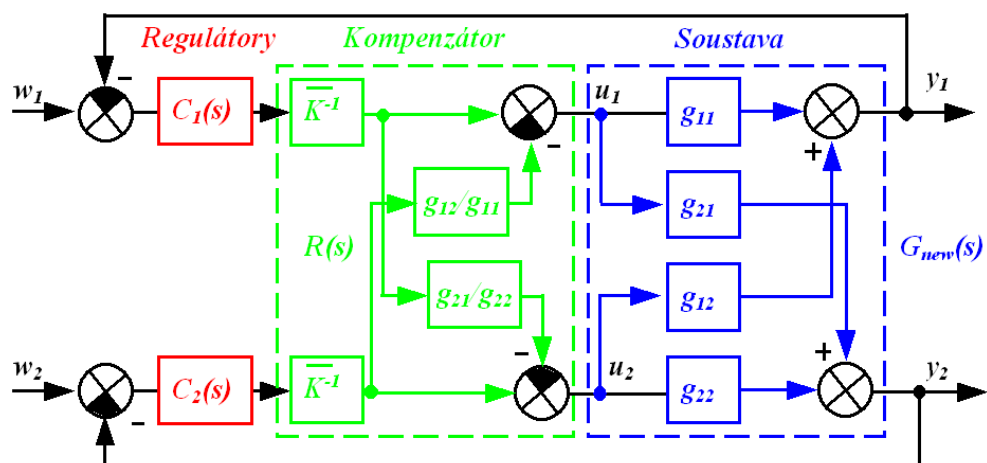
Pokud má být kompenzátor $\mathbf{R}(s)$ realizovatelný, tak musí být realizovatelný přenos

$$K(s) = \frac{g_{12}(s)g_{21}(s)}{g_{11}(s)g_{22}(s)} = \frac{b_{11}(s)b_{22}(s)a_{12}(s)a_{21}(s)}{a_{11}(s)a_{22}(s)b_{12}(s)b_{21}(s)}, \quad (6.40)$$

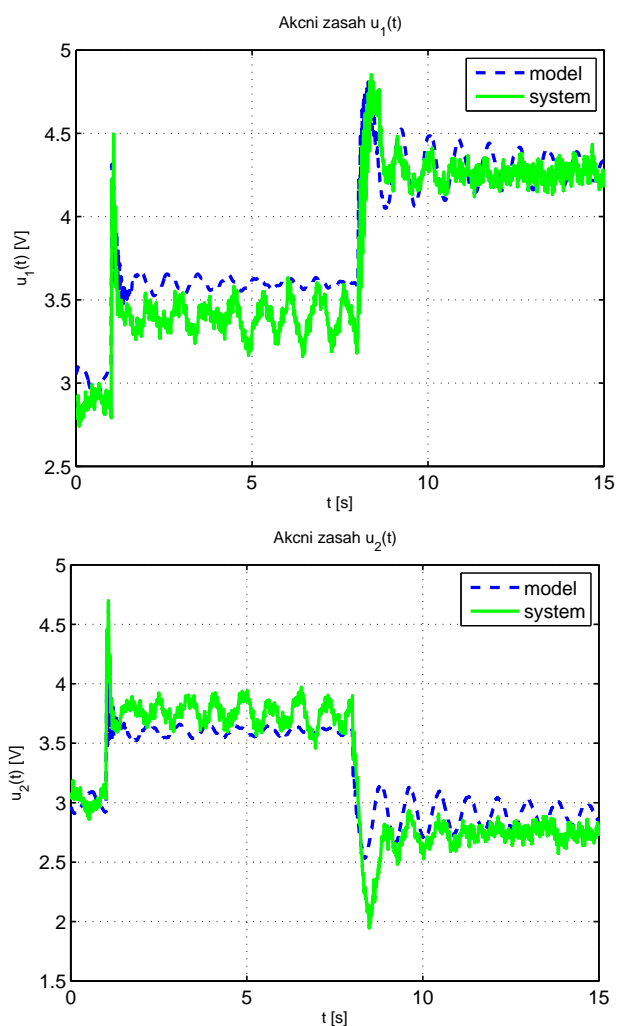
kde $a_{ij}(s)$ a $b_{ij}(s)$ jsou polynomy čitatele a jmenovatele přenosů $g_{ij}(s)$. Dostáváme tedy podmínku realizovatelnosti dynamického rozvazbovacího kompenzátoru pro MIMO systém 2×2

$$\deg(a_{11}(s)a_{22}(s)b_{12}(s)b_{21}(s)) \geq \deg(b_{11}(s)b_{22}(s)a_{12}(s)a_{21}(s)). \quad (6.41)$$

Naším posledním úkolem je nyní navrhnout regulátory $C_1(s)$ a $C_2(s)$ z obrázku 6.9 zvlášť pro přenosy $g_{11}(s)$ a $g_{22}(s)$ metodami SISO návrhu. My ale máme tyto 2 PI regulátory navrženy již z kapitoly 6.1, proto je opět využijeme a posoudíme nyní vliv dynamického kompenzátoru na potlačení interakcí. Na obrázku 6.10 je zobrazeno schéma detailu zapojení řízeného MIMO systému s dynamickým kompenzátozem. Simulinkové schéma regulace MIMO systému spojených pohonů pomocí navrženého dynamického rozvazbovacího regulátoru je uvedeno v příloze na obrázcích A.15 (simulace) a A.16 (reálný systém).

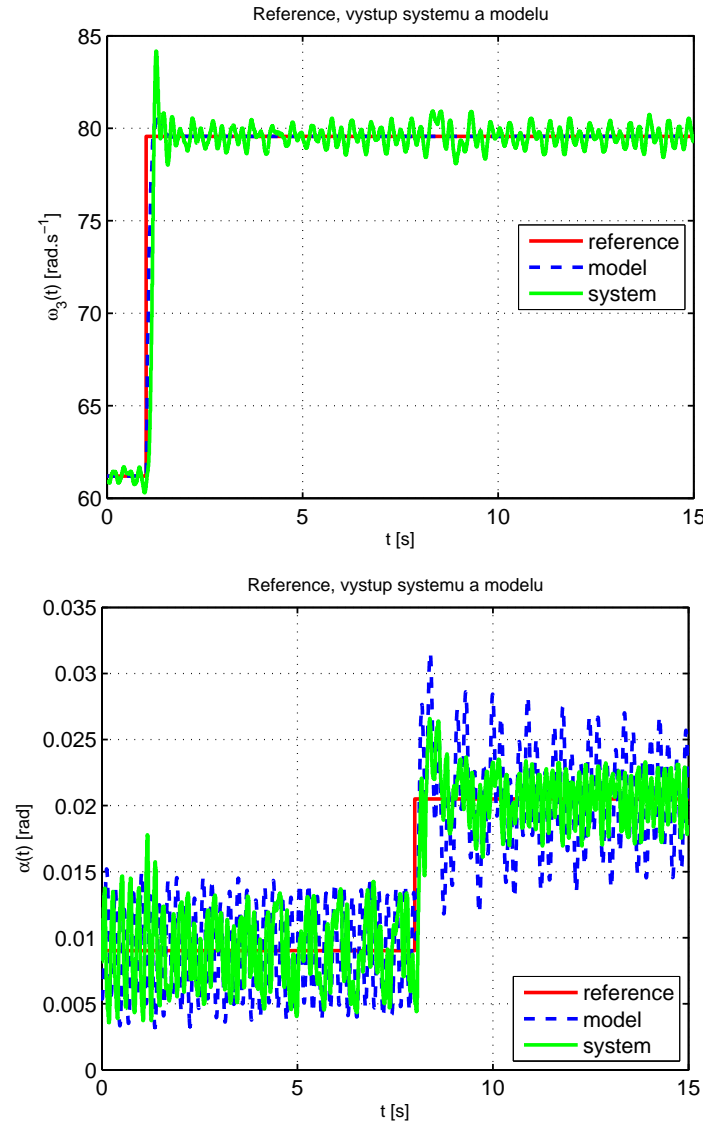


Obrázek 6.10: Schematické znázornění dynamického rozvazbovacího regulátoru - DETAIL



Obrázek 6.11: Průběh regulace *MIMO* systému dynamickým rozvazbovacím regulátorem - akční zásahy

Na obrázcích 6.11 a 6.12 je odezva systému (akční zásahy, reference a výstupy) na jednotkový skok žádané hodnoty $w_1(t)$ v čase 1 s a na jednotkový skok žádané hodnoty $w_2(t)$ v čase 8 s při regulaci MIMO systému dynamickým rozvazbovacím regulátorem. Na obrázku 6.12 je vidět, že přidáním rozvazbovacího kompenzátoru mezi regulátory a soustavu byly interakce mezi $u_1 \rightarrow y_2$ a $u_2 \rightarrow y_1$ oproti dvousmyčkové PI regulaci naprosto eliminovány, dokonce ještě důkladněji než při LQ regulaci celého MIMO systému.



Obrázek 6.12: Průběh regulace *MIMO systému dynamickým rozvazbovacím regulátorem* - výstupní veličiny

Kapitola 7

Závěr

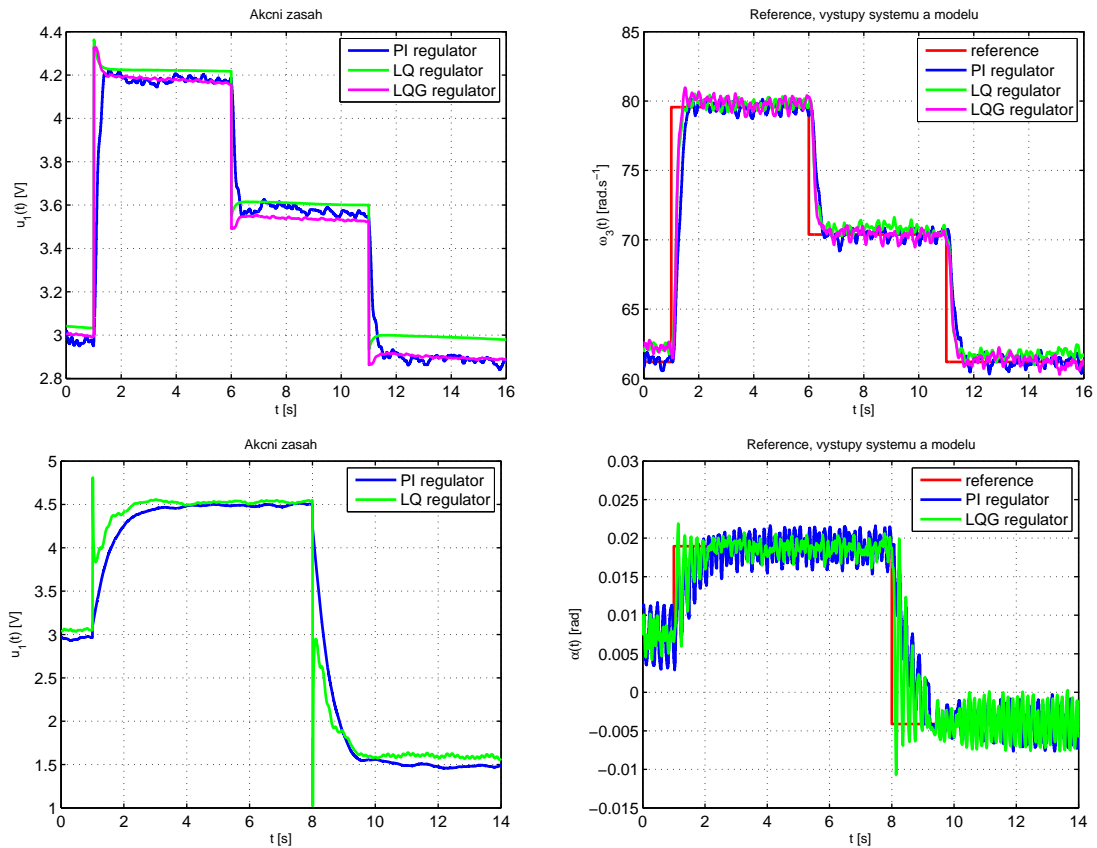
V této práci se mi povedlo aplikovat teoretické znalosti (ať už ty základní či novější modernější přístupy) z oblasti regulační techniky na praktický model pohonů spojených gumovým pásem. Tento vyrobený laboratorní model CE108¹³ může poměrně věrohodně kopírovat nějaký segment pohonů průmyslového stroje, ať už například papírenského, textilního apod. Je vhodně zhotoven tak, aby bylo možné využívat oba jeho vstupy (napětí 2 motorů) a měřit 4 výstupy, jedná se tedy o ukázkového zástupce MIMO systémů.

Nejvíce času v této práci jsem strávil při sestavování matematicko-fyzikálních rovnic pro nalezení a sestavení matematického modelu, který by co možná nejvíce zahrnoval skutečné vlastnosti řízeného laboratorního modelu. Nalezený model se nakonec sestává ze 3 hlavních částí - motorů, pružného pásu a pružiny. Pro jeho celkovou identifikaci bylo tedy nutné postupně provést dílčí identifikace v těchto 3 oblastech. U hnací části bylo třeba postupovat nejprve od samotných motorů bez gumového pásu a až poté se zatížením gumovým pásem. Jednou z prvních komplikací, se kterou jsme se mohli již na začátku setkat, bylo **prokluzování gumového pásu** při větším rozdílu otáček hnacích motorů M1 a M2. Na tento nedostatek jsem musel zareagovat zavedením pracovního bodu a regulací v jeho blízkém okolí. Větší rozdíly v otáčkách motorů by totiž způsobovaly nelinearity, které by nebylo možné simulovat. Další již drobnější komplikací bylo netlumené kmitání a chvění ručky skutečného laboratorního modelu, které bylo rovněž nutné do simulačního modelu zahrnout. Negativním faktorem byla rovněž i měnící se okolní teplota v místnosti, která nepatrně ovlivňovala chování hnacích motorů a pružiny. Tu ale nebylo možné do simulace zahrnout.

Při návrhu řízení byly nejprve navrženy regulátory pro dílčí okruhy MIMO systému (kapitola 5), tedy pro řízení úhlové rychlosti kladky na pohyblivém rameni a pro řízení úhlu vychýlení ramene. Pro lepší vlastnosti regulačního obvodu bylo téměř nutné navrhnout i vhodné filtry pro fitrování šumu na výstupu řízených veličin. Výsledky regulací z těchto kapitol jsou vyneseny v souhrnných grafech na obrázku 7.1. Z těchto průběhů je patrné, že LQ a LQG regulace přinesla oproti PI regulaci mírné zvýšení rychlosti odezvy. Cílem LQG úhlové regulace rychlosti byl i odhad neznámého poruchového zatěžovacího

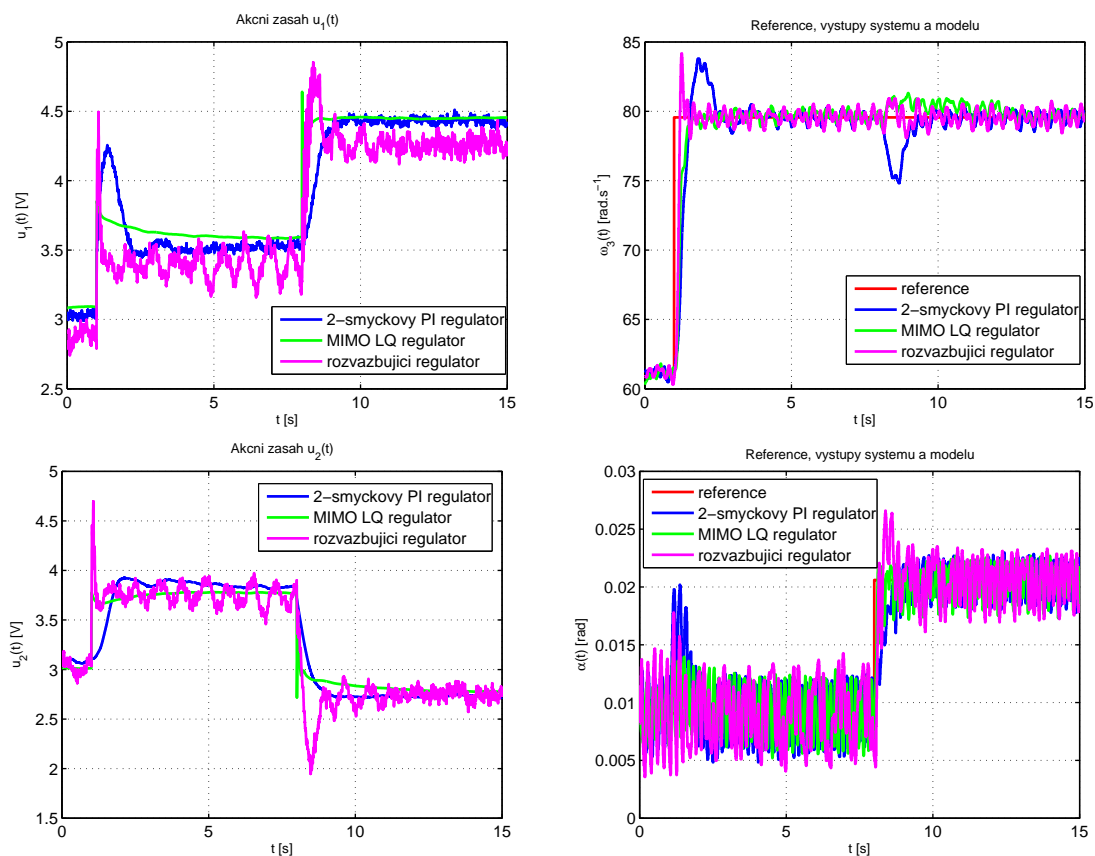
¹³umístěný v laboratoři K26 katedry řídicí techniky

momentu, který se podařilo v kapitole 5.6 pomocí metody *”unknown input observer”* poměrně úspěšně realizovat.



Obrázek 7.1: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni a úhlu vychýlení $\alpha(t)$ ramene

V závěrečné kapitole 6 jsme se již zabývali návrhem řízení celého MIMO systému spojených pohonů. Mohli jsme si tedy s úspěchem nastavovat 2 žádané hodnoty najednou a sledovat vzájemné ovlivňování veličin systému. K určení nejvhodnějšího párování vstup-výstup a následně *”dvousmyčkové decentralizované PI regulace”* nám přispěla tzv. *matice relativních zesílení RGA*. Dále byl navržen *centralizovaný typ řízení pomocí LQ regulátoru*, jehož návrh pro MIMO systém nebyl oproti SISO přístupu o mnoho komplikovanější. V závěrečné části jsem pro eliminaci interakcí nediagonálních přenosů přenosové matice systému navrhl *dynamický rozvazovací regulátor*. Výsledky těchto regulačních pokusů z kapitoly 6 jsou souhrnně vyneseny na obrázku 7.2. V těchto charakteristikách si můžeme všimnout interakcí při dvousmyčkové PI regulaci. Ty jsou již ovšem výrazně potlačeny při LQ regulaci. Dynamický rozvazovací regulátor eliminuje interakce již definitivně a navíc ještě urychlí regulační pochod. Průběhy modelu a reálného systému se velmi dobře shodují a jenom tak potvrzují správnost teoretického návrhu. Řízení na více žádaných hodnot MIMO systému se tedy podařilo velmi dobře a to je jistě velký úspěch této práce.



Obrázek 7.2: Průběh regulace úhlové rychlosti $\omega_3(t)$ kladky na pohyblivém rameni a úhlu vychýlení $\alpha(t)$ ramene

Laboratorní model spojených pohonů CE108 byl tedy využit téměř beze zbytku a bylo na něm možné dobře propojit teorii s praxí.

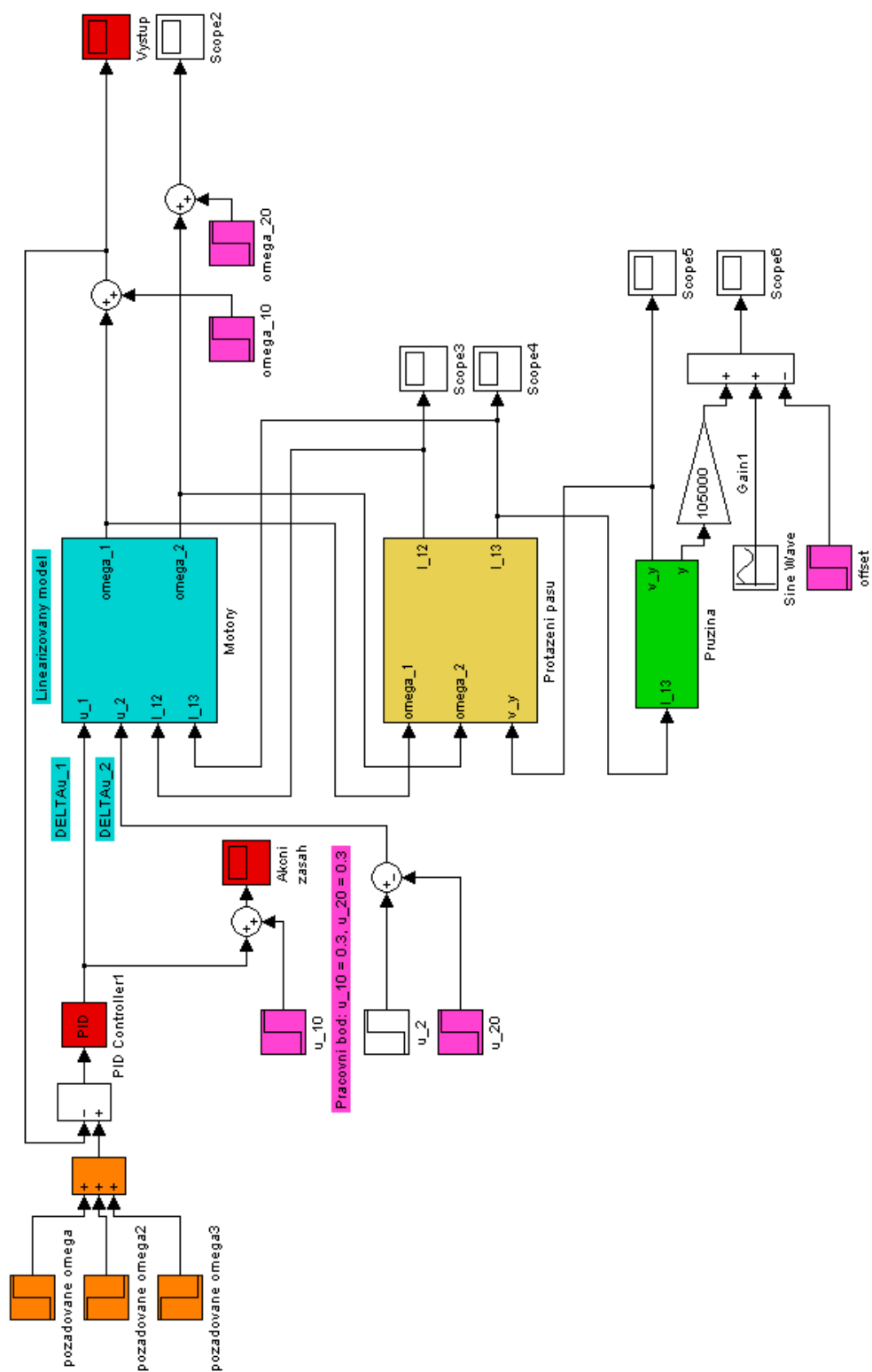
Literatura

- [1] S. SKOGESTAD, I. POSTLETHWAITE: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Second ed., J.Wiley & Sons, 2005.
- [2] G.F.FRANKLIN, J.D. POWELL, A. EMAMI-NAEINI: *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice-Hall, 2006.
- [3] H. HAGADOORN, M. READMAN: *Coupled Drives 1: Basic* [online] (2010).
⟨<http://www.control-systems-principles.co.uk/whitepapers/coupled-drives1.pdf>⟩
- [4] H. HAGADOORN, M. READMAN: *Coupled Drives 2: Control and analysis* [online] (2010).
⟨<http://www.control-systems-principles.co.uk/whitepapers/coupled-drives2.pdf>⟩
- [5] TECQUIPMENT LTD: *CE108 Coupled Drives Apparatus* [online] (2010).
⟨http://www.tecquipment.com/Datasheets/ce108_0808.pdf⟩
- [6] J. MELICHAR: *Decentralizované a hierarchické řízení*. ZČU Plzeň, Plzeň, 2010.
- [7] O. MODRLÁK: *Systémy s více vstupy - MIMO systémy*.
Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2004.
- [8] J. ROUBAL: *Laboratoř teorie automatického řízení* [online] (2010).
⟨<http://support.dce.felk.cvut.cz/lab26/>⟩
- [9] J. ROUBAL, P. HUŠEK, AND SPOL: *Základy regulační techniky v příkladech* (2009).
- [10] K. JONÁŠ: *GUI pro návrh PID regulátorů* [online] (2008), BP, ČVUT-FEL.
⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/lab26/download/library/bp_2008.jonas_karel.pdf⟩
- [11] V. HAVLENA: *X35MTR Nové slides* [online] (2010), ČVUT-FEL.
⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/file.php/15/prednasky/mtr_slidy_1up.pdf⟩
- [12] *The Mathworks* [online] (2010).
⟨<http://www.mathworks.com/>⟩
- [13] P. VOŽENÍLEK, J. JANOUŠEK: *Základy silnoproudé elektrotechniky*.
Vydavatelství ČVUT, Praha, 2005. ISBN 978-80-01-03135-3.

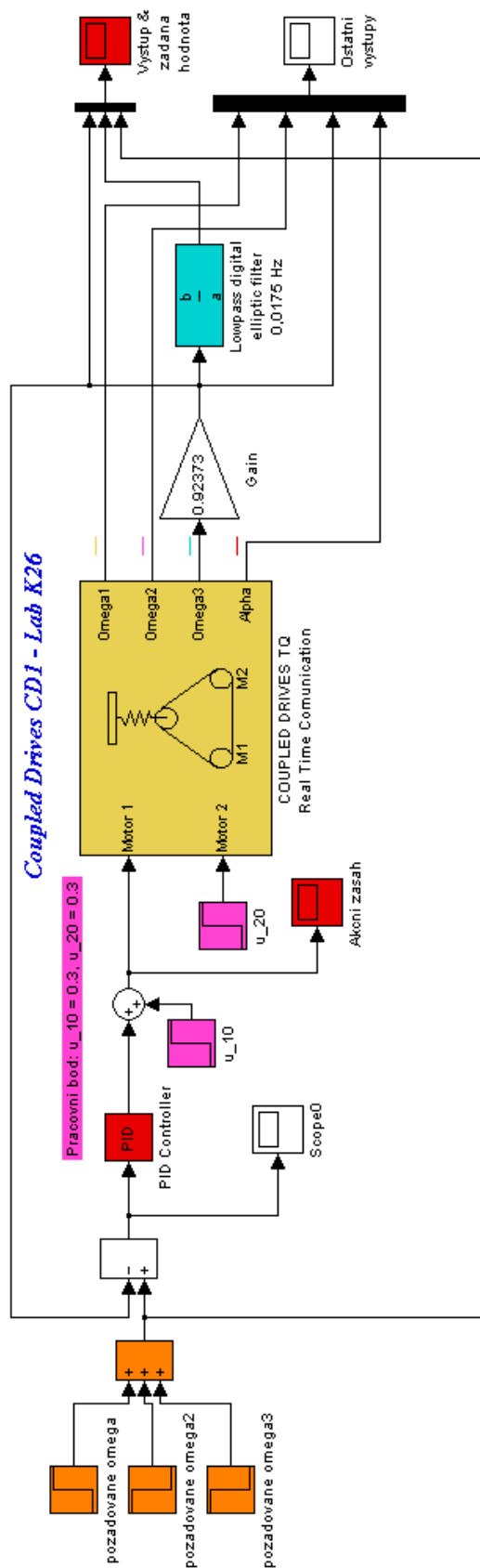
- [14] J. REICHL, M. VŠETIČKA: *Encyklopedie fyziky* [online] (2006 - 2010).
〈<http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=37>〉

Příloha A

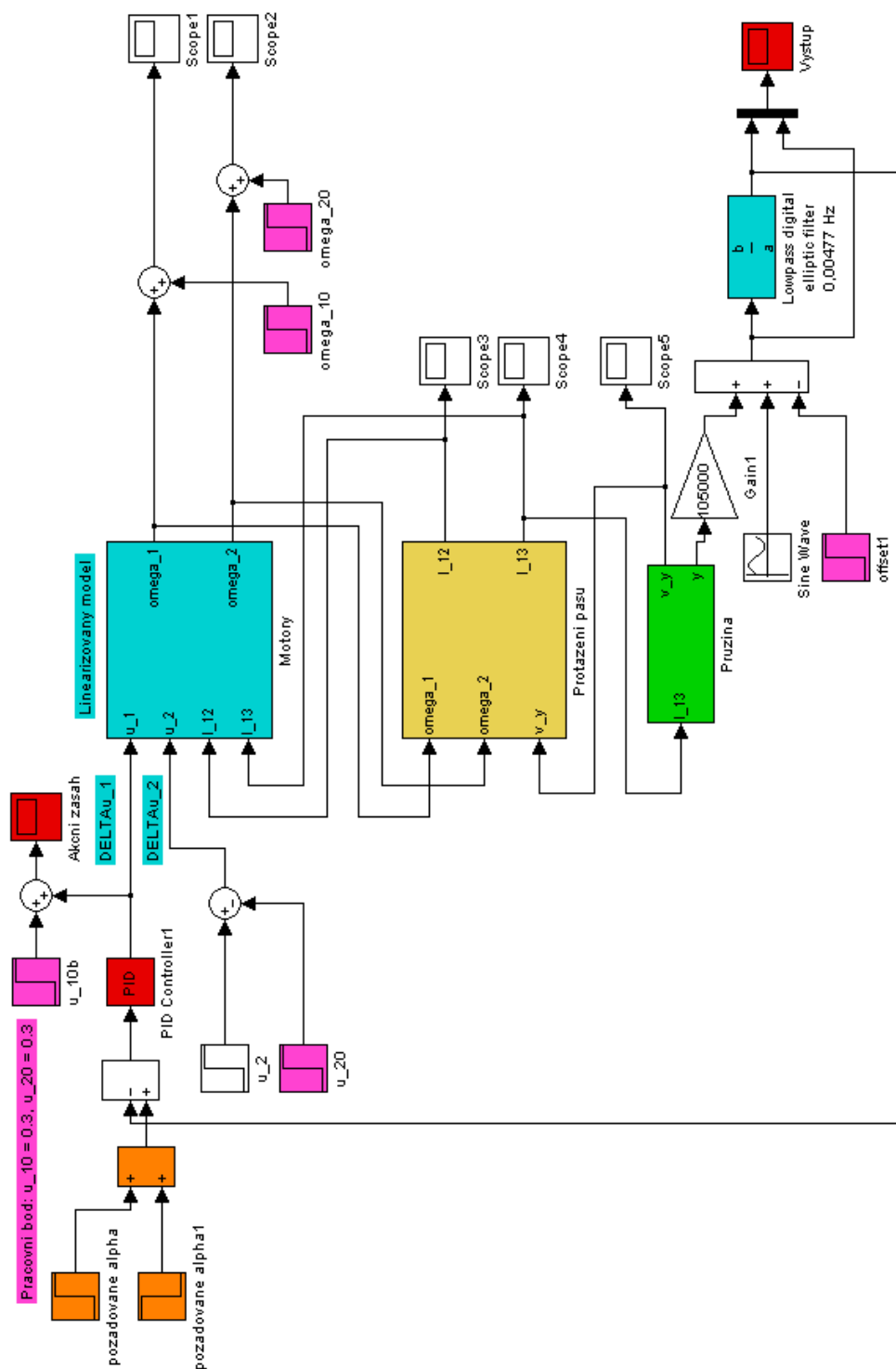
Simulinková schémata



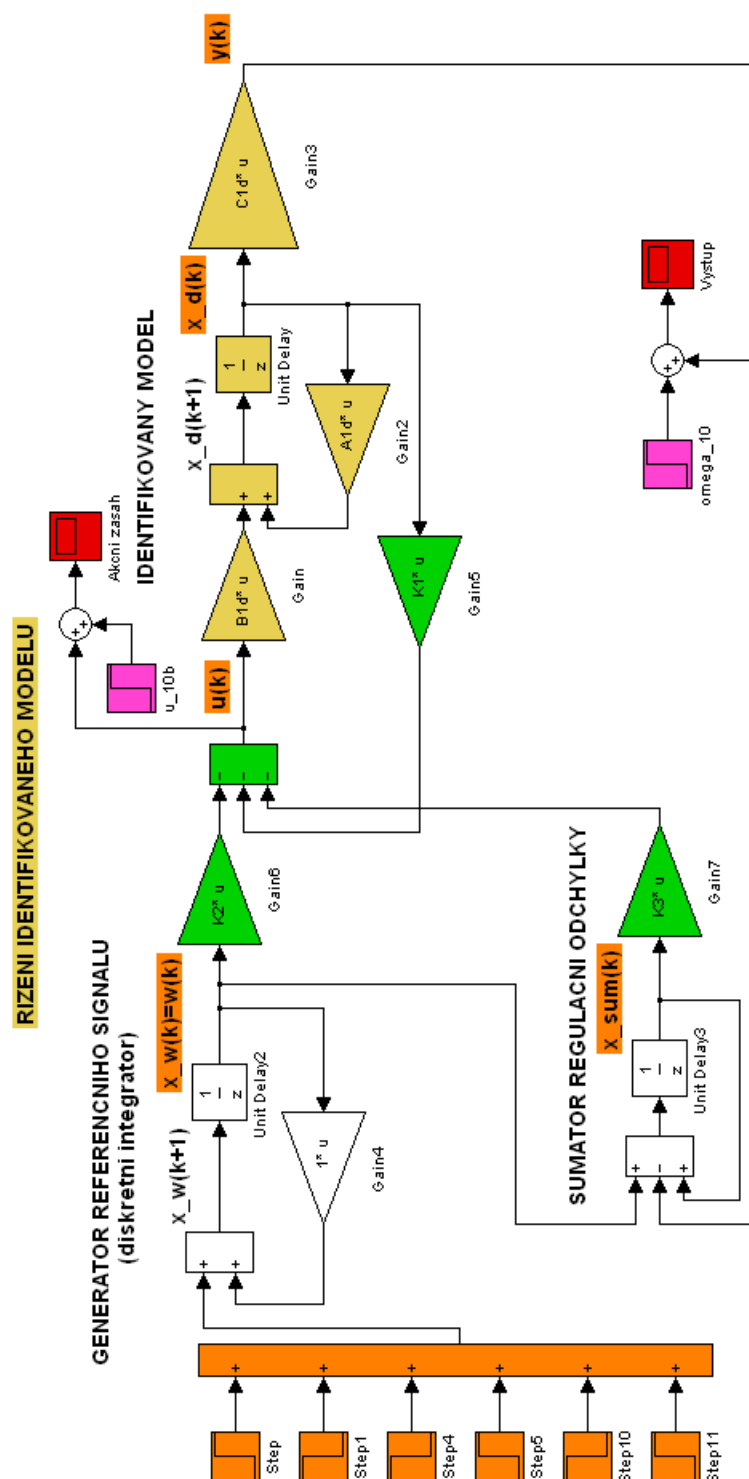
Obrázek A.1: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* na pohyblivém rameni pomocí navrženého **PI regulátoru** - SIMULACE NA MODELU



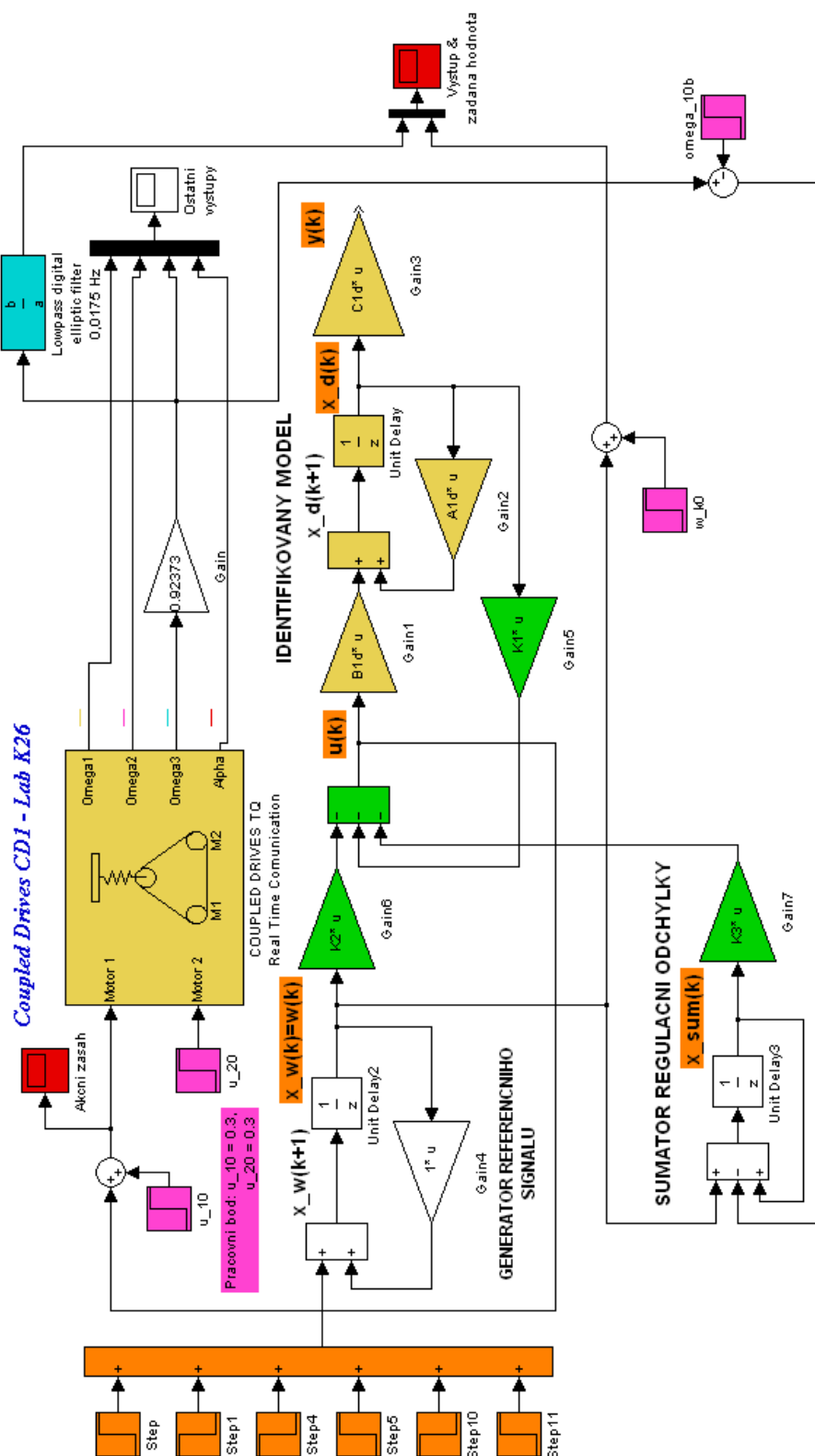
Obrázek A.2: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* na pohyblivém rameni pomocí navrženého *PI regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM



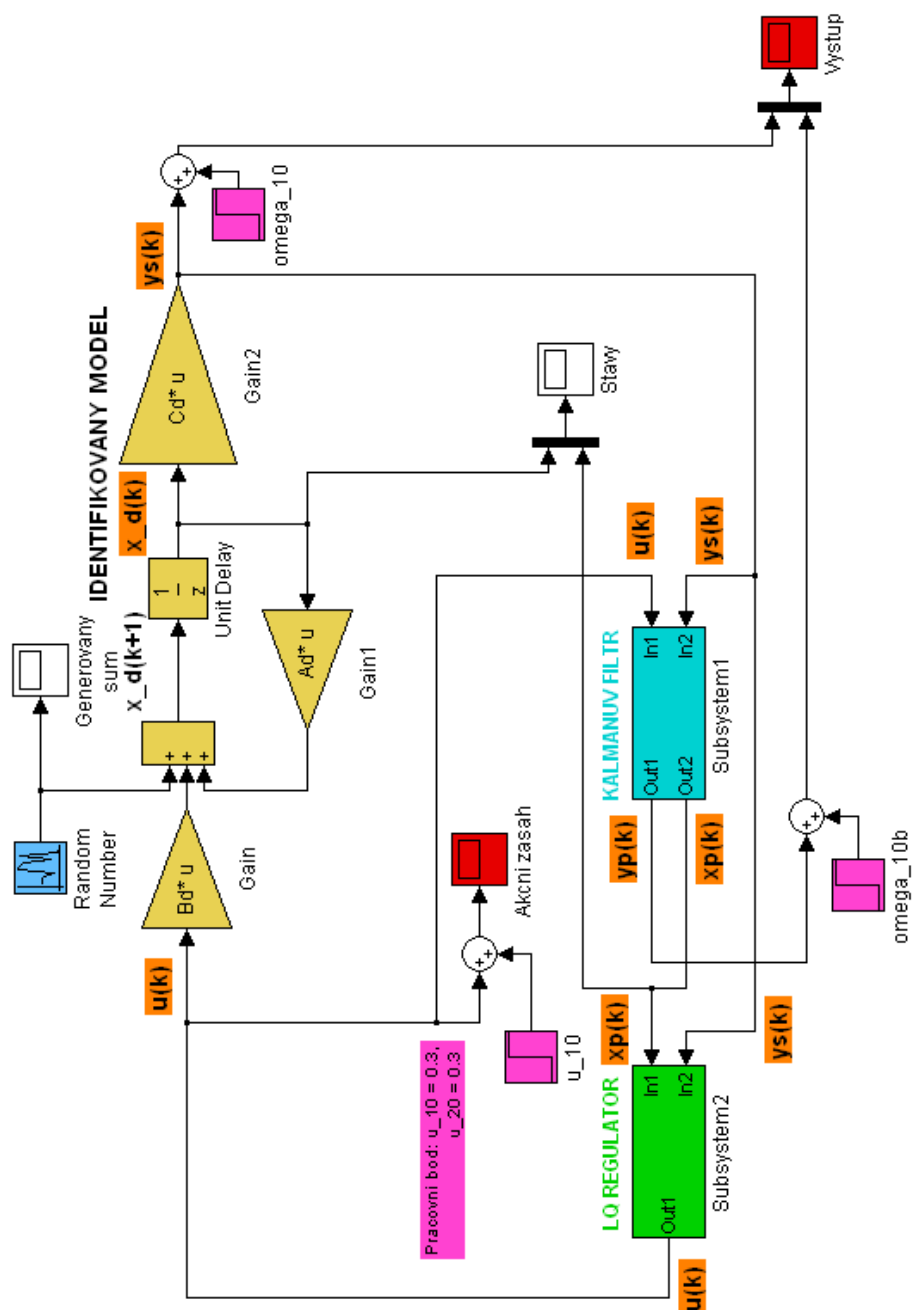
Obrázek A.3: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlu vychýlení ramene* pomocí navrženého **PI regulátoru** - SIMULACE NA MODELU



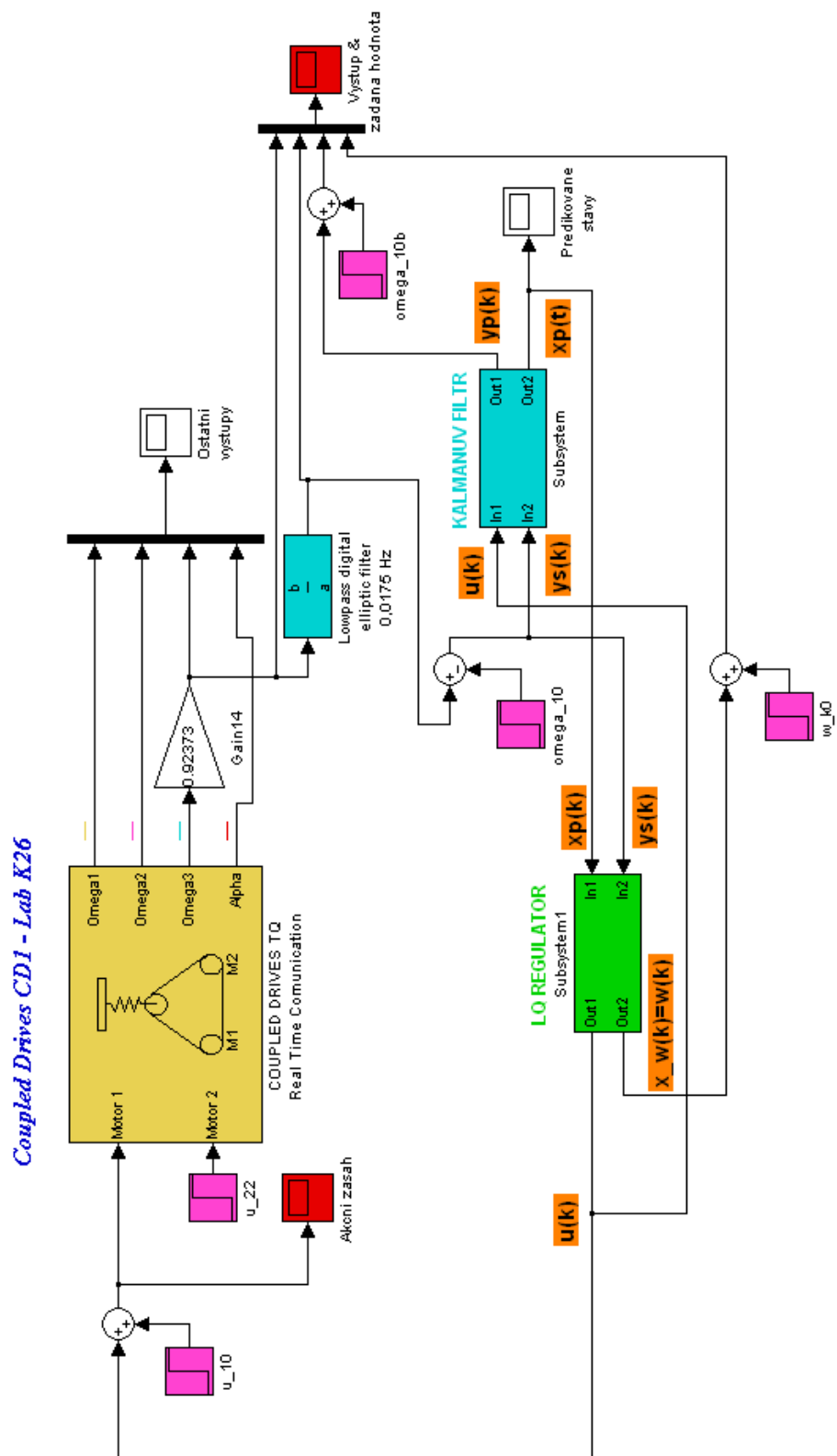
Obrázek A.5: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* pomocí navrženého *LQ regulátoru* - SIMULACE NA MODELU



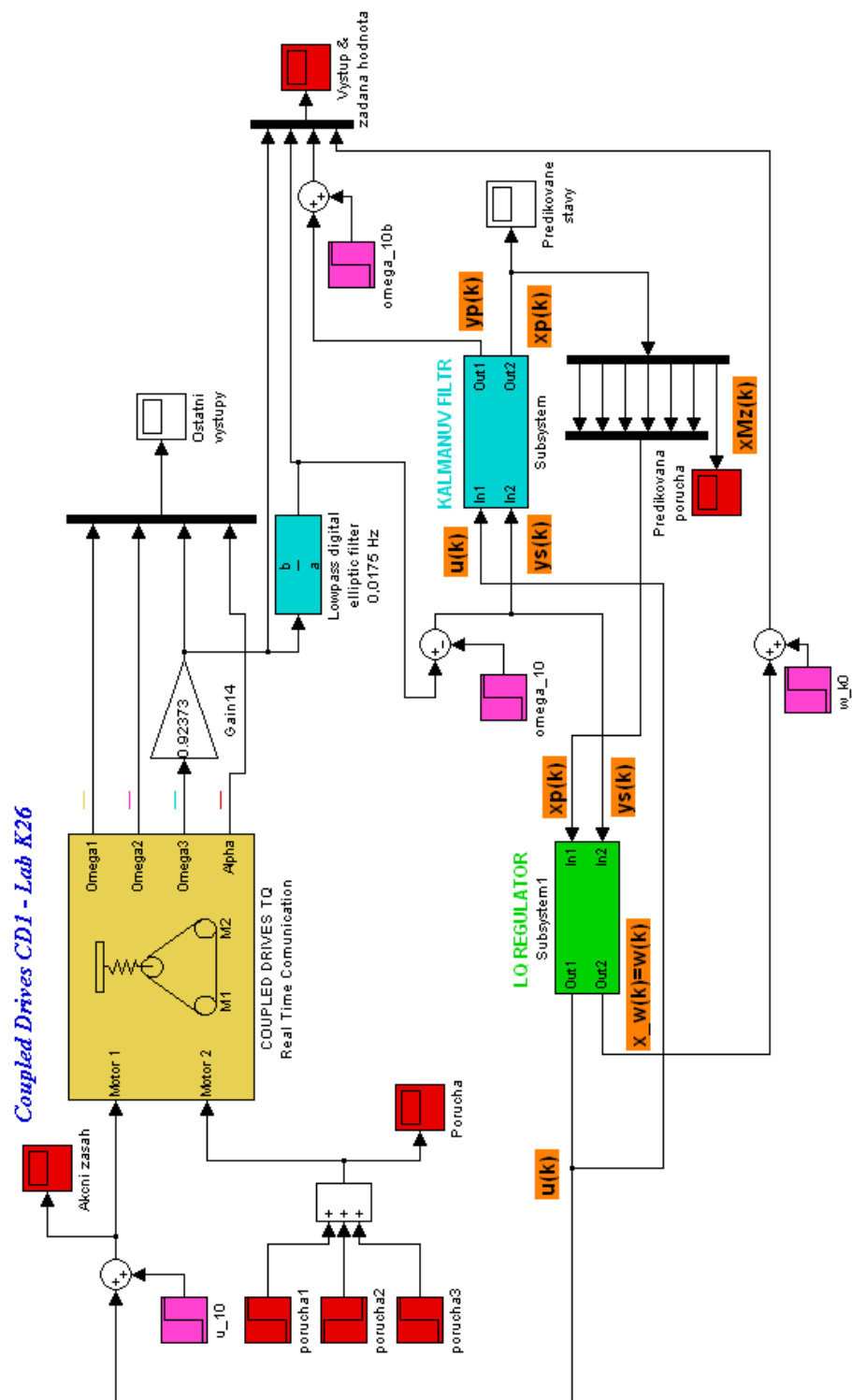
Obrázek A.6: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* pomocí navrženého *LQ regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM



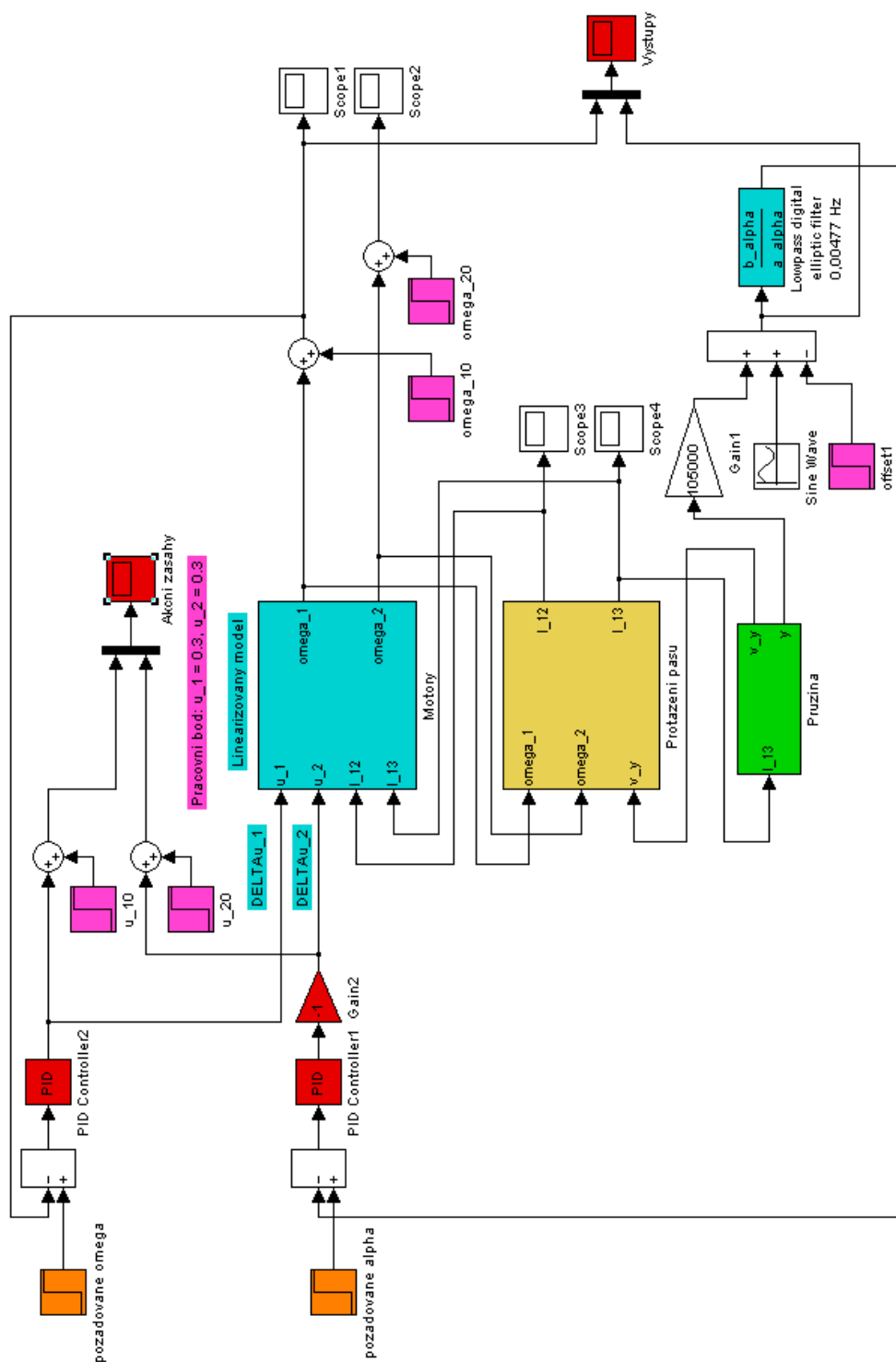
Obrázek A.7: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* pomocí navrženého **LQG regulátoru** - SIMULACE NA MODELU



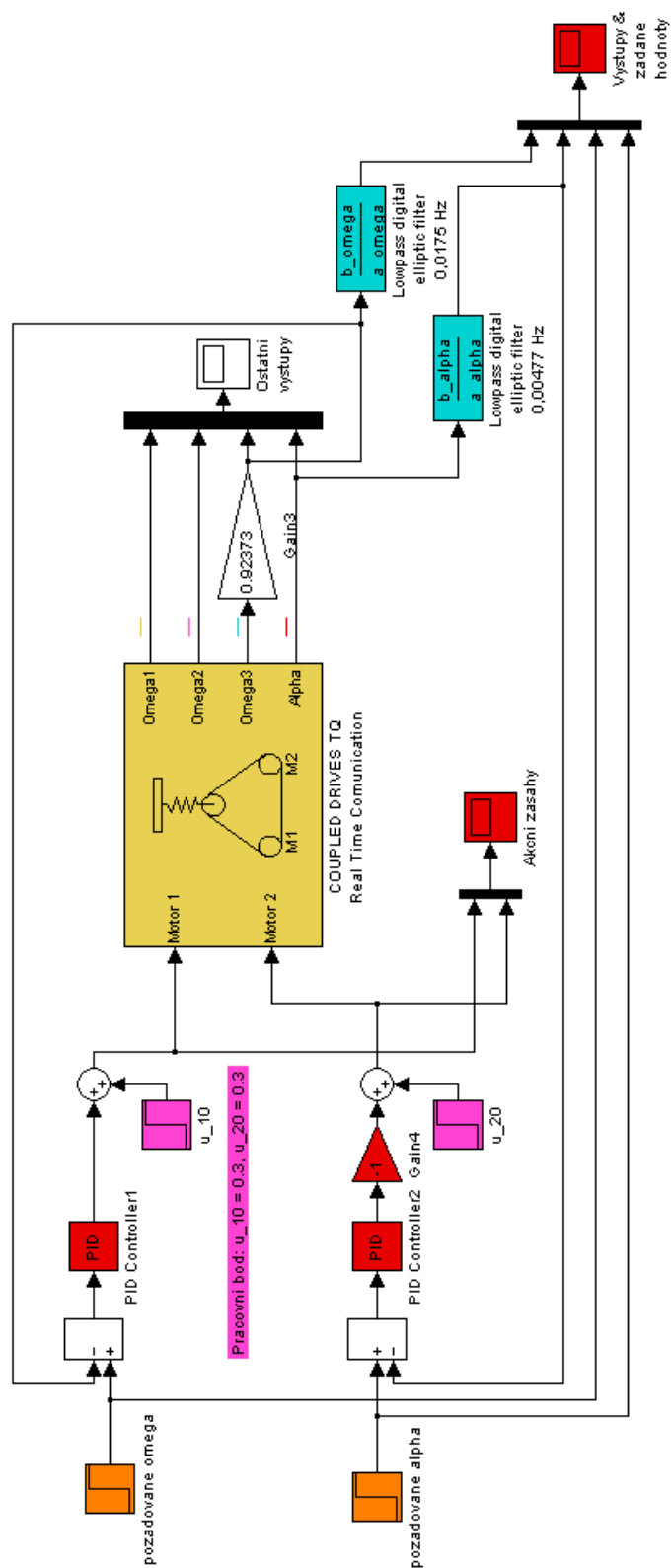
Obrázek A.8: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky* pomocí navrženého *LQG regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM



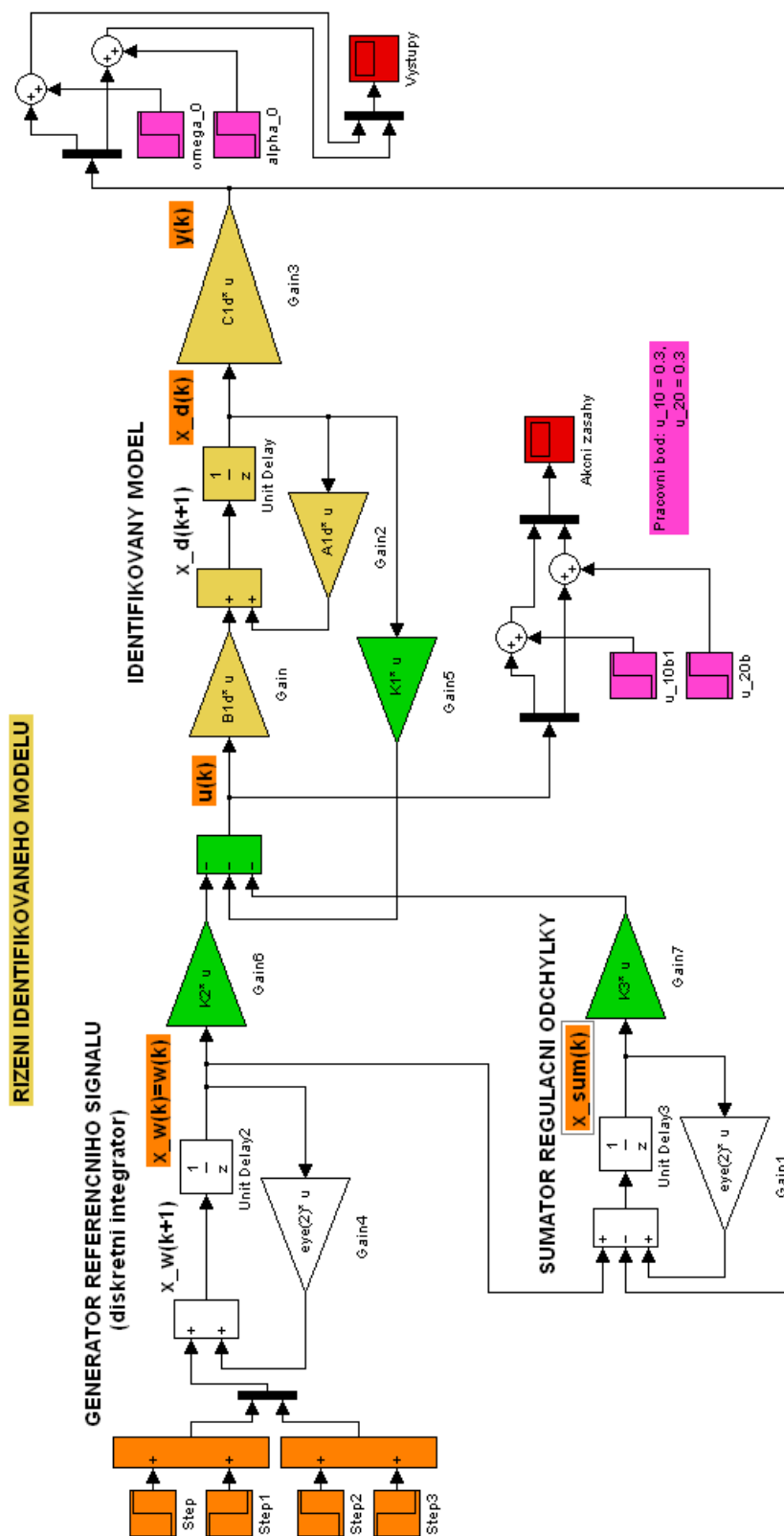
Obrázek A.10: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení *úhlové rychlosti kladky s přidaným poruchovým zatěžovacím momentem* pomocí navrženého *LQG regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM



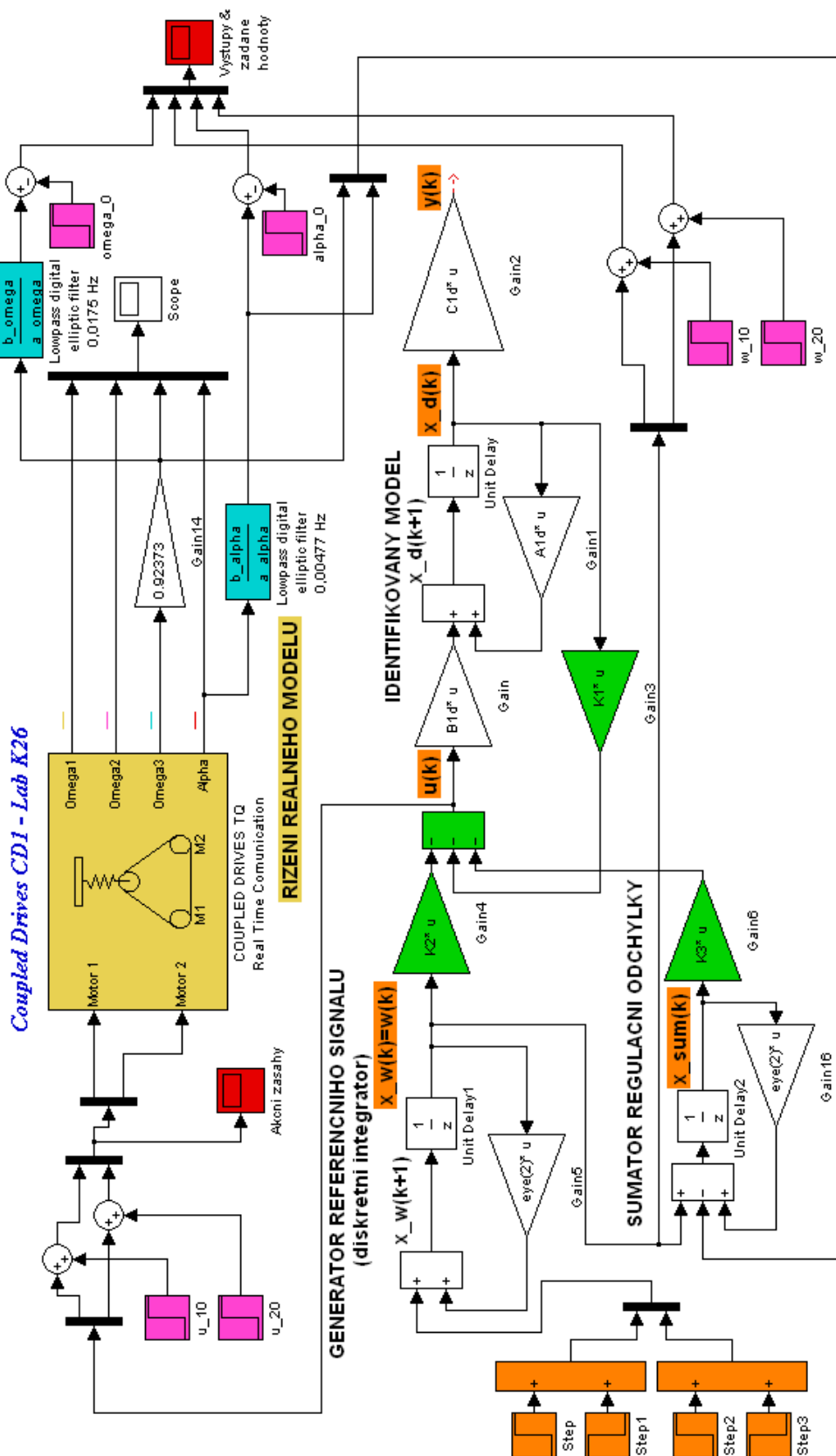
Obrázek A.11: Simulinkové schéma *dvousmyčkové PI regulace MIMO systému - SIMULACE NA MODELU*



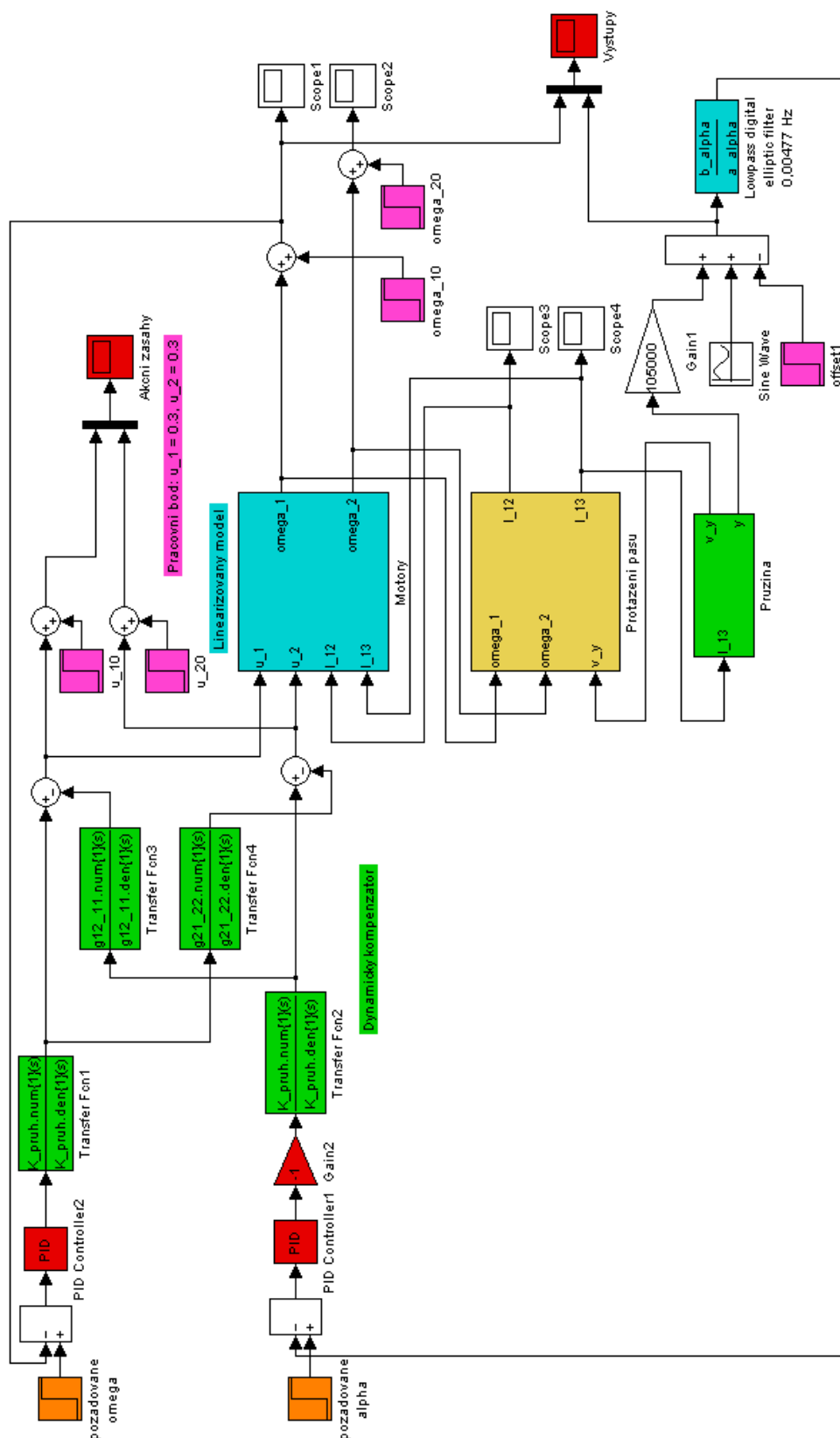
Obrázek A.12: Simulinkové schéma *dvousmyčkové PI regulace MIMO systému - REÁLNÝ SYSTÉM*



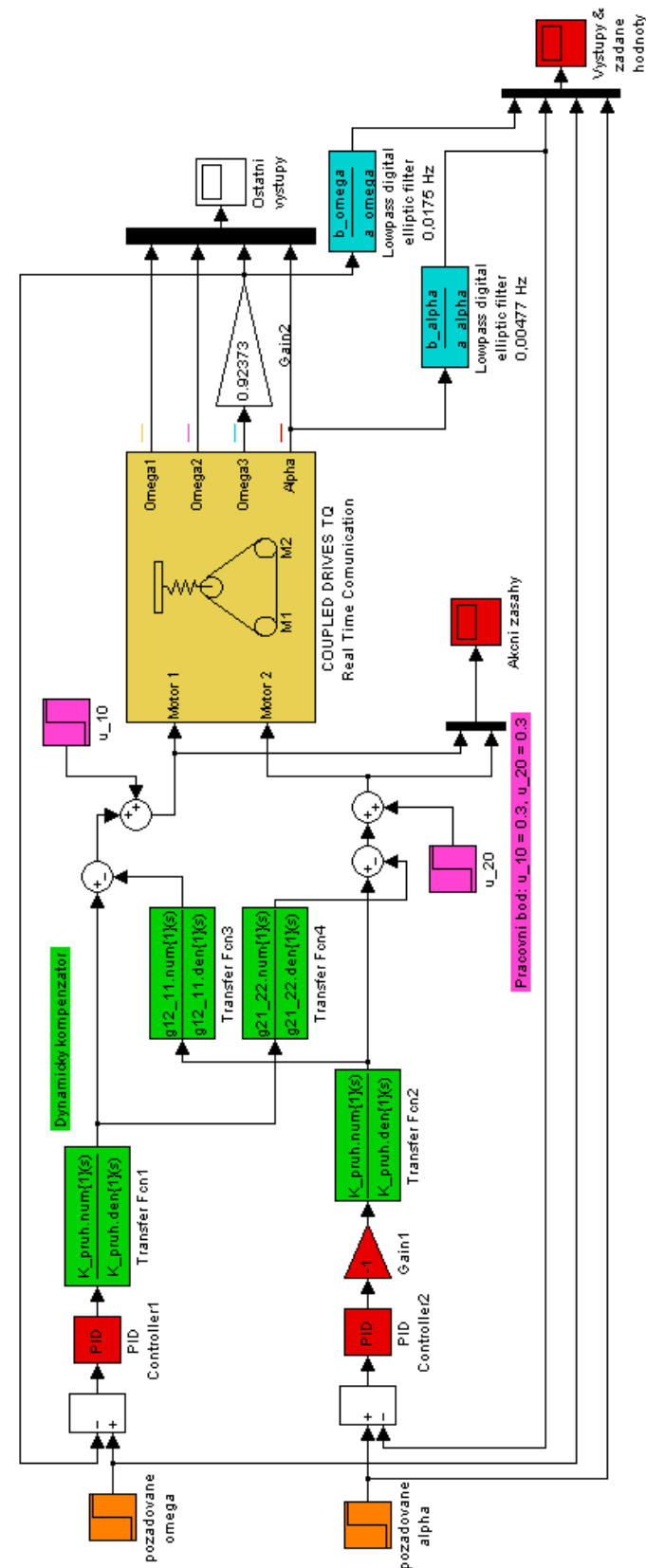
Obrázek A.13: Simulinkové schéma regulace MIMO systému pomocí navrženého *LQ re-gulátoru* - SIMULACE NA MODELU



Obrázek A.14: Simulinkové schéma regulace MIMO systému pomocí navrženého *LQ regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM



Obrázek A.15: Simulinkové schéma regulace MIMO systému pomocí navrženého *dynamického rozvazovacího regulátoru* - SIMULACE NA MODELU



Obrázek A.16: Simulinkové schéma regulace MIMO systému pomocí navrženého *dynamického rozvazovacího regulátoru* - REÁLNÝ SYSTÉM

Příloha B

Obsah příloženého CD

K této práci je přiloženo CD, na kterém jsou uloženy zdrojové kódy pro Matlab-Simulink a další podpůrné soubory.

- Adresář **Formální dokumenty** - zde je uložen tento dokument diplomové práce ve formátu pdf, originální zadávací formulář a prohlášení o samostatném zpracování.
- Adresář **Fotogalerie** - zde jsou uloženy fotografie pořízené při identifikaci laboratorního modelu spojených pohonů a ukázkové video jeho finálního řízení.
- Adresář **Identifikace** - zde jsou uloženy zdrojové kódy a data pro Matlab, které souvisí s kapitolou "Identifikace laboratorního modelu spojených pohonů CE108" (složky: 01 Samotné motory M1M2, 02 Převody jednotek, 03 Identifikace motorů (s gumou), 04 Identifikace pružiny a 05 Kompletace modelu).
- Adresář **Regulace** - zde jsou uloženy zdrojové kódy a data pro Matlab a Simulink, které souvisí s kapitolou "Regulace jednotlivých výstupů MIMO systému" a "Regulace MIMO systému jako celku" (složky: 06 PI regulátor - pro omega3, 07 PI regulátor - pro alpha, 08 LQ regulátor - pro omega3, 09 LQG regulátor - pro omega3, 10 LQG regulátor - pro alpha, 11 LQG s odhadem poruchy - pro omega3, 12 Vícesmyčkový PI regulátor, 13 LQR pro celý MIMO systém a 14 Dynamický rozvazbovací regulátor).