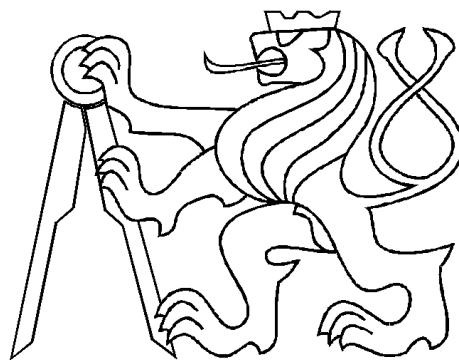


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ



DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řízení laboratorního modelu se spojenými
servomotory



Katedra řídící techniky

Praha, 2010

Autor: Karel Jonáš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Karel Jonáš**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Řízení laboratorního modelu se spojenými servomotory**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s modelem spojené pohony ETH (SE) nacházející se v laboratoři teorie automatického řízení .
2. Odvoděte matematický model tohoto systému.
3. Proveďte identifikaci laboratorního modelu.
4. Pro tento model navrhněte a realizujte základní typ regulace - PID regulátor a LQ regulátor.
5. Pro tento model navrhněte a realizujte pokročilé metody řízení - LQG regulátor a metody robustního řízení.

Seznam odborné literatury:

- [1] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
[2] S. Skogestad , I. Postlethwaite: Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. Second ed., J.Wiley & Sons, 2005

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2010/2011



prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 15. 12. 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze, dne 13. 5. 2010

..... Jan Šík

podpis

Poděkování

V souvislosti se vznikem a realizací této práce bych chtěl poděkovat především vedoucímu diplomové práce panu Ing. Petru Huškovi, Ph.D. a dále také všem lidem z katedry řídicí techniky, kteří byli vždy velice ochotni mi při práci v laboratoři teorie automatického řízení K26 s čimkoliv pomoci nebo poradit, čímž jim děkuji za jejich čas, který mi při tom věnovali.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá matematickým odvozením modelu a identifikací reálného laboratorního modelu se spojenými servomotory ETH, který se nachází v laboratoři teorie automatického řízení K26. Pro identifikaci systému jsou zvoleny 4 rozdílné metody (identifikace z přechodové charakteristiky, identifikace parametrů stavového modelu, identifikace využívající analýzu ve frekvenční oblasti a identifikace ARX modelu).

Poté je pozornost věnována základním a pokročilým metodám řízení. Pro identifikovaný model je nejprve navrženo základní řízení pomocí klasických v praxi běžně používaných PID regulátorů. Toto řízení je aplikováno na reálný ETH systém v laboratoři. Ve snaze docílit lepší kvality regulace jsou v další části této práce použity pokročilé algoritmy řízení z oblasti moderní teorie řízení jako LQ, LQG a robustní řízení.

Regulovanou veličinou je zpravidla úhlová rychlosť, je ale také navržen jeden regulátor polohy. Všechny výsledky dosažené navrženými regulátory jsou porovnány a posléze shrnutы v závěru.

Abstract

This thesis deals with the mathematical derivation of the model and the identification of the real laboratory model with coupled servomotors ETH which is situated in the Laboratory of Automatic Control Theory K26. There are chosen 4 different methods for the identification of the system (identification from step response, identification of the parameters of the state model, identification using frequency domain analysis and ARX model identification).

After that is the attention devoted to basic and advanced control engineering principles. For the identified model is designed at first the basic control by classical PID controllers commonly used in practise. And this is applied to the real ETH system in the laboratory. In effort to achieve better quality of the regulation are used in the next part of this thesis advanced control algorithms from the area of the modern control engineering as LQ, LQG and robust control.

The angular speed is generally controlled variable, but also one controller of the position is designed. All results accomplished by designed controllers are compared and finally summarized in the conclusion.

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Seznámení se s laboratorním modelem ETH (SE)	1
1.2 Připojení systému k PC	4
2 Měření základních charakteristik jednotlivých částí systému ETH	6
2.1 Měření statických převodních charakteristik snímačů	6
2.2 Měření statické převodní charakteristiky motoru	8
2.3 Návrh filtru pro zpracování signálu ze senzorů úhlové rychlosti	9
3 Odvození matematického modelu systému ETH	12
3.1 Fyzikální popis systému ETH	12
3.2 Odvození stavového popisu matematického modelu ETH	15
3.3 Teoretický výpočet momentu setrvačnosti jedné „půlhřídele“	17
4 Identifikace systému se spojenými servomotory ETH	19
4.1 Identifikace z přechodové charakteristiky	19
4.2 Identifikace stavového popisu	21
4.3 Identifikace na základě frekvenční analýzy	26
4.4 Identifikace ARX modelu metodou nejmenších čtverců (LS)	29
5 Zpětnovazební řízení servomechanismu ETH - „klasická“ PID regulace	33
5.1 Návrh PI regulátoru pro řízení polohy hřídele servomechanismu ETH . . .	34
5.2 Návrh PI regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH	38
6 Návrh pokročilých metod řízení - LQ, LQG	42
6.1 Návrh LQ regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH	42
6.2 Návrh LQG modifikace regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH	50
7 Návrh robustního řízení servomechanismu ETH	59
7.1 Návrh „robustního“ PI regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH	62
8 Závěr	70
A Simulinková schémata	74

Kapitola 1

Úvod

V této kapitole se stručně seznámíme s vlastním laboratorním modelem se spojenými servomotory ETH, který si detailněji popíšeme a přestavíme jeho důležité části a způsob připojení k PC.

1.1 Seznámení se s laboratorním modelem ETH (SE)

Laboratorní model se spojenými servomotory ETH „Zuri“92-04 (viz obr. 1.1) nacházející se v laboratoři teorie automatického řízení K26 na katedře řídicí techniky fakulty elektrotechnické ČVUT v Praze je modelem rychlostního servomechanismu původně navrženého a zkonztruovaného na katedře řízení technické university v Zürichu (IfA ETH¹) a jedná se o model určený převážně k výukovým účelům modelování dynamických systémů a jejich řízení.

Model tvoří dva identické stejnosměrné servomotory (levý a pravý). První motor (vlevo) slouží k řízení otáček resp. úhlu natočení hřídele motoru. Druhý motor (vpravo) je používán jako simulace proměnného zatěžovacího momentu. Tyto servomotory jsou ovládány příslušnými vstupními napětími.

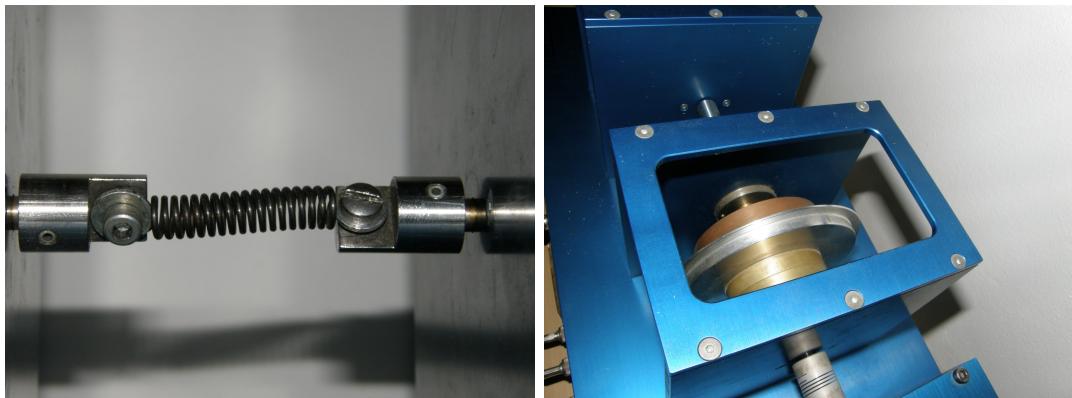
Na hřídeli každého motoru je namontován jeden tachogenerátor pro měření úhlové rychlosti a jeden inkrementální rotační snímač (IRC) pro měření úhlu natočení. Hřídele jsou ve střední části modelu spojeny pružinou a je možné na ně namontovat doplňkové disky a tím měnit moment setrvačnosti příslušné hřídele (detail pružiny a disků namontovaných na hřídeli motoru jsou znázorněny na obr. 1.2).

¹Department of Information Technology and Electrical Engineering of the Swiss Federal Institute of Technology in Zurich (<http://control.ee.ethz.ch/>)



Obrázek 1.1: Laboratorní model se spojenými servomotory ETH (SE)

Obecně lze tedy říci, že model reprezentuje jakýsi systém spojených pohonů podobný těm, které často bývají součástí velkých technických a průmyslových zařízení, kde jsou pohony spojeny dlouhými hřídelemi, u nichž již není zanedbatelná pružnost a krut.



Obrázek 1.2: Detail pružiny a disků namontovaných na hřídeli jednoho z motorů servomechanismu ETH

Schématicky je tento model naznačen na obr. 1.3 (převzato z [5]). Z tohoto principiálního obrázku je na první pohled poměrně dobře patrné, že se jedná o systém s více vstupy a více výstupy (MIMO² systém).

²Multiple-input multiple-output

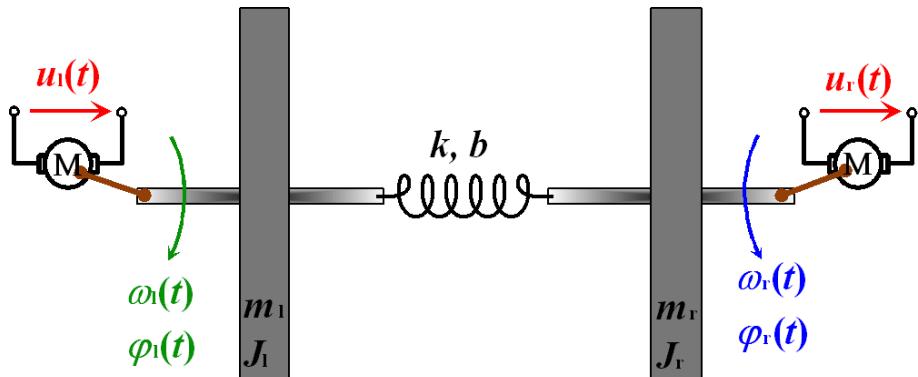
Konkrétně tedy jde o systém se:

- **dvěma vstupy:**

- napětí levého motoru u_l [V],
- napětí pravého motoru u_r [V]

- a **čtyřmi výstupy:**

- úhlová rychlosť levé hřídele ω_l [rad/s],
- úhlová rychlosť pravé hřídele ω_r [rad/s],
- úhel natočení levé hřídele φ_l [rad],
- úhel natočení pravé hřídele φ_r [rad].



Obrázek 1.3: Schematické znázornění servomechanismu ETH

Všechny veličiny jsou převedeny na elektrická napětí a k ovládání modelu je použito PC s programem v prostředí MATLAB/Simulink s Real Time Toolboxem (více o připojení v kap. 1.2), kde jsou všechny veličiny převedeny na bezrozměrná čísla v intervalu $(-1, +1)$.

Jak již bylo řečeno, jedná se tedy o MIMO systém s více vstupy a více výstupy. Nicméně pokud budeme jako vstup uvažovat pouze napětí u_l na kotvě levého motoru a jako výstup úhlovou rychlosť ω_r pravé hřídele, půjde o systém s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO³).

Zatěžování hřídele pomocí pravého motoru⁴ je sice možné, ale vzhledem ke značnému namáhání pružiny již při malém rozdílu otáček ω_l a ω_r mezi levým a pravým motorem se tato možnost příliš nedoporučuje a pro účely této práce jsme ji raději nevyužili.

³Single-Input and Single-Output

⁴Ve schématech někdy označovaném také jako Motor 2 resp. Generátor U

1.2 Připojení systému k PC

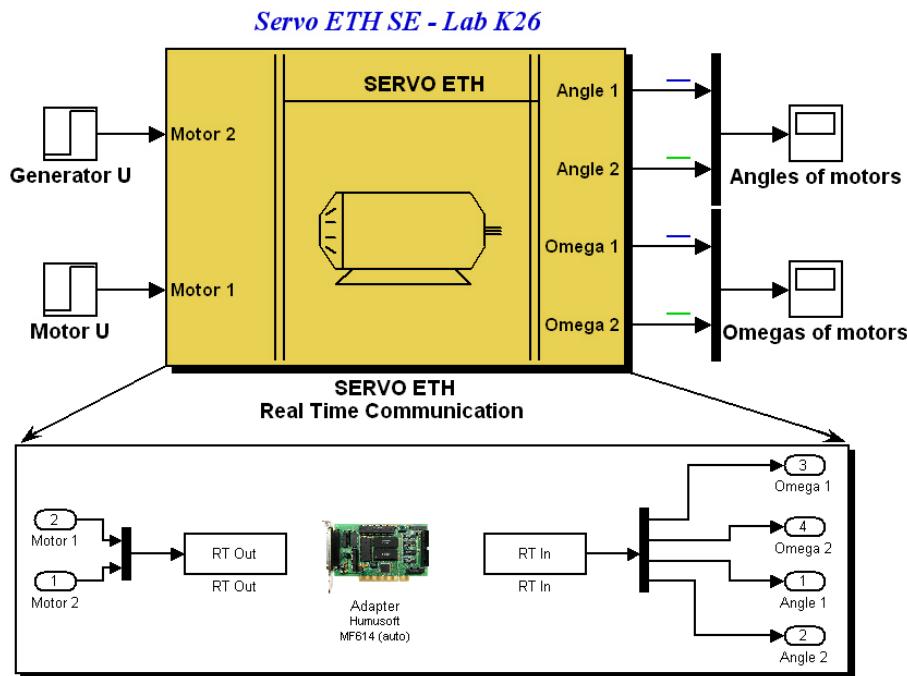
Aby bylo možné laboratorní model řídit přímo z prostředí MATLAB, je připojen k PC přes I/O kartu MF614 firmy Humusoft, s.r.o. Tyto karty jsou podporovány produkty Real Time Toolbox pro MATLAB/Simulink [9], které umožňují komunikovat (ovládat laboratorní modely a měřit jednotlivé veličiny na modelech) pomocí prostředí Simulink.

Přehled vstupů a výstupů měřicí a převodníkové karty je uveden v tabulce 1.1, blokové znázornění připojení laboratorního modelu v prostředí Simulink na obr. 1.4 a reálný pohled na připojení servomechanismu ETH na obr. 1.5.

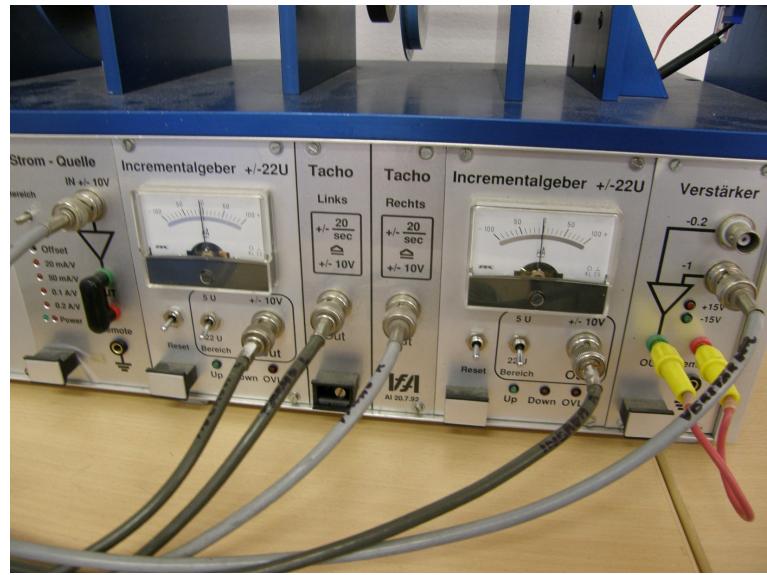
Vstupy IO karty	poloha hřídele 1
	poloha hřídele 2
	otáčky hřídele 1
	otáčky hřídele 2
Výstupy IO karty	napětí pro motor 1
	napětí pro motor 2

Tabulka 1.1: Vstupy a výstupy měřicí a převodníkové karty MF614

Celý systém se v podstatě skládá ze 3 hlavních částí. První část obsahuje vlastní měřicí a převodníkovou kartu MF614 firmy Humusoft s analogovými a digitálními vstupy a výstupy. Druhou část tvoří napěťový zdroj s proudovými senzory a zesilovači a třetí část se potom skládá ze dvou motorů a dvou senzorů úhlové rychlosti a úhlu natočení hřídele.



Obrázek 1.4: Blokové znázornění připojení laboratorního modelu v prostředí Simulink



Obrázek 1.5: Reálný pohled na připojení servomechanismu ETH k PC

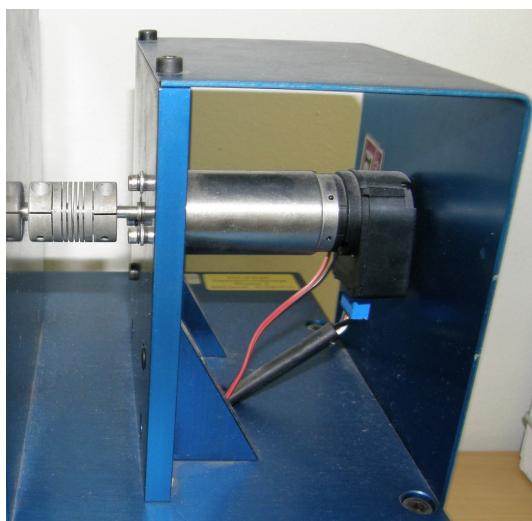
Kapitola 2

Měření základních charakteristik jednotlivých částí systému ETH

Cílem této kapitoly je především představit výsledky měření základních charakteristik snímačů a motorů, které jsou součástí laboratorního modelu ETH. Ty jsou totiž nesmírně důležité pro návrh libovolného typu řízení (kapitoly 5 a 6) a je třeba je respektovat. Kapitola 2.3 se potom věnuje návrhu vhodného filtru pro zpracování signálu ze senzoru úhlové rychlosti.

2.1 Měření statických převodních charakteristik snímačů

Na obr. 2.1 je vidět připojení pravého servomotoru, tachodynamu a IRC snímače laboratorního modelu se spojenými servomotory ETH.



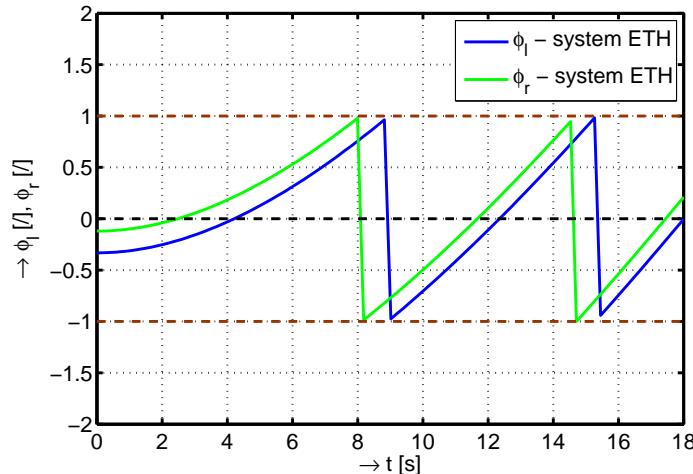
Obrázek 2.1: Připojení snímačů servomechanismu ETH

Jak již víme z předchozí kapitoly, všechny měřené veličiny odpovídající 4 výstupům servomechanismu ETH jsou postupně převáděny na elektrická napětí a do prostředí Simulinku vstupují již jako bezrozměrné číselné hodnoty v intervalu $(-1, +1)$.

Abychom se co nejvíce přiblížili skutečnému řízení reálného systému, je nutné nejprve nalézt převodní vztah mezi bezrozměrnými hodnotami zobrazovanými v prostředí Simulink a reálnými rozměry jednotek jednotlivých veličin v soustavě SI. Za tímto účelem byla provedena dvojice experimentů, jejichž výsledkem bylo určení vzájemných převodních vztahů pro úhlovou rychlosť ω_r a úhel natočení pravé hřídele φ_r :

- **IRC:** $\varphi_r = 1 [/]^5 \approx 21.74$ [ot.] ≈ 136.6 [rad] $\approx 7826.4^\circ$
- **Tachodynamo:** $\omega_r = 1 [/] \approx 1217.5$ [ot./min] ≈ 127.5 [rad/s]

Pokud se dále více zamyslíme nad výstupními daty z IRC senzorů polohy lévé i právě hřídele vykreslenými na obrázku 2.2, vidíme již zmínované omezení měřených veličin φ_l , φ_r do intervalu $(-1, +1)$. Takto upravený výstup z IRC snímačů polohy může v jistém smyslu způsobit komplikace např. při snaze o porovnávání měřených průběhů skutečného systému ETH s jeho matematickým model (odvozeným v následující kapitole 3), kde by odezvy na stejný vstupní signál $u_l = 0.4(t)$ nebyly nijak omezeny a bylo by tedy nutné provést úpravu ať už na jedné nebo druhé straně.



Obrázek 2.2: Signály IRC snímačů - odezva na vstupní signál $u_l = 0.4(t)$

Dále si také můžeme všimnout, že měřené průběhy φ_l a φ_r nevycházejí úplně přesně z počátku, což se dá zdůvodnit tím, že se celá senzorová a měřicí soustava pro měření polohy hřídele chová v jistém smyslu velmi podobně jako snímač *absolutní* (ARC⁶). Takový snímač totiž neztrácí informaci o měřené poloze hřídele ani tehdy, když přestane být napájen.

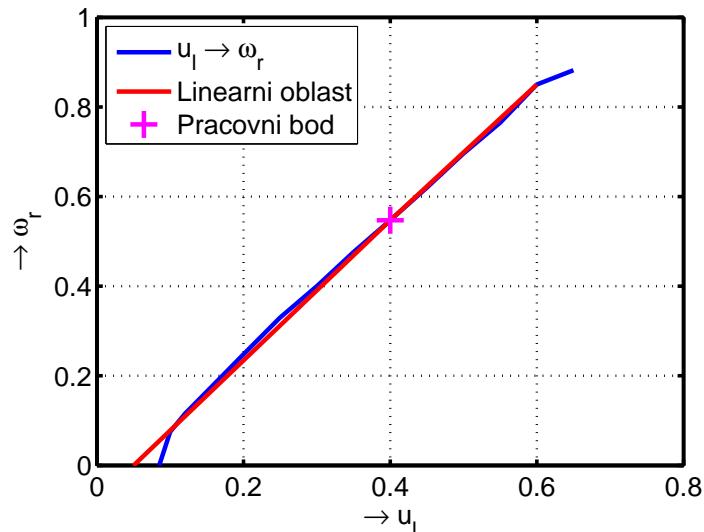
⁵Bezrozměrná jednotková hodnota v prostředí Simulink

⁶Absolutní rotační snímač

Na druhou stranu může být tato vlastnost v některých aplikacích poměrně užitečná. Pokud ale navrhujeme řízení pouze ve smyslu regulace o jistou žádanou hodnotu úhlu natočení hřídele vzhledem k aktuální poloze hřídele (a bylo by např. nutné opětovné spuštění simulace v prostředí Simulink), bylo by jistě mnohem výhodnější použít nějaký zcela *relativní mechanismus* (příp. mechanismus s nulováním), který by vždy začínal od hodnoty 0° .

2.2 Měření statické převodní charakteristiky motoru

Vzhledem k tomu, že se při vlastním řízení laboratorního modelu ETH budeme nadále zabývat zejména řízením úhlové rychlosti ω_r pravé hřídele pomocí napětí levého motoru u_l , byla velmi důkladně proměřena právě závislost ustálených otáček ω_r na vstupním napětí u_l (viz obr. 2.3) a to pro kladný smysl otáčení (napětí $u_l > 0$).



Obrázek 2.3: Statická převodní charakteristika motoru: $u_l \rightarrow \omega_r$

Jeden z nejdůležitějších poznatků z této charakteristiky je asi ten, že je již na první pohled zřejmé, že se jedná o relativně lineární stabilní SISO systém a určitým *lineárním matematickým modelem* ho lze tedy velmi dobře approximovat.

Z naměřené statické převodní charakteristiky motoru byly dále určeny tyto důležité parametry, což jsou základní omezení, kterými se musíme řídit:

Vstupní necitlivost motoru (pásma necitlivosti)	$u_l < 0.05$
Mez saturace motoru	$u_l = 0.6$

Tabulka 2.1: Necitlivost a saturace levého motoru

Z obr. 2.3 je mj. také vidět, že při řízení otáček dokonce není ani příliš nutné motor nejprve rozbíhat na určité pracovní otáčky ω_r , resp. volit nějaký významný *pracovní bod*, abychom se po celou dobu regulace pohybovali pouze v „lineární oblasti“ (tedy někde v intervalu $0.1 \leq u_l \leq 0.6$), protože chyba vzniklá určitou drobnou nelinearitou při uvažování rozběhu motoru již od $u_l \geq 0.05$ bude poměrně zanedbatelná. Přesto se jako vhodný pracovní bod jeví hodnota přibližného středu „lineární oblasti“: $u_l = 0.4$.

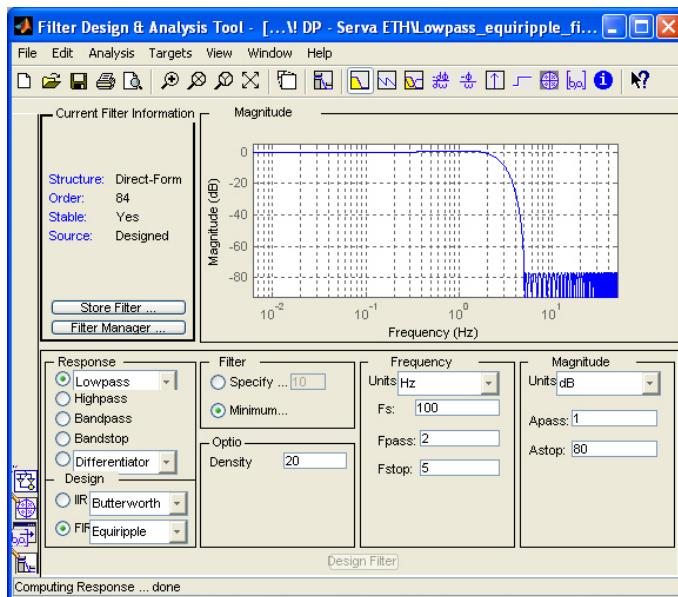
2.3 Návrh filtru pro zpracování signálu ze senzoru úhlové rychlosti

Na rozdíl od signálů IRC snímačů znázorněných na obr. 2.2 jsou data získaná ze senzorů úhlové rychlosti (ω_l a ω_r) poměrně citelně zatížena vysokofrekvenčním šumem (jak je vidět dále na obr. 2.6). Nehledě na to, že tento šum velmi výrazně zakrývá i vlastní dynamiku systému. Je tedy nezbytně nutné tyto signály nejprve vhodným způsobem předzpracovat, tzn. navrhnut vedený způsob filtrace.

Z tohoto důvodu tedy byl proveden návrh dvou číslicových filtrů typu dolní propust ve verzi FIR i IIR a následně vybrán ten lepší z nich:

1. FIR - Lowpass Equiripple filter

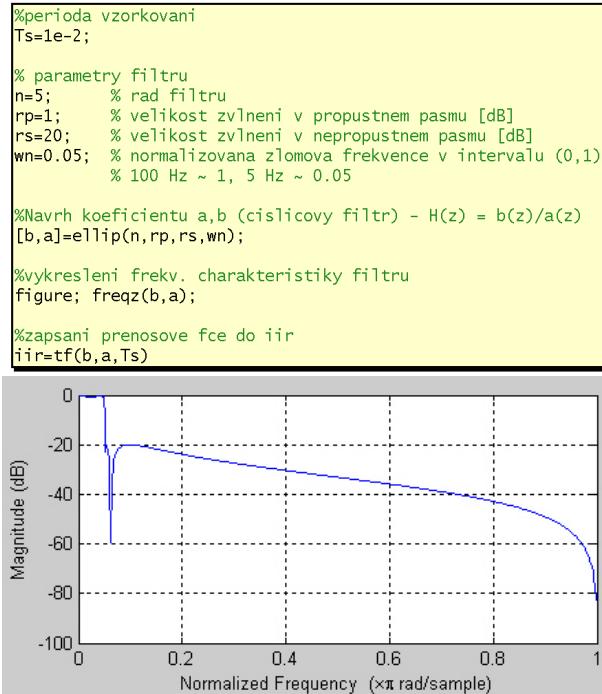
- Zvolené parametry filtru:
 - mezní frekvence zlomu: 5 Hz
 - řád filtru: požadován co nejnižší
 - vzorkovací frekvence: 100 Hz



Obrázek 2.4: Návrh dolnofrekvenčního filtru typu **FIR** (Lowpass Equiripple filter, 5 Hz) pomocí nástroje **fdatoool**

Tento filtr navržený pomocí nástroje `fdatool`⁷ fungoval při simulacích velmi spolehlivě, nicméně na druhou stranu vzhledem k poměrně velkému řádu filtru ($n = 84$) příliš nevyhověl z hlediska zpoždění filtrovaného signálu. Proto byl proveden ještě jeden principielně odlišný návrh filtru typu IIR, jehož řád byl zvolen výrazně nižší.

2. IIR - Lowpass Elliptic filter



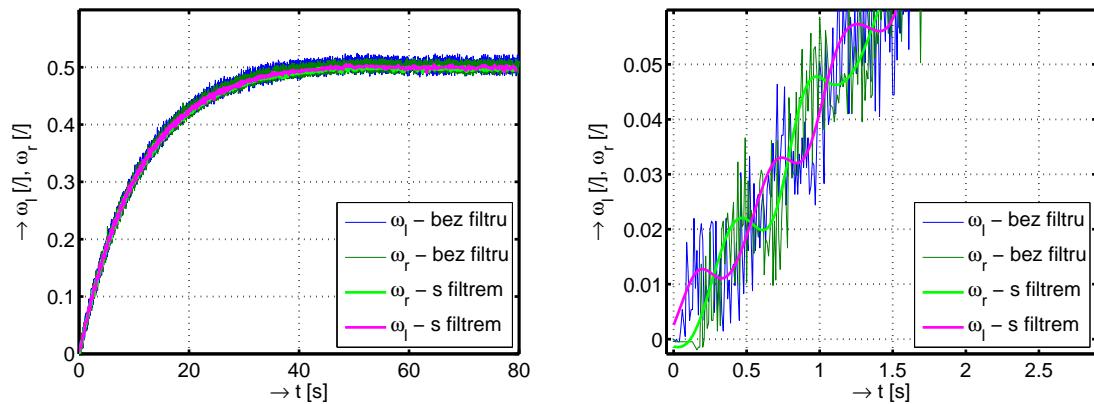
Obrázek 2.5: Přímý návrh dolnofrekvenčního filtru typu IIR (Lowpass Elliptic filter, 5 Hz) v MATLABu a jeho aplitudová frekvenční charakteristika

Odezva filtru IIR je výrazně rychlejší než v případě filtru FIR a zpoždění filtrovaného signálu je prakticky zanedbatelné. Proto byl tento filtr nakonec vybrán jako vhodnější.

Úspěšnost filtrování vf šumu ze signálů úhlové rychlosti ω_l a ω_r je potom prezentována na obrázku 2.6. V právě části je zachycen detail rozběhu levého motoru, kde je po vyfiltrování nežádoucího šumu také mnohem lépe patrná i vlastní dynamika systému ETH.

Je zde vidět, že se otáčivý moment přenáší přes pružinu postupně z levé hřídele na pravou, u které je průběh úhlové rychlosti ω_r jakoby fázově zpozděn.

⁷Běžně dostupný nástroj pro návrh číslicových filtrů, který je součástí systému MATLAB (Signal Processing Toolbox)



Obrázek 2.6: Filtrace vf šumu ze signálů úhlové rychlosti ω_l a ω_r + detail při rozzběhu

Kapitola 3

Odvození matematického modelu systému ETH

Smyslem této kapitoly je na základě fyzikální podstaty řízeného laboratorního modelu se spojenými servomotory ETH nálezení jeho přesný matematický popis zachycující všechny důležité aspekty dynamického chování tohoto systému a tento popis za účelem matematického modelování převést do tvaru stavových rovnic.

3.1 Fyzikální popis systému ETH

Odvozování matematického modelu začneme připomenutím blokového schématu servomechanismu ETH s vyznačenými důležitými částmi celé soustavy.



Obrázek 3.1: Blokové schéma servomechanismu ETH

Mimo jiné si lze v tomto blokovém schématu ale i na čelním panelu laboratorního modelu na obr. 1.5 také všimnout použití dvou zcela odlišných typů zesilovačů pro řízení levého a pravého motoru, což naznačuje, že buzení levého a pravého motoru je rozdílné. Zatímco levý servomotor je buzen z výkonového zdroje proudu, pravý motor je buzen ze zdroje napětí.

Stručný přehled nejdůležitějších parametrů motoru potom udává tab. 3.1, kde jsou uvedeny všechny důležité parametry levého (hnacího) motoru servomechanismu ETH⁷.

⁷Převzato z originální dokumentace

Jmenovité napětí	24	V
Vydávaný výkon	23	W
Max. otáčky	9000	ot./min
Indukčnost kotvy	0.75	mH
Odpor vinutí kotvy	6.2	Ω
Převodní konstanta momentu	$33 \cdot 10^{-3}$	Nm/A
Moment setrvačnosti rotoru	$2 \cdot 10^{-6}$	kgm ²
Mechanická časová konstanta	$11 \cdot 10^{-3}$	s

Tabulka 3.1: Parametry levého servomotoru

Při sestavení matematického modelu elektromechanického systému se soustřednými parametry budeme dále podle [3] vycházet z jeho kinematického schématu, které u rotačních soustav zpravidla obsahuje tyto 3 základní vzájemně vázané stavební prvky (obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Základní prvky rotačních soustav

Pohybová rovnice *kotouče* (2. Newtonův pohybový zákon pro rotační pohyb) vypadá následovně:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_h, \quad (3.1)$$

kde M_h je vnější hnací moment a J je moment setrvačnosti rotujícího tělesa.

Moment M_k přenášený *torzní pružinou* je potom úměrný úhlu zkroucení pružiny φ podle vztahu:

$$M_k = k \cdot \varphi, \quad (3.2)$$

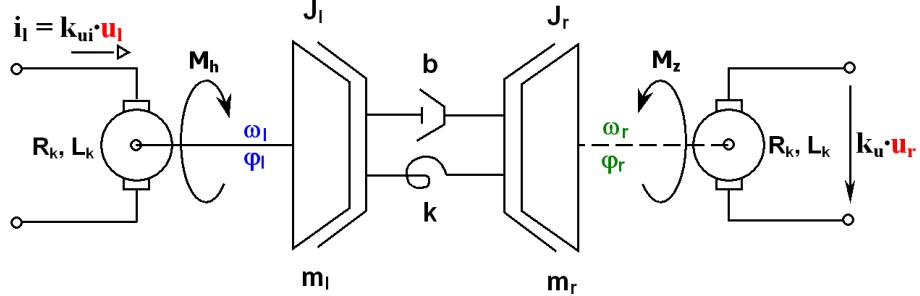
kde k je tzv. *torzní tuhost pružiny*.

Torzní tlumič je prvek, na kterém se energie soustavy maří, přeměňuje se v jinou formu energie - tepelnou. Moment M_b vyvozený torzním tlumičem je úměrný úhlové rychlosti ω podle vztahu:

$$M_b = b \cdot \omega, \quad (3.3)$$

kde b je *koeficient torzního tlumení*.

Nyní se na náš systém spojených servomotorů podíváme trochu podrobněji. Servomechanismus ETH z fyzikálního hlediska představuje systém se dvěma stupni volnosti typu „pružná hřídel“ (se skutečnou pružinou uprostřed spojující oba hřídele motorů), která se dá modelovat jako pružné spojení dvou kotoučů, obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Kinematické schéma servomechanismu ETH

Nejprve opět připomeňme, že při sestavování matematického modelu nebudeme dále uvažovat působení zatěžovacího momentu M_z simulovaného pomocí pravého (brzdicího) motoru, který je řízen napětím u_r ($M_z = 0$).

Pokud při odvozování matematického modelu vycházíme z tzv. d' Alembertova principu momentů na hřideli, dostáváme vztah pro *rovnováhu momentů na levé hřidle*:

$$M_h = M_{J_l} + M_{k_l} + M_{b_l}, \quad (3.4)$$

kde M_h je hnací moment levého motoru a M_{J_l} moment setrvačných sil levé „půlhřidle“ daný celkovým momentem setrvačnosti motoru a všech rotačních částí J_l na levé straně modelu podle:

$$M_{J_l} = J_l \frac{d\omega_l}{dt}. \quad (3.5)$$

Obdobně jako v rovnicích (3.2) a (3.3) lze dále psát vztahy pro direktivní moment M_{k_l} a brzdicí moment M_{b_l} pouze s tím rozdílem, že tyto momenty jsou vždy dány rozdílem úhlů natočení obou hřidelí resp. rozdílem úhlových rychlostí levé a pravé hřidele:

$$M_{k_l} = k(\varphi_l - \varphi_r), \quad (3.6)$$

$$M_{b_l} = b(\omega_l - \omega_r). \quad (3.7)$$

Např. pokud by byly úhly natočení φ_l a φ_r stejné, potom by jistě nedocházelo ke zkrukování pružiny (obr. 1.2) a tedy moment M_{k_l} by byl roven nule. Obdobně pro nulový rozdíl úhlových rychlostí ω_l a ω_r je $M_{b_l} = 0$.

Rovnici (3.4) popisující rovnováhu momentů na hřidle tedy můžeme přepsat do tvaru:

$$M_h = J_l \frac{d\omega_l}{dt} + k(\varphi_l - \varphi_r) + b(\omega_l - \omega_r). \quad (3.8)$$

Zcela analogicky odvodíme i rovnováhu momentů na na pravé hřídeli:

$$0 = M_{J_r} + M_{k_r} + M_{b_r} \quad (3.9)$$

a tedy:

$$0 = J_r \frac{d\omega_r}{dt} + k (\varphi_r - \varphi_l) + b (\omega_r - \omega_l). \quad (3.10)$$

3.2 Odvození stavového popisu matematického modelu ETH

Jako stavové proměnné, které jednoznačně popisují stav našeho laboratorního modelu se spojenými servomotory, se v našem případě přímo nabízí zvolit všechny 4 výstupní veličiny servomechanismu ETH.

Vektor stavových proměnných tedy bude vypadat následovně:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_l(t) \\ \omega_l(t) \\ \varphi_r(t) \\ \omega_r(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Stavové rovnice potom snadno odvodíme tak, že po jednoduchých algebraických úpravách rovnic (3.8) a (3.10) k těmto rovnicím pouze formálně připíšeme známé vztahy pro výpočet úhlových rychlostí $\omega_l(t)$ a $\omega_r(t)$ levého a pravého motoru:

$$\omega_l(t) = \frac{d\varphi_l(t)}{dt}, \quad \omega_r(t) = \frac{d\varphi_r(t)}{dt}. \quad (3.12)$$

Stavové rovnice systému ETH tedy potom vypadají následovně:

$$\dot{\varphi}_l(t) = \omega_l(t), \quad (3.13)$$

$$\dot{\omega}_l(t) = \frac{1}{J_l} (-k\varphi_l(t) - b\omega_l(t) + k\varphi_r(t) + b\omega_r(t) + M_h(t)), \quad (3.14)$$

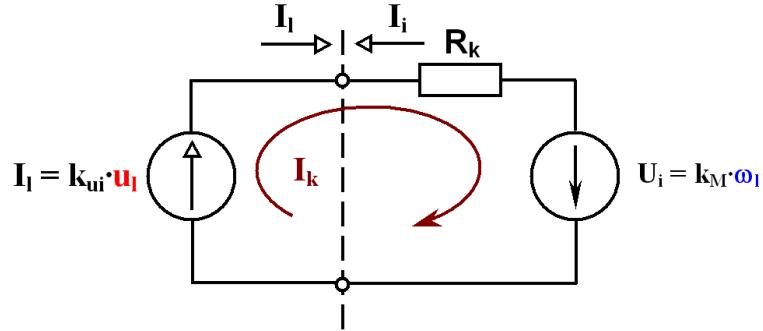
$$\dot{\varphi}_r(t) = \omega_r(t), \quad (3.15)$$

$$\dot{\omega}_r(t) = \frac{1}{J_r} (k\varphi_l(t) + b\omega_l(t) - k\varphi_r(t) - b\omega_r(t)). \quad (3.16)$$

Jediným úskalím však v tomto případě zůstává to, že vstupem do systému je nyní hnací moment $M_h(t)$ a my máme jako vstup pro řízení laboratorního modelu k dispozici pouze napětí motoru u_l .

Nicméně právě pomocí vstupního napětí levého motoru $u_l(t)$ dochází k přeměně elektrické energie na energii mechanickou s vyvozením hnacího momentu $M_h(t)$. Zbývá tedy určit, jak závisí velikost hnacího momentu levého motoru $M_h(t)$ na vstupním napětí $u_l(t)$.

Levý servomotor je v principu klasický stejnosměrný motor s cizím buzením, pro jehož obvod kotvy lze nakreslit náhradní schéma, obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Náhradní schéma pro obvod kotvy levého motoru

Hnací moment M_h je pro stejnosměrný motor s cizím buzením úměrný proudu protěkaného obvodem kotvy I_k podle vztahu:

$$M_h = k_M \cdot I_k, \quad (3.17)$$

kde k_M je konstanta motoru nebo též konstanta momentu a podle tab. 3.1 je $k_M = 33 \cdot 10^{-3}$ Nm/A. Odpor vinutí kotvy R_k potom je 6.2Ω . Indukčnost kotvy L_k je relativně malá a vzhledem k tomu, že je motor buzen z výkonového zdroje proudu, ji lze zanedbat.

Jelikož se v obvodu 3.4 vyskytují dva rozdílné typy zdrojů - jeden zdroj proudu I_l řízený napětím u_l a jeden zdroj indukovaného protinapětí U_i , je vhodné výsledný proud kotvy I_k , vypočítat pomocí *principu superpozice* jako součet příspěvků od obou zdrojů:

$$I_k = I_l - I_i = k_{ui} \cdot u_l - \frac{k_M \cdot \omega_l}{R_k}, \quad (3.18)$$

kde indukované napětí U_i je úměrné úhlové rychlosti ω_l ($U_i = k_M \cdot \omega_l$).

Po dosazení (3.18) do (3.17) můžeme stavové rovnice přepsat do tvaru:

$$\dot{\varphi}_l(t) = \omega_l(t), \quad (3.19)$$

$$\dot{\omega}_l(t) = -\frac{k}{J_l} \varphi_l(t) - \left(\frac{b}{J_l} + \frac{k_M^2}{J_l R_k} \right) \omega_l(t) + \frac{k}{J_l} \varphi_r(t) + \frac{b}{J_l} \omega_r(t) + \frac{k_M k_{ui}}{J_l} u_l(t) \quad (3.20)$$

$$\dot{\varphi}_r(t) = \omega_r(t), \quad (3.21)$$

$$\dot{\omega}_r(t) = \frac{k}{J_r} \varphi_l(t) + \frac{b}{J_r} \omega_l(t) - \frac{k}{J_r} \varphi_r(t) - \frac{b}{J_r} \omega_r(t), \quad (3.22)$$

kde vstupem je tentokrát napětí levého motoru ($u(t) = u_l(t)$).

Pokud jako výstup SISO systému zvolíme úhlovou rychlosť pravé hřídele ($y(t) = \omega_r(t)$), můžeme náš systém zapsat v maticovém tvaru jako:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), \quad (3.23)$$

$$y(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t), \quad (3.24)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_l} & -\frac{b}{J_l} - \frac{k_M^2}{J_l \cdot R_k} & \frac{k}{J_l} & \frac{b}{J_l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_r} & \frac{b}{J_r} & -\frac{k}{J_r} & -\frac{b}{J_r} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_M \cdot k_{ui}}{J_l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= [0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Simulinkové schéma tohoto matematického modelu je uvedeno v příloze na obrázku A.1.

Aby bylo možné porovnávat stavové veličiny matematického modelu přímo s reálnými měřenými průběhy výstupů laboratorního modelu ETH v prostředí Simulink, jsou tyto veličiny přenásobeny převodními konstantami podle statických převodních charakteristik snímačů uvedených v 2.1.

Neznámé koeficienty J_l , J_r , k , b budou dále předmětem identifikace v sekci 4.2.

3.3 Teoretický výpočet momentu setrvačnosti jedné „půlhřídele“

Jak je vidět z výše odvozených stavových rovnic matematického modelu, je parametr momentu setrvačnosti J_l resp. J_r všech rotačních částí na levé nebo pravé hřídeli laboratorního modelu ETH základním a rozhodujícím parametrem určujícím dynamiku celého systému. Proto je třeba tento parametr určit s co možná největší přesností.

Jako jedna z možných variant se mj. nabízí využití výpočtu momentu setrvačnosti rotačního válce:

$$J_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\rho_i V_i r_i^2 \quad (3.25)$$

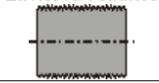
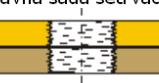
a tímto tělesem všechny rotační části i složitější tělesa zjednodušit. To s sebou sice přináší riziko vzniku jistých nepřesností, nicméně pro vytvoření představy o tom, v jakých řádech a jednotkách se bude parametr pohybovat to postačuje.

Jelikož měření hmotností všech rotačních částí by vyžadovalo důkladné rozebrání a sestavení celého modelu, je v tomto případě lepší využít výpočtu pomocí hustoty a objemu dané součástky tak, jak je uvedeno v (3.25).

Další významné zjednodušení nám potom může přinést předpoklad, že servomechanismus ETH je dokonale symetrický, a tudíž můžeme považovat momenty setrvačnosti na levé a právé hřídeli laboratorního modelu za zcela totožné ($J_l = J_r$).

Změřením rozměrů všech základních součástek a určením jejich objemu s využitím tabulky na obr. 3.5, můžeme touto přibližnou metodou dojít k výsledku:

$$J = J_l = J_r = \sum_i J_i \doteq 8.03 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2. \quad (3.26)$$

Součástka	materiál hustota [kg/m ³]	moment setrvačnosti [kg.m ²]
 Spojka / pojistka	šedá litina 7860	$3,70394 * 10^{-6}$
 Závitová redukce	ocel 7860	$3,95087 * 10^{-5}$
 Klíčový úchyt	ocel 7860	$1,35811 * 10^{-6}$
 Úchyt pružiny	ocel 7860	$5,92877 * 10^{-7}$
 Pevný setrvačník	dural 3030	$3,43127 * 10^{-4}$
 Přídavná sada setrvačníků	mosaz 8660	$4,14894 * 10^{-4}$

Obrázek 3.5: Přehled parametrů rotačních částí jedné „půlhřídele“

Další možností, jak určit parametr J , by bylo např. měřením tzv. „křivek doběhu“, nicméně ani tato metoda není příliš přesná a tedy ani příliš vhodná.

Kapitola 4

Identifikace systému se spojenými servomotory ETH

V předchozí kapitole jsem se zabýval modelováním reálného systému se spojenými servomotory ETH, tj. nalezením rovnic popisujících dynamické chování tohoto systému na základě matematicko fyzikálních zákonů. Nyní přejdeme k vlastní identifikaci systému, tzn. nalezení neznámých konstant na základě zvolených experimentů. Volba identifikačního experimentu přitom často bývá velmi zásadní a měla by být vždy podmíněna možnostmi konkrétního typu systému.

V této kapitole se tedy budeme postupně zabývat identifikací systému na základě měření jeho přechodové charakteristiky, identifikací stavového popisu, identifikací na základě frekvenční analýzy a identifikací tzv. ARX modelu metodou nejmenších čtverců.

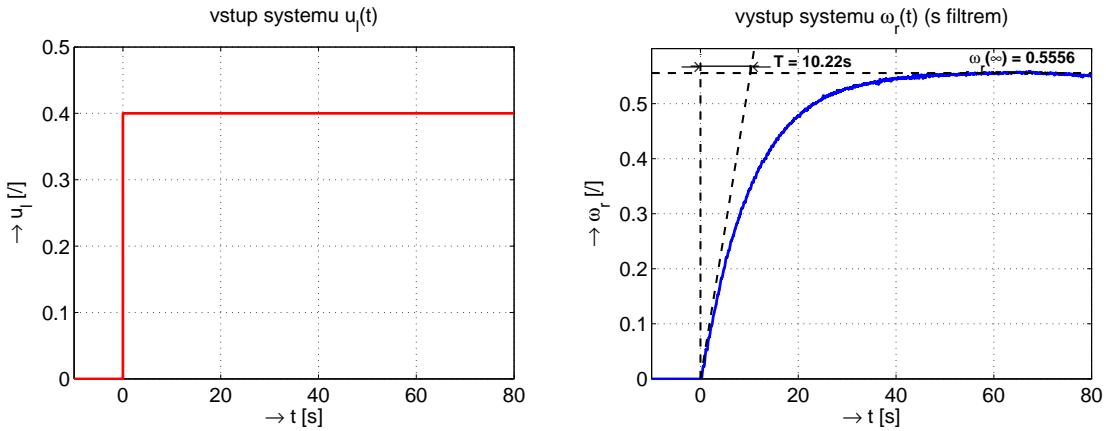
U každé metody identifikace potom nezapomeneme provést srovnání modelu a reálného systému, abychom mohli říci, zda má náš model odpovídající přesnost.

4.1 Identifikace z přechodové charakteristiky

Experimentální identifikace měřením přechodové charakteristiky systému je nejjednodušší ale zároveň také nejméně přesnou metodou identifikace systému. Přesto se v praxi většinou nejvíce používá.

Pro reálný systém servomechanismu ETH byla změřena odezva $\omega_r(t)$ na zvolený vstupní skokový signál napětí levého servomotoru $u_l = 0.4(t)$, viz obr. 4.1, přičemž jsme pro jednoduchost předpokládali, že se levý servomotor chová lineárně pro vstupní rozsah $u_l \in \langle 0.05; 0.6 \rangle$ ($\approx \omega_r \in \langle 0; 0.85 \rangle$) podle statické převodní charakteristiky 2.3 a nebylo tedy nutné vycházet z nějakého zvoleného pracovního bodu.

Podle tvaru charakteristiky 4.1 lze velmi zjednodušeně říci, že se v podstatě jedná o systém 1. řádu, přestože víme nebo tušíme, že chování systému na vyšších frekvencích může být ve skutečnosti podstatně složitější.



Obrázek 4.1: Identifikace systému měřením přechodové charakteristiky

Nicméně tato metoda nám nedává žádnou představu o vnitřní struktuře systému a tudíž ho lze přenosem typu:

$$P_s(s) = \frac{\Omega_r(s)}{U_l(s)} = \frac{k_s}{Ts + 1} \quad (4.1)$$

velmi dobře approximovat.

Časovou konstantu T jsme přibližně určili jako průsečík asymptoty $y_a = 0.5556$ a tečny ke křivce $\omega_r(t)$ v počátku (viz obr. 4.1), příp. je to také čas, ve kterém charakteristika $\omega_r(t)$ nabývá 63 % své ustálené hodnoty ($\omega_r(T) \doteq 0.632 \cdot \omega_r(\infty) \doteq 0.351 \Rightarrow T \doteq 10.22s$).

Statické zesílení k_s jsme potom určili z poměru ustálených hodnot vstupní a výstupní veličiny, ovšem podle 2.3 musíme ještě u vstupního napětí levého servomotoru u_l odečíst velikost pásma necitlivosti, aby náš model odpovídal reálnému systému, tedy:

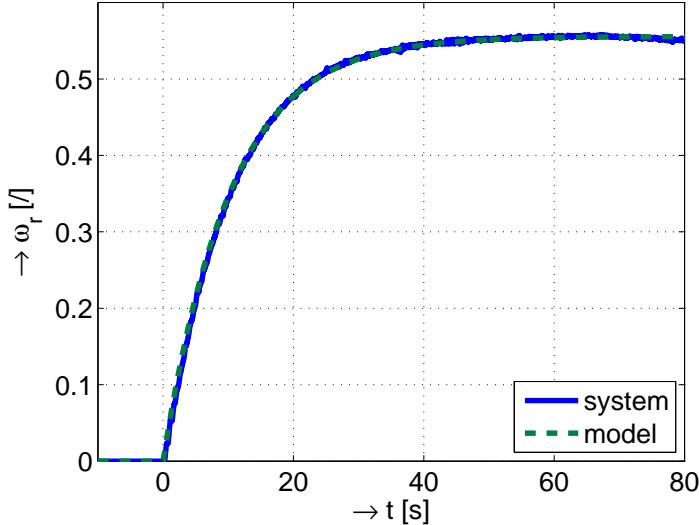
$$k_s = \frac{\omega_r(\infty)}{u_l(\infty) - 0.05} \doteq \frac{0.5556}{0.4 - 0.05} \doteq 1.5874.$$

Výsledný přenos takto zjednodušeného modelu získaného měřením přechodové charakteristiky reálného systému tedy potom vypadá následovně:

$$P_s(s) = \frac{\Omega_r(s)}{U_l(s)} = \frac{1.5874}{10.22s + 1}. \quad (4.2)$$

Srovnání modelu a reálného systému ETH je znázorněno na obrázku 4.2.

Model (4.2) je opravdu velmi zjednodušeným modelem reálného servomechanismu ETH, nicméně i přesto nám dává základní představu o chování systému a může být použit např. při návrhu nějakého typu **robustního regulátoru** (viz kap. 7.1), kde nám může velmi dobře posloužit jako tzv. „nominální model“, u kterého vlivem neurčitosti neumíme dost dobře popsat nebo neznáme chování systému na vyšších frekvencích.



Obrázek 4.2: Srovnání odezv reálného systému a jeho modelu

4.2 Identifikace stavového popisu

Obecně lze říci, že asi nejlepší, nejpřesnější ale většinou také nejsložitější metodou identifikace je odvodit stavový popis dané technologie (viz kap. 3.2) a poté navrhnout experimenty, které povedou na určení neznámých konstant. Velkou výhodou tohoto postupu je, že získáme model, jehož struktura odpovídá reálnému systému, což je velká výhoda při sestavování zpětnovazebního řízení.

Nevýhodou ovšem je, že se nám nemusí vždy podařit přesně určit všechny konstanty, protože nebudeme moci realizovat dostatečné množství experimentů, ať už z fyzikálních omezení (systém nemůžeme rozebrat) nebo nemožnosti měření (některé veličiny prostě neumíme změřit nebo je to přinejmenším velice nákladné).

V této části si tedy ukážeme identifikaci konstant stavového modelu (3.23), tedy navrhneme experimenty, ze kterých budeme moci tyto neznámé koeficienty určit. Konkrétně se tedy jedná o identifikaci následujících čtyřech parametrů stavového modelu:

- $J = J_l = J_r \dots$ moment setrvačnosti rotačních částí levé nebo pravé hřídele,
- $k_{ui} \dots$ převodní konstanta výkonového zdroje proudu (řízený napětím u_l),
- $k \dots$ koeficient torzní tuhosti pružiny,
- $b \dots$ koeficient torzního tlumení.

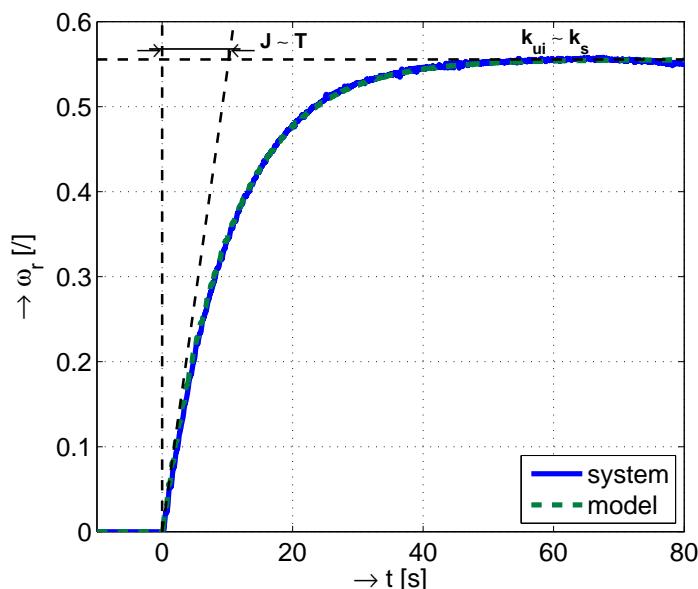
Po sérii experimentů provedených s matematickým modelem (3.23) v prostředí Simulink (A.1) bylo zjištěno, že každý zmíněný parametr ovlivňuje dynamiku systému jiným způsobem a přesto je počet stupňů volnosti dostatečně velký na to, abychom mohli

poměrně jednoduše a přitom téměř nezávisle na sobě potřebné hodnoty těchto koeficientů postupně určit.

Začneme nejprve určením velikosti momentu setrvačnosti J . V kapitole 3.3 jsme se již zabývali jeho hrubým odhadem a teoretickým výpočtem (3.26). Nyní se proto můžeme při identifikačním experimentu více zaměřit především na zpřesnění této hodnoty.

Jak již vyplývá z fyzikální podstaty systému i fyzikálního významu této veličiny, rozhoduje velikost momentu setrvačnosti J zejména o rychlosti odezvy stavových a výstupních veličin $\omega_l(t)$ a $\omega_r(t)$ na vstupní napětí $u_l(t)$. Má tedy zásadní vliv na dynamiku celého systému a ve své podstatě se dá říci, že její hodnota ovlivňuje především dominantní časovou konstantu T celého systému, která byla určována také v předchozím odstavci 4.1.

Přesnější hodnota momentu setrvačnosti J byla stanovena postupnou komparací průběhu odesky $\omega_r(t)$ odvozeného stavového modelu se skutečnou změřenou a šumu zbavenou odesvou reálného systému, obr. 4.3 ($J = 8.989 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$).



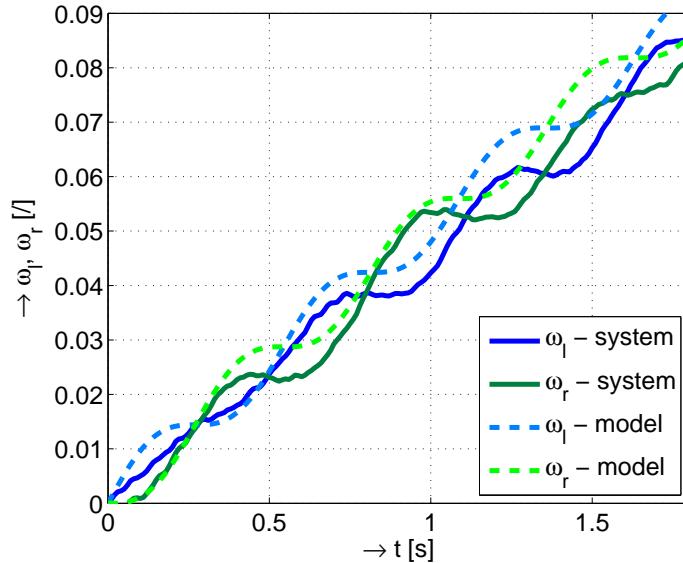
Obrázek 4.3: Srovnání odezv reálného systému a jeho modelu pro $J = 8.989 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$ a $k_{uu} = 1.0767858$

V souvislosti s určením momentu setrvačnosti J musela být zároveň také vhodně stanovena i převodní konstanta k_{ui} . Ta má naopak určující vliv na ustálenou hodnotu stavových a výstupních veličin $\omega_l(t)$, $\omega_r(t)$ a rozhoduje o celkovém statickém zesílení v příslušných přenosech.

Vzhledem k tomu, že vstupní signál $u_l(t)$ prochází během své cesty od PC až ke svorkám servomotoru různými převody typu zesílení a tedy není v našich silách vzhledem k absenci podrobnější dokumentace k laboratornímu modelu přesnou hodnotu konstanty k_{ui} nijak jinak experimentálně stanovit, byla jednoduše zvolena tak, aby byl stavový model co nejvíce ve shodě s reálným systémem, obr. 4.3 ($k_{ui} = 1.0767858$).

Dalším předmětem identifikace bylo určení koeficientu torzní tuhosti pružiny k a koeficientu torzního tlumení b , tedy parametrů popisujících „dynamiku pružného spojení“ obou hřídelí ve střední části modelu a určujících, jak moc se na dynamice systému podílí pružnost a krut při rotačním pohybu celé soustavy.

Stanovení těchto parametrů vychází ze stejných změrených dat jako na obrázku 4.3, ovšem ve zcela jiném „měřítku“, viz obr. 4.4.



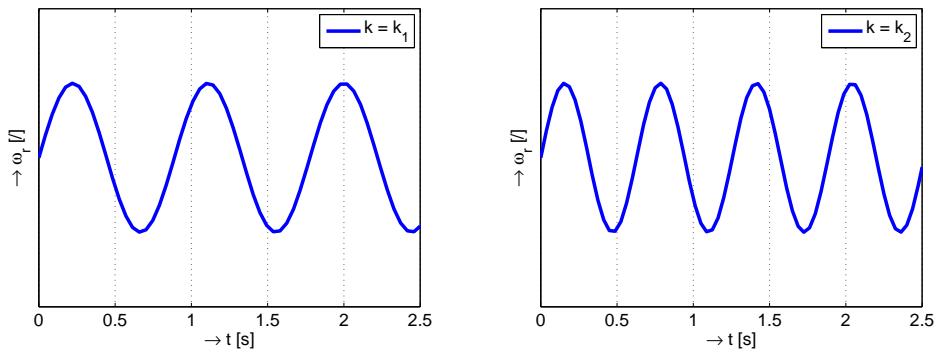
Obrázek 4.4: Detail srovnání odezv reálného systému a jeho modelu pro $k = 0.06 \text{ Nm/rad}$ a $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Nms/rad}$

Ke stanovení hodnot těchto parametrů jsme opět podobně jako u momentu setrvačnosti J využili jejich fyzikální interpretace.

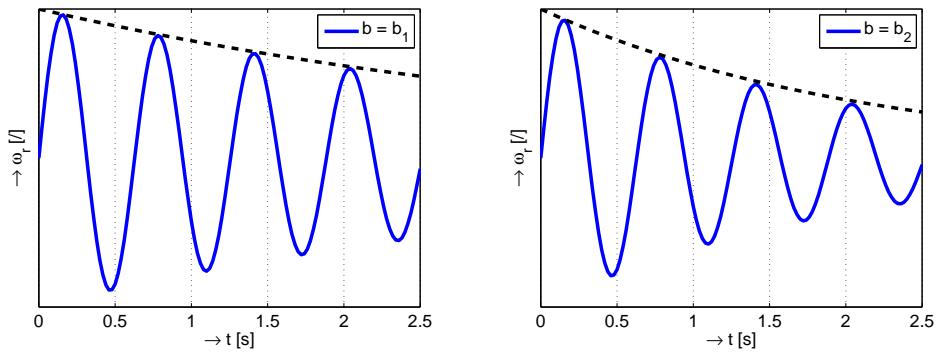
Simulacemi bylo zjištěno, že s rostoucí velikostí koeficientu torzní tuhosti k roste i frekvence kmitání stavové a výstupní veličiny $\omega_l(t)$ resp. $\omega_r(t)$ podle obr. 4.5. Jako optimální nakonec byla zvolena hodnota $k = 0.06 \text{ Nm/rad}$. Obdobně bylo ověřeno, že s rostoucím koeficientem torzního tlumení b dochází k postupnému útlumu stavových a výstupních veličin $\omega_l(t)$, $\omega_r(t)$ podle obr. 4.6. Ovšem z naměřených průběhů reálného systému bylo zjištěno, že s rostoucím časem prakticky nedochází k útlumu kmitů $\omega_l(t)$ resp. $\omega_r(t)$, a proto je hodnota koeficientu b relativně malá ($b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Nms/rad}$).

Na obr. 4.7 je potom pouze pro doplnění vykreslena odezva $\omega_r(t)$ na zvolený vstupní schodovitý signál $u_l(t)$, která jen potvrzuje, že reálný systém je skutečně lineární a stabilní pro vstupní rozsah napětí $u_l \in \langle 0.05; 0.6 \rangle$ a s naším stavovým model se velmi dobře shoduje.

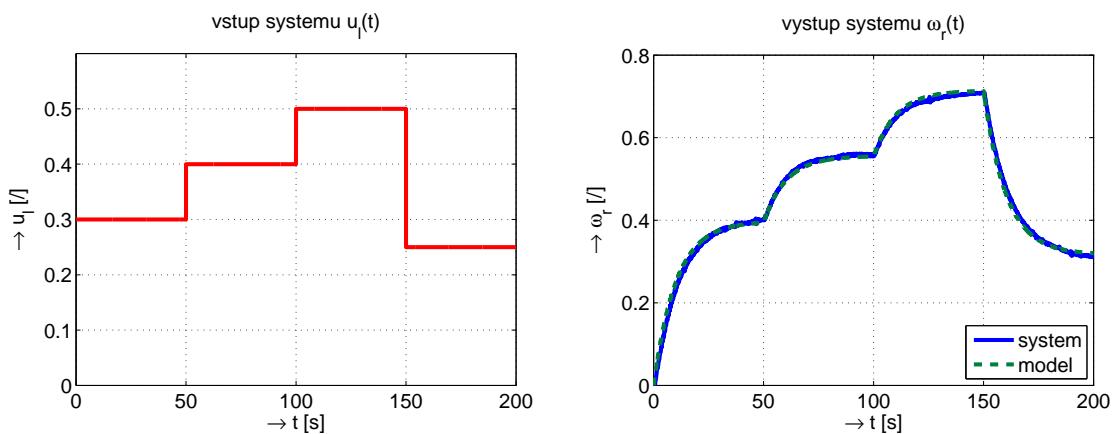
Souhrn všech identifikovaných parametrů včetně sestaveného stavového modelu servomechanismu ETH je potom uveden ve zdrojovém kódu na obr. 4.8.



Obrázek 4.5: Vliv koeficientu torzní pružiny k na dynamiku systému ($k_1 < k_2$)



Obrázek 4.6: Vliv koeficientu torzního tlumení b na dynamiku systému ($b_1 < b_2$)



Obrázek 4.7: Srovnání odezv reálného systému a jeho stavového modelu pro zvolený vstupní schodovitý signál $u_l(t)$

```

%% MATEMATICKY MODEL SYSTEMU SPOJENA SERVA ETH - stavova identifikace
% author: Karel Jonas
% ----

J = 0.0008989;      % moment setrvacnosti [kg*m^2] (J = J_l = J_r)
k_M = 0.033;        % konstanta motoru (k_M = 2*B*l*r*N) [Vs]
R_k = 6.2;          % odpor kotvy [Ohm]
k_UI = 1.0767858;   % prevodni konstanta prevodniku U/I []
k = 0.06;           % torzni tuhost pruziny [N*m/rad]
b = 3e-5;           % koeficient torzniho tlumeni pruziny [N*m*s/rad]

% STAVOVY POPIS SYSTEMU
A = [0 1 0 0; -k/J -b/J-k_M^2/(R_k*J) k/J b/J; 0 0 0 1; k/J b/J -k/J -b/J];
B = [0 (k_M*k_UI)/J 0 0]';
C = [0 0 0 1];
D = 0;
sys_ETH = ss(A,B,C,D);

% PRENOS: P_math(s) = Omega_r(s)/U_l(s)
Ps = tf(sys_ETH)
jmen = Ps.den;
Ps_poles = roots(jmen{1});

```

Obrázek 4.8: Identifikovaný stavový model servomechanismu ETH

Výsledný identifikovaný přenos matematického modelu se vstupem $u_l(t)$ [/] a výstupem $\omega_r(t)$ [rad/s] tedy vychází takto:

$$\begin{aligned}
P_{MATH}(s) &= \frac{\Omega_r(s)}{U_l(s)} = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{1.319s + 2639}{s^3 + 0.2621s^2 + 133.5s + 13.04} = \\
&= \frac{1.319s + 2639}{(s + 0.0977)(s^2 + 0.1644s + 133.4832)}, \quad \text{resp. takto :} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{MATH}(s) &= \frac{\Omega_r(s)}{U_l(s)} = \frac{0.0103s + 20.698}{s^3 + 0.2621s^2 + 133.5s + 13.04} = \\
&= \frac{0.0103s + 20.698}{(s + 0.0977)(s^2 + 0.1644s + 133.4832)} \quad \text{pro } \omega_r(t) \text{ [/].} \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Přenos (4.4) je jen modifikací přenosu (4.3) zahrnující v sobě navíc pouze převod úhlové rychlosti pravé hrídele $\omega_r(t)$ v [rad/s] na bezrozměrnou hodnotu v Simulinku korespondující s měřením $\omega_r(t)$ pomocí snímače úhlové rychlosti v případě reálného servomechanismu (podle kap. 2.1 tedy násobení zesílením 1/127.5).

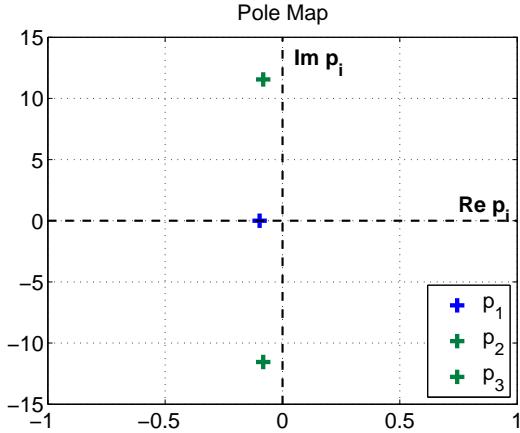
Z přenosu (4.4) lze opět dopočítat statiské zesílení $k_s \doteq 1.587$ a dále je z obou přenosů zřejmé, že systém má oscilační charakter a póly systému jsou tedy následující:

- $p_1 = -0.0977\dots$ dominantní pól (resp. dominantní časová konstanta $T = 10.23s$),
- $p_{2,3} = -0.0822 \pm 11.5532j\dots$ kmitavé póly systému.

Dva komplexně sdružené póly $p_{2,3}$ jsou podle obr. 4.9 velmi blízko imaginární ose s velmi malým relativním tlumením ζ :

$$\begin{aligned} s^2 + 0.1644s + 133.4832 &\approx s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\ \Rightarrow \omega_n &\doteq 11.55 \text{ [rad/s]}, \quad \zeta \doteq 0.00712, \end{aligned}$$

což může poněkud komplikovat pozdější návrh řízení k tomuto systému.



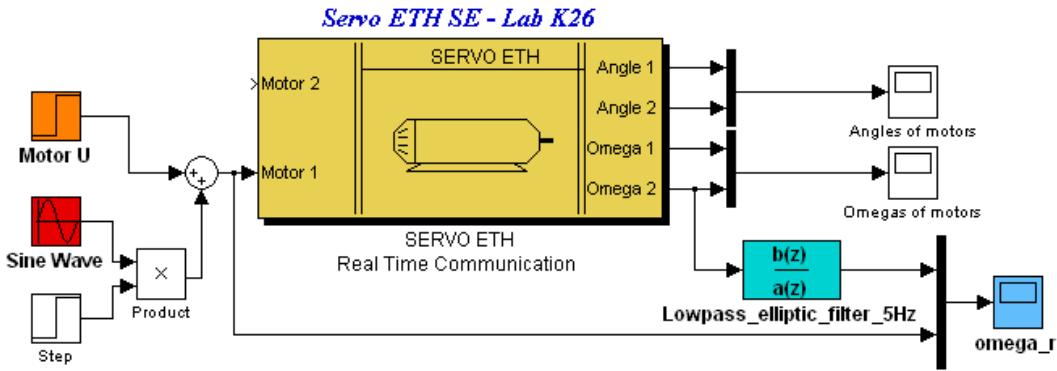
Obrázek 4.9: Póly přenosu matematického modelu

4.3 Identifikace na základě frekvenční analýzy

Dobrá metoda identifikace systému je dále analýza ve frekvenční oblasti. Výhoda tohoto přístupu je, že získáme model, který je proměřený v širokém frekvenčním spektru a který je tedy dostatečně přesný. To vše ale pouze za předpokladu, že nám to reálný systém umožní.

Aby totiž byla tato metoda použitelná, musí být identifikovaný systém lineární a stabilní a musí jít o takový systém, kterému harmonický vstupní signál nijak neublíží a nezpůsobí žádné škody. Servomechanismus ETH všechny tyto předpoklady splňuje a proto u něj bylo provedeno měření frekvenční charakteristiky podle Simulinkového zapojení, obr. 4.10.

Levý servomotor servomechanismu ETH tedy byl postupně buzen vstupním harmonickým signálem s frekvencí v intervalu $\omega \in \langle 0.05; 4 \rangle$ rad/s. Amplituda harmonického signálu i střední hodnota vstupního budicího signálu byly zvoleny tak, aby se výstupní otáčky systému $\omega_r(t)$ nacházeli po celou dobu měření v lineární oblasti podle statické převodní charakteristiky 2.3.

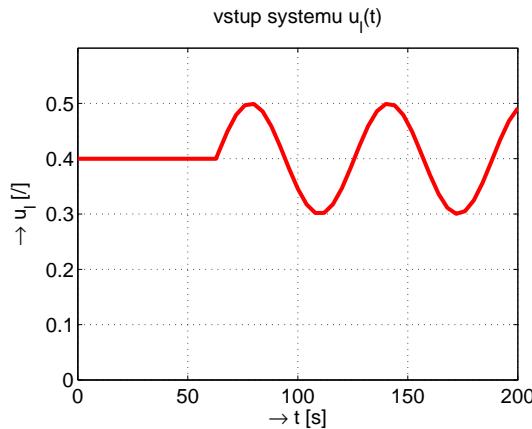


Obrázek 4.10: Simulikové schéma měření frekvenční charakteristiky servomechanismu ETH

Byl tedy zvolen pracovní bod $u_l = 0.4$, na který byl v čase $t = T = 2\pi/\omega$ superponován příslušný harmonický signál s amplitudou $A_{u_l} = 0.1$ a frekvencí ω , jinými slovy pro vstupní budící signál platí:

$$u_l(t) = 0.4 + 0.1 \sin \omega t, \text{ pro } t \geq T = 2\pi/\omega, \quad (4.5)$$

viz obr. 4.11.



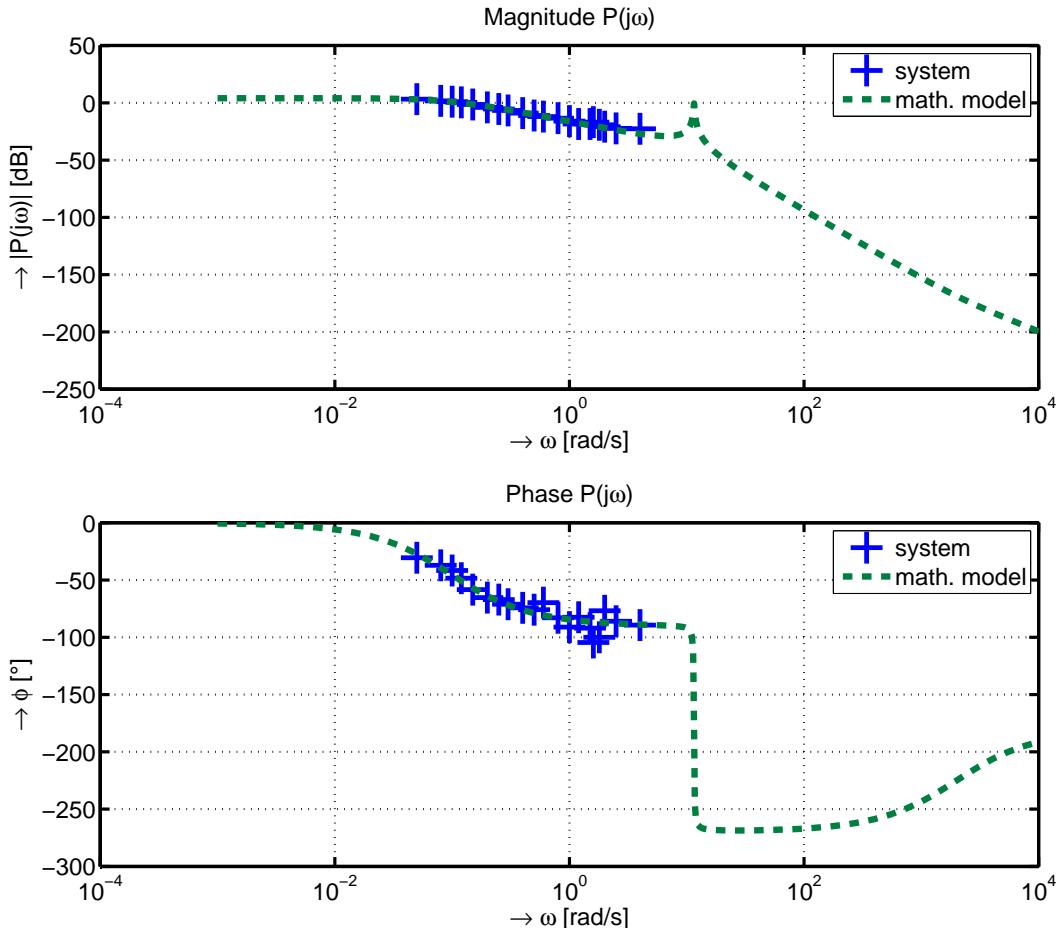
Obrázek 4.11: Zvolený vstupní harmonický signál $u_l(t)$ pro měření frekvenční charakteristiky servomechanismu ETH

Vlastní amplitudová a fázová frekvenční charakteristika měřeného servomechanismu ETH byla po změření dostatečného počtu odezv vypočítána podle známých vztahů:

$$|P(j\omega)| = 20 \log \frac{A_{\omega_r}(\omega)}{A_{u_l}} = 20 \log \frac{A_{\omega_r}(\omega)}{0.1} [\text{dB}], \quad (4.6)$$

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360^\circ. \quad (4.7)$$

Vykreslená frekvenční charakteristika reálného systému byla zároveň porovnána s frekvenční charakteristikou matematického modelu (4.4), obr. 4.12.



Obrázek 4.12: Srovnání změřené frekvenční charakteristiky reálného systému a jeho matematického modelu

Z této změřené frekvenční charakteristiky lze opět na první pohled usuzovat, že se vzhledem k poklesu amplitudové frekvenční charakteristiky $|P(j\omega)|$ o 20 dB/dek. pro frekvence $\omega < 4$ rad/s jedná o systém 1. řádu, s frekvencí zlomu $\omega_{z1} \doteq 0.1$ rad/s resp. pólem systému $s_1 \doteq -0.1$, což je přibližně ve shodě s dominantním pólem matematického modelu uvedeného dříve.

Nicméně dynamika systému na vyšších frekvencích ($\omega > 4$ rad/s) zůstává při této frekvenční analýze opět stejně jako v případě identifikace pomocí přechodové charakteristiky (kap. 4.1) skryta.

4.4 Identifikace ARX modelu metodou nejmenších čtverců (LS)

Identifikace pomocí ARX⁸ modelu metodou nejmenších čtverců (LS⁹), viz [4] a [8], je velmi často používaná metoda většinou v případech, kdy nevíme téměř nic nebo jen velmi málo o fyzikální podstatě identifikovaného systému (tzv. „black-box“ resp. „gray-box“ případ) nebo prostě jen chceme potvrdit správnost nějakého jiného modelu.

Metoda identifikace ARX modelu se používá pro identifikaci lineárních systémů na základě vstupních a výstupních dat (bez detailní znalosti vnitřní struktury systému). Jedná se tedy o čistě statistickou identifikaci systému.

Výstupem této metody je diskrétní přenos:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\Omega_r(z)}{U_l(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0}, \quad (4.8)$$

kde n je zvolený řád systému.

Tento přenos převedeme pomocí zpětné Z-transformace do časové oblasti a dostaváme diferenční rovnici ve tvaru:

$$\begin{aligned} y(k+n) = & -a_0y(k) - a_1y(k+1) - \dots - a_{n-1}y(k+n-1) + b_0u(k) + b_1u(k+1) + \\ & + \dots + b_{n-1}u(k+n-1), \end{aligned}$$

kterou pro N měření můžeme rozepsat na soustavu $(N-n)$ diferenčních rovnic s $2n$ neznámými koeficienty a_0, a_1 až a_{n-1} a b_0, b_1 až b_{n-1} :

$$\begin{aligned} y(n+1) = & -a_0y(1) - a_1y(2) - \dots - a_{n-1}y(n) + b_0u(1) + b_1u(2) + \dots + b_{n-1}u(n) + \\ & + e(n+1), \\ y(n+2) = & -a_0y(2) - a_1y(3) - \dots - a_{n-1}y(n+1) + b_0u(2) + b_1u(3) + b_{n-1}u(n+1) + \\ & + e(n+2), \\ & \vdots \\ y(N) = & -a_0y(N-n) - a_1y(N-n+1) - \dots - a_{n-1}y(N-1) + b_0u(N-n) + \\ & + b_1u(N-n+1) + \dots + b_{n-1}u(N-1) + e(N), \end{aligned}$$

kde $e(n+1), e(n+2)$ až $e(N)$ je předpokládaný (neznámý) šum¹⁰ v jednotlivých okamžicích měření.

Tuto soustavu vyjádříme maticově jako:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\theta + \mathbf{e}, \quad (4.9)$$

⁸z anglického **A**uto**R**egressive model with **e**Xternal input

⁹z anglického **L**east **S**quares

¹⁰externí vstup ARX modelu

kde matice $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_D & \mathbf{U}_D \end{bmatrix}$ je matice změřených vstupních a výstupních dat, kde

$$\mathbf{Y}_D = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(2) & \dots & -y(n) \\ -y(2) & -y(3) & \dots & -y(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(N-n) & -y(N-n+1) & \dots & -y(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_D = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(n) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(N-n) & u(N-n+1) & \dots & u(N-1) \end{bmatrix},$$

a

$$\theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \frac{a_{n-1}}{b_0} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e(n+1) \\ e(n+2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix},$$

kde θ je vektor neznámých parametrů, \mathbf{y} vektor změřených výstupních dat a \mathbf{e} vektor šumu.

Metodou nejmenších čtverců budeme nyní hledat takový vektor neznámých parametrů θ , aby součet kvadrátu „chyb“ $e(n+1), e(n+2), \dots, e(N)$ byl co nejmenší. Jedná se tedy o optimalizační úlohu, kterou můžeme matematicky zapsat takto:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=n+1}^N e^2(i) \right\} = \arg \min_{\theta} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\} = \arg \min_{\theta} \left\{ (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\theta) \right\} \quad (4.10)$$

Doplňením kvadratické formy $(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\theta)^T (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\theta)$ na úplný čtverec podle [4] dostáváme optimální řešení ve tvaru:

$$\theta^* = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y} \quad (4.11)$$

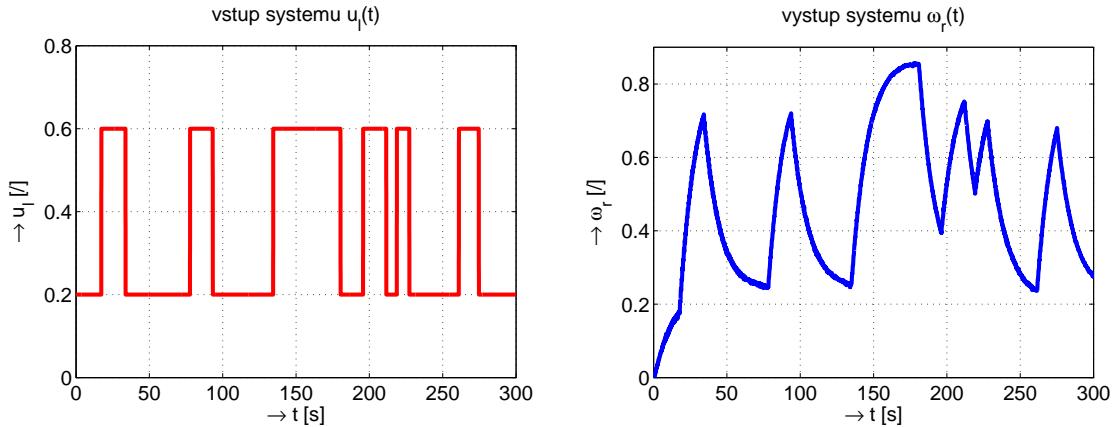
Tím je problém identifikace pomocí ARX modelu po teoretické stránce vyřešen a nyní zbývá jeho praktická realizace.

Řád systému n byl v souladu s matematickým modelem (4.4) a předchozími zkušenosťmi zvolen $n = 3$.

Dále zbývá vhodně zvolit také vstupní posloupnost $u(k) = u_l(k)$, změřit její odezvu na výstupu systému ($y(k) = \omega_r(k)$) a na změřená data aplikovat výpočet neznámých parametrů ARX modelu podle (4.11).

Při volbě vstupního signálu nesmíme zapomenout, že tato měření musíme opět provádět v lineární části statické převodní charakteristiky motoru, viz obr. 2.3. Pro správnou identifikaci je třeba, aby vstupní signál co nejvíce vybuzoval daný systém a identifikace tak mohla probíhat v co nejsířším frekvenčním rozsahu, který je samozřejmě omezen periodou vzorkování. Ta byla ve všech měřeních zvolena jako $T_s = 0.01s$. Jako vhodný budící signál byl zvolen náhodný obdélníkový signál s proměnnou střídou (tzv. náhodný PWM¹¹ signál), viz obr. 4.13, který se svým minimem i maximem pohybuje v lineární oblasti statické převodní charakteristiky 2.3.

Ovšem při výpočtu ARX modelu nesmíme opět u vstupních dat $u(k) = u_l(k)$ zapomenout odečít velikost pásma necitlivosti levého motoru (0.05), aby dynamika ARX modelu souhlasila s dynamikou reálného systému.



Obrázek 4.13: Odezva reálného systému na zvolený vstupní náhodný PWM signál $u_l(t)$ (ARX identifikace)

Po realizaci výpočtu neznámých parametrů ARX modelu v Matlabu podle (4.11) tedy dostáváme přenos ARX modelu reálného systému:

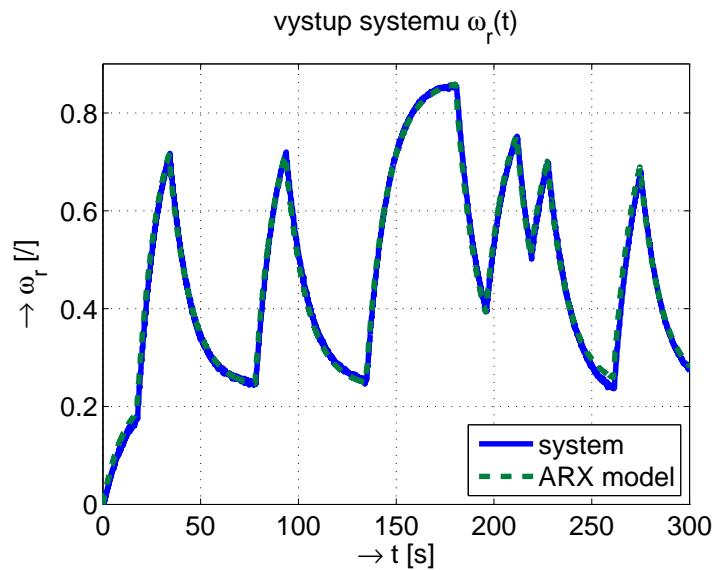
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\Omega_r(z)}{U_l(z)} = \frac{1.017 \cdot 10^{-4}z^2 + 1.057 \cdot 10^{-4}z + 2.542 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 2.98z^2 + 2.975z - 0.9951}. \quad (4.12)$$

Jelikož se návrh klasického řízení zpravidla realizuje ve spojité oblasti a se spojitými regulátory, byl přenos (4.12) převeden pomocí metody „Zero-order hold“ v MATLABu na spojitý přenos ARX modelu:

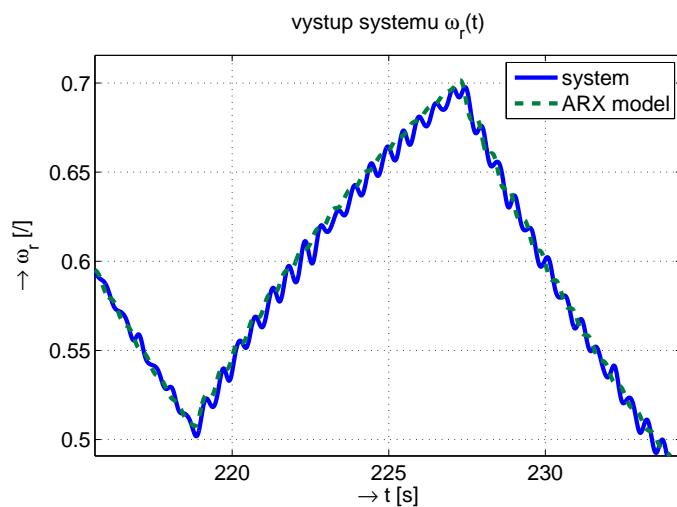
$$P_{ARX}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\Omega_r(z)}{U_l(z)} = \frac{0.006025s^2 + 0.7654s + 21.53}{s^3 + 0.4902s^2 + 152s + 13.63}. \quad (4.13)$$

¹¹z anglického Pulse Width Modulation

Srovnání odezvy ARX modelu a reálného systému ETH na zvolený náhodný PWM obdélníkový signál $u_l(t)$ s proměnnou střídou je znázorněno na obrázku 4.14 a v detailu na obr. 4.15.



Obrázek 4.14: Srovnání odezv reálného systému a ARX modelu pro zvolený náhodný PWM obdélníkový signál s proměnnou střídou



Obrázek 4.15: Srovnání odezv reálného systému a ARX modelu pro zvolený náhodný PWM obdélníkový signál s proměnnou střídou (detail)

Kapitola 5

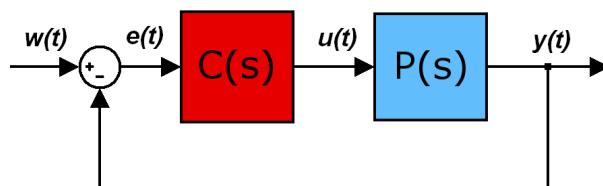
Zpětnovazební řízení servomechanismu ETH - „klasická“ PID regulace

Dalším cílem této diplomové práce bylo pro identifikovaný a v předchozích kapitolách podrobněji analyzovaný laboratorní model se spojenými servomotory ETH navrhnout, realizovat a vzájemně mezi sebou porovnat zvolené, principelně odlišné způsoby regulace.

Při návrhu řízení servomechanismu ETH (lineární stabilní SISO systém) jsme přitom vycházeli z těchto dvou zcela odlišných přístupů:

1. „Klasické“ návrhy regulátorů, popsané v lit. [1] (založené na analýze vlastností systému převážně ve frekvenční oblasti)
2. Pokročilé metody návrhu řízení využívající principů moderní teorie řízení, popsané v lit. [2] a [8] (založené na analýze vlastností systému převážně v časové oblasti)

V této kapitole se tedy nejprve zaměříme na návrh „klasického“ zpětnovazebního řízení, obr. 5.1, kde $P(s)$ je přenos identifikovaného servomechanismu ETH, $C(s)$ je přenos zpětnovazebního regulátoru, $u(t)$ je akční zásah (výstup regulátoru, vstup soustavy), $y(t)$ je regulovaná veličina (výstup soustavy) a $e(t)$ je regulační odchylka definovaná jako rozdíl žádané hodnoty výstupu $w(t)$ a výstupní hodnoty $y(t)$ ($e(t) = w(t) - y(t)$).



Obrázek 5.1: Zpětnovazební regulační smyčka

Přičemž přenos $C(s)$ postupně nahradíme přenosem typických a v průmyslu stále často používaných spojitéch regulátorů typu PID. Požadavky na kvalitu regulace jsou potom v tomto případě nejčastěji garantovány prostřednictvím zvolené amplitudové resp. fázové bezpečnosti, viz např. [7].

Jako možná alternativa potom budou v následující kapitole 6 a 7 předvedeny návrhy regulátorů vycházejících z principů moderní teorie řízení, konkrétně jde o návrhy regulátorů typu LQ, LQG a dále regulátorů z oblasti robustní teorie řízení [2]. V obou případech budeme až na jednu výjimku (kap. 5.1) uvažovat jako řiditelný vstup systému napětí levého motoru $u_l(t)$ a jako výstupní-regulovanou veličinu úhlovou rychlosť pravé hřídele $\omega_r(t)$. Výsledky všech navržených regulačních smyček potom stručně shrneme a zhodnotíme v kapitole 8.

5.1 Návrh PI regulátoru pro řízení polohy hřídele servomechanismu ETH

Návrh regulace úhlu natočení pravé hřídele $\varphi_r(t)$ pomocí napětí levého motoru $u_l(t)$ je zde uveden především kvůli dokreslení představy o možnostech řízeného laboratorního modelu se spojenými servomotory ETH. V dalsích kapitolách se budeme zabývat pouze a jen návrhem regulátorů pro řízení úhlové rychlosti $\omega_r(t)$.

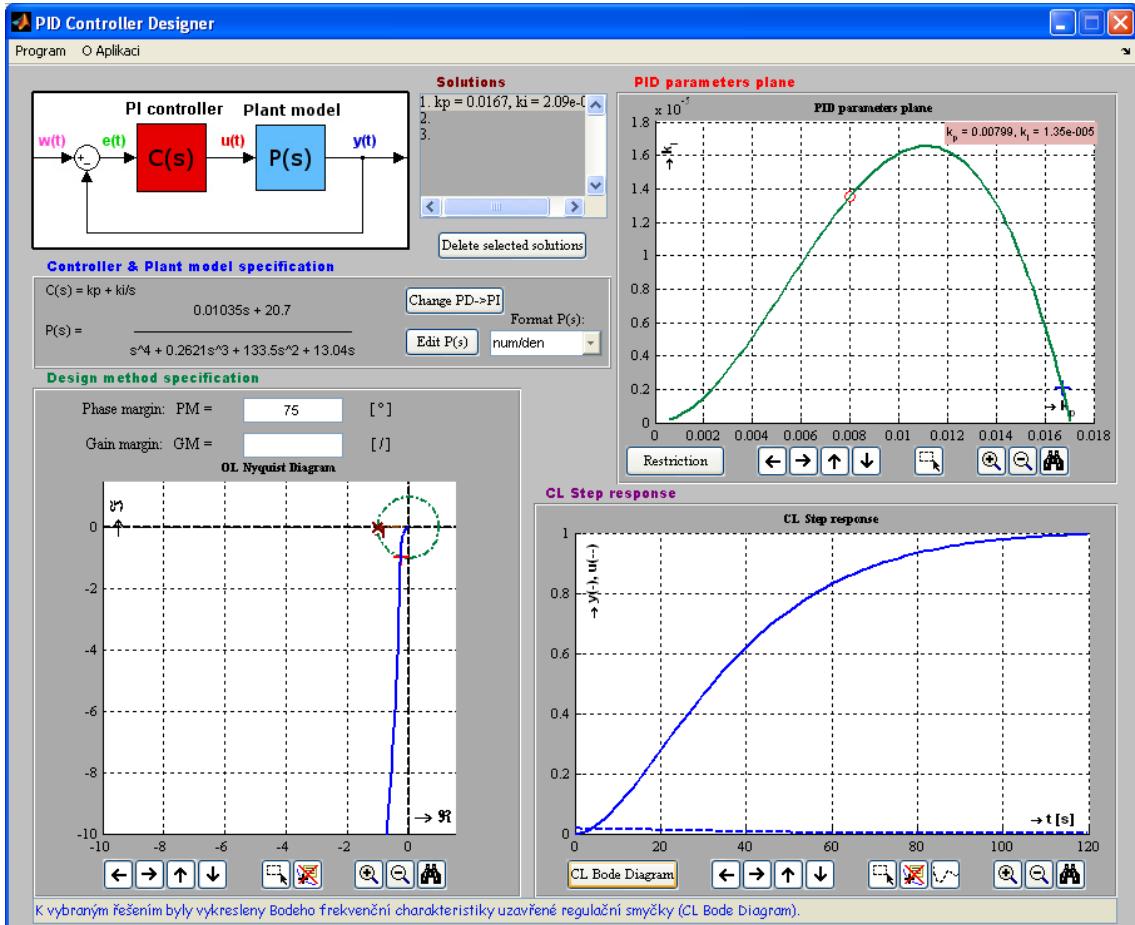
Existuje mnoho metod návrhu spojitéch PID regulátorů, některé z nich jsou uvedeny dále, nyní jsme však pro začátek zvolili návrh pomocí aplikace vytvořené v rámci bakalářské práce [7]. A to hlavně z toho důvodu, že řízení polohy hřídele bylo vzhledem k problémům s vyhodnocením signálu IRC snímače úhlu natočení hřídele popsaných v kap. 2.1 opravdu víceméně okrajovou záležitostí.

Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení polohy $\varphi_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého PI regulátoru je uvedeno v příloze na obrázku A.2. Ve schématu je mimo jiné vidět, že místo přímého měření polohy $\varphi_r(t)$ pomocí inkrementálního IRC čidla je signál počítán pomocí integrace úhlové rychlosti $\omega_r(t)$ měřené tachodynamem, což je v tomto případě možné, protože platí vztah:

$$\varphi_r(t) = \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau. \quad (5.1)$$

Zároveň ve schématu A.2 také vidíme, že oproti přenosu matematického modelu (4.4) je přidán ještě jeden řád astatismu resp. nulový pól $p_4 = 0$. Při návrhu PI regulátoru tedy vycházíme ze znalosti tohoto spojitého přenosu, který také v aplikaci zadáme jako vstupní informaci o regulované soustavě, viz obr. 5.2.

Metoda návrhu je v této aplikaci založena na principu tvarování frekvenční charakteristiky otevřené smyčky $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$ na základě tvarujících bodů odpovídajících zadané amplitudové resp. fázové bezpečnosti.



Obrázek 5.2: Návrh PI regulátoru pro řízení polohy $\varphi_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH v aplikaci PID Controller Designer

Pro požadovanou kvalitu regulace byla v tomto případě zvolena hodnota fázové bezpečnosti $PM = 75^\circ$.

Při návrhu resp. výběru vhodného typu PI regulátoru, který splňuje¹¹ požadovanou fázovou bezpečnost $PM = 75^\circ$ byla sledová nejen rychlosť odesvý ale především také velikost překmitu regulované veličiny $\varphi_r(t)$. Bylo totiž nutné zvolit takový PI regulátor, který by zajistoval dostatečně tlumený (aperiodický) průběh regulované veličiny $\varphi_r(t)$, tj. průběh s nulovým překmitem.

Pokud by se totiž v průběhu regulované veličiny vyskytl překmit, bylo by nutné levým motorem vrátit polohu hřídele na žádanou hodnotu, což lze reálně zajistit pouze působením záporného akčního zásahu $u(t)$ PI regulátoru. To ovšem znamená vybočení z „lineární oblasti“ statické převodní charakteristiky motoru (obr. 2.3) přes pásmo necitlivosti do hodnot se zaporným vstupním napětím $u_l(t)$. Řízení by tedy již nebylo lineární a my bychom nemohli zaručit shodu reálného a matematického modelu ba dokonce ani požadovanou kvalitu regulace.

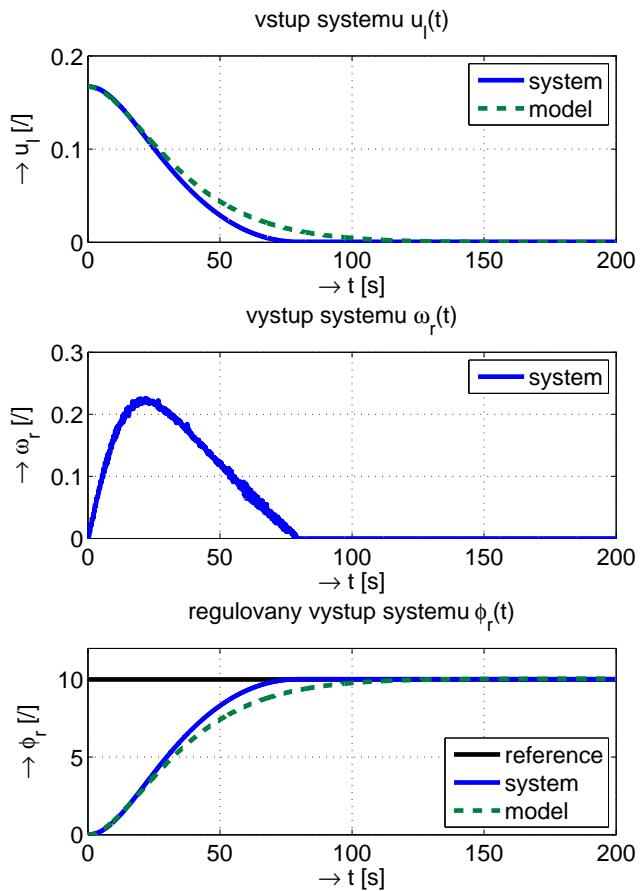
¹¹hodnoty parametrů k_p , k_i PI regulátorů leží na parametrické křivce v oblasti PID parameters plane

Dále také bylo respektováno vstupní omezení systému s max. hodnotou dovoleného vstupního napětí $u_l(t) = 0.6$, kterou nesmí překročit akční zásah PI regulátoru. To ovšem bylo při žádané hodnotě $w(t) = \varphi_r(\infty) = 10$ [/] $\approx 10 \cdot 127.5 = 1275$ [rad] ≈ 202.9 [ot.] nadmíru splněno, neboť PI regulátor při této regulaci polohy $\varphi_r(t)$ řídí otáčky $\omega_r(t)$ pravé hřídele „velmi opatrně“ resp. tyto otáčky nedosahují nijak vysokých hodnot a není tedy nutné připojovat příliš velké napětí $u_l(t)$ levého motoru.

- Nalezené parametry **PI regulátoru**:

$$k_p = 0.0167, k_i = 2.09 \cdot 10^{-6} \Rightarrow C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = 0.0167 + \frac{2.09 \cdot 10^{-6}}{s}$$

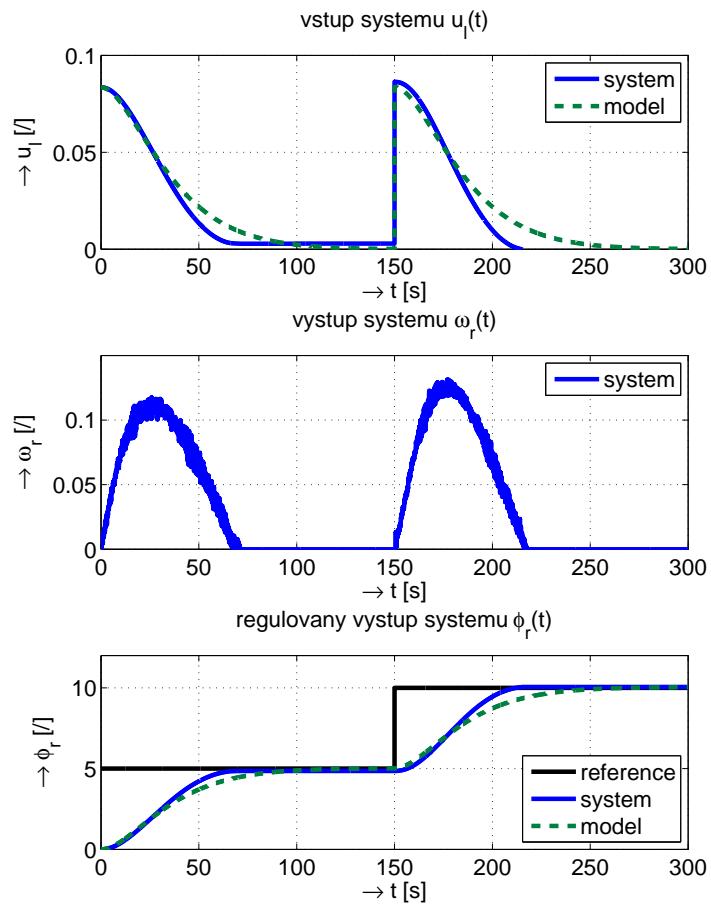
Na obr. 5.3 jsou potom vykresleny všechny důležité průběhy na vstupech a výstupech servomechanismu ETH naměřené při regulaci polohy $\varphi_r(t)$ pravé hřídele pomocí navrženého PI regulátoru.



Obrázek 5.3: Průběh řízení polohy $\varphi_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí PI regulátoru

Drobný rozdíl v průběhu regulované veličiny $\varphi_r(t)$ reálného systému a matematického modelu může být způsobený např. tím, že motoru „stačí“ při postupném zvyšování a následném pozvolném poklesu otáček $\omega_r(t)$ o něco málo menší velikost napětí $u_l(t)$, než pro jejich dosažení v počáteční fázi rozbehu motoru. Jinými slovy je možné, že se při nárůstu a následně pozvolném poklesu otáček $\omega_l(t)$ resp. $\omega_r(t)$ projevuje nepatrně vliv hystereze.

Na obr. 5.3 jsou potom pro doplnění vykresleny průběhy řízení polohy $\varphi_r(t)$ při dvouhodnotové skokové změně referenčního signálu $w(t)$.



Obrázek 5.4: Sledování reference žádané hodnoty úhlu natočení $\varphi_r(t)$ při regulaci pomocí PI regulátoru

5.2 Návrh PI regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH

V této časti se nyní budeme zabývat opět návrhem PI regulátoru ovšem regulovanou veličinou bude již od nynějška úhlová rychlosť $\omega_r(t)$.

Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele pomocí navrženého PI regulátoru je v tomto případě poměrně jednoduché a je uvedeno na obr. A.3 v příloze.

Nyní se spíše zaměříme na metodu návrhu samotného PID resp. PI regulátoru. Derivační složka byla v tomto případě vynechána hned z několika následujících praktických příčin. Jednou z nich je ta, že dominantní časová konstanta regulované soustavy je poměrně velká ($T = 10.23s$) a z teorie řízení víme, že pomalá soustava předpokládá také pomalý regulátor. Nemá tedy příliš velký smysl, aby v PID regulátoru měla zastoupení složka, jejíž hlavní úlohou je schopnost rychle reagovat na změny regulační odchylky $e(t)$ resp. změny žádané hodnoty $w(t)$.

Dalším důvodem bylo dále to, že derivační složka má mj. tu nepřijemnou vlastnost, že zesiluje vysokofrekvenční šumy, pro které jsme tak pracně navrhovali číslicové filtry v kapitole (2.3). Jinými slovy pokud bychom tento vysokofrekvenční šum dostatečně nefiltrovali, propagoval by se i velmi výrazně do akčního zásahu regulátoru $u(t)$. Derivační složka by tedy musela být minimálně doplněna o filtrační člen regulátoru přidáním filtračního pólu v přenosu $C(s)$. Integrační složka naopak hráje nezastupitelnou roli v otázce eliminace trvalé regulační odchylky $e(t)$.

Připomeňme nejprve přenos PI regulátoru:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} = \frac{k_i(T_i s + 1)}{s} = \frac{k_p(s + \omega_i)}{s}, \quad \omega_i = \frac{k_i}{k_p}. \quad (5.2)$$

Při návrhu PI regulátoru frekvenčními metodami podle [6] zvolíme nejprve zlomovou frekvenci ω_i . Volíme ji tak, aby byla shodná se zatím neznámou frekvencí ω_{PM} , na níž budeme požadovat fázovou bezpečnost $PM = 80^\circ$ výsledné frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$, platí tedy:

$$\omega_i = \omega_{PM}. \quad (5.3)$$

Podle (5.2) víme, že na této frekvenci sníží PI regulátor fázi frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ o 45° , tedy:

$$\begin{aligned} \arg \{L(j\omega_{PM})\} &= \arg \{L(j\omega_i)\} = \arg \{P(j\omega_i)\} + \arg \{C(j\omega_i)\} = \\ &= \arg \{P(j\omega_i)\} - 45^\circ. \end{aligned} \quad (5.4)$$

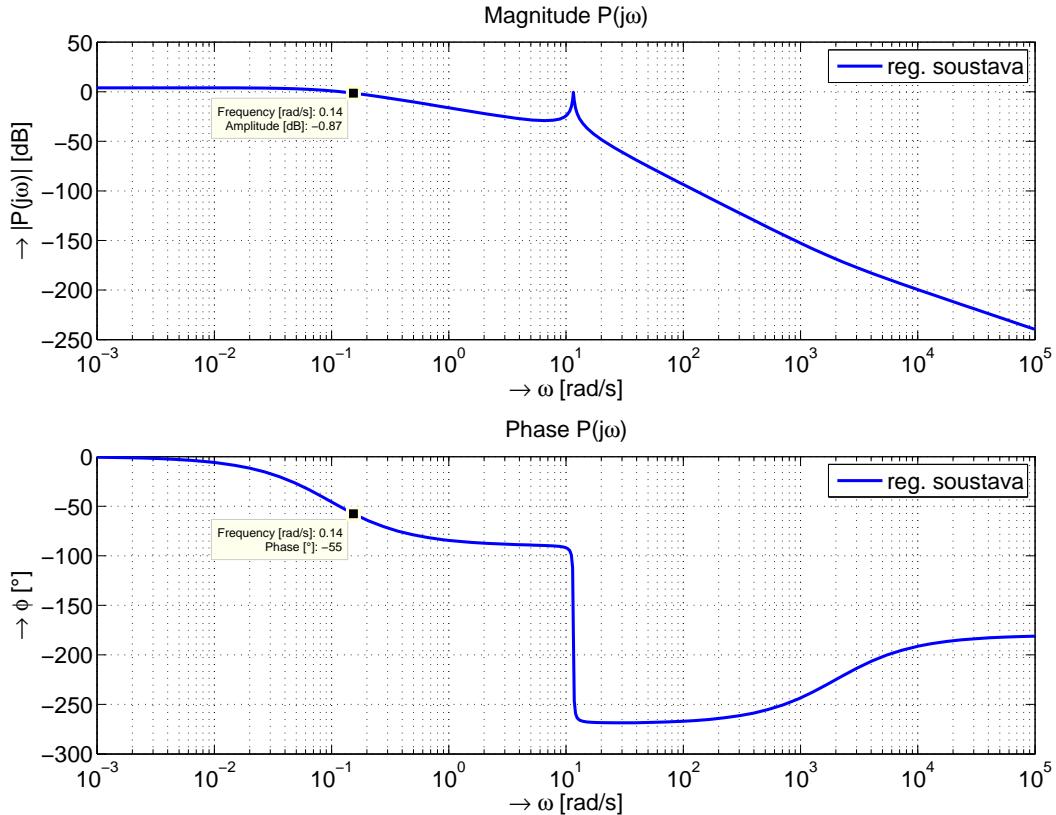
Z definice fázové bezpečnosti PM , platí:

$$\arg \{L(j\omega_{PM})\} = PM - 180^\circ. \quad (5.5)$$

Kombinací vztahů (5.4) a (5.5) získáme rovnici pro výpočet fáze regulované soustavy $P(s)$:

$$\arg \{P(j\omega_i)\} = PM - 180^\circ - \arg \{C(j\omega_i)\} = 80^\circ - 180^\circ + 45^\circ = -55^\circ, \quad (5.6)$$

na které budeme odečítat hledanou zlomovou frekvenci ω_i (viz obr. 5.5).



Obrázek 5.5: Bodeho frekvenční charakteristika regulované soustavy

Z Bodeho frekvenční charakteristiky regulované soustavy na obr. 5.5 tedy odečítáme $\omega_i = 0.14$ rad/s.

Nyní určíme druhý neznámý parametr PI regulátoru z podmínky, že pokud je frekvence $\omega_{PM} = \omega_i$ frekvence, na které se odečítá fázová bezpečnost PM otevřené regulační smyčky, musí být na této frekvenci zesílení otevřené smyčky $|L(j\omega_{PM})|$ jednotkové, tedy platí:

$$|L(j\omega_{PM})| = |L(j\omega_i)| = |C(j\omega_i)| \cdot |P(j\omega_i)| = \frac{|k_p(j\omega_i + \omega_i)|}{|j\omega_i|} \cdot |P(j\omega_i)| = \quad (5.7)$$

$$= \sqrt{2} \cdot k_p \cdot |P(j\omega_i)| \stackrel{!}{=} 1.$$

Odtud získáme vztah pro výpočet parametru k_p :

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2} |P(j\omega_i)|}. \quad (5.8)$$

Musíme tedy z charakteristiky 5.5 odečíst na frekvenci ω_i i velikost zesílení regulované soustavy $P(s)$ - $|P(j\omega_i)|_{dB} \doteq -0.87 dB$. Po převodu jednotek:

$$|P(j\omega_i)| = 10^{\frac{|P(j\omega_i)|_{dB}}{20}} \doteq 0.9047 \quad (5.9)$$

Tedy podle (5.8) dopočítáme:

$$k_p = \frac{1}{\sqrt{2} |P(j\omega_i)|} \doteq 0.7816. \quad (5.10)$$

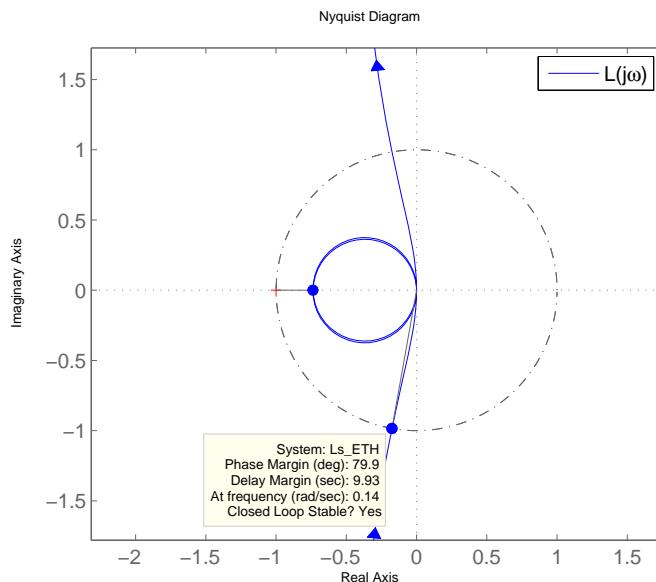
S využitím (5.2) dopočítáme i velikost neznámého parametru k_i :

$$k_i = k_p \cdot \omega_i \doteq 0.109424. \quad (5.11)$$

Přenos navrženého PI regulátoru je tedy:

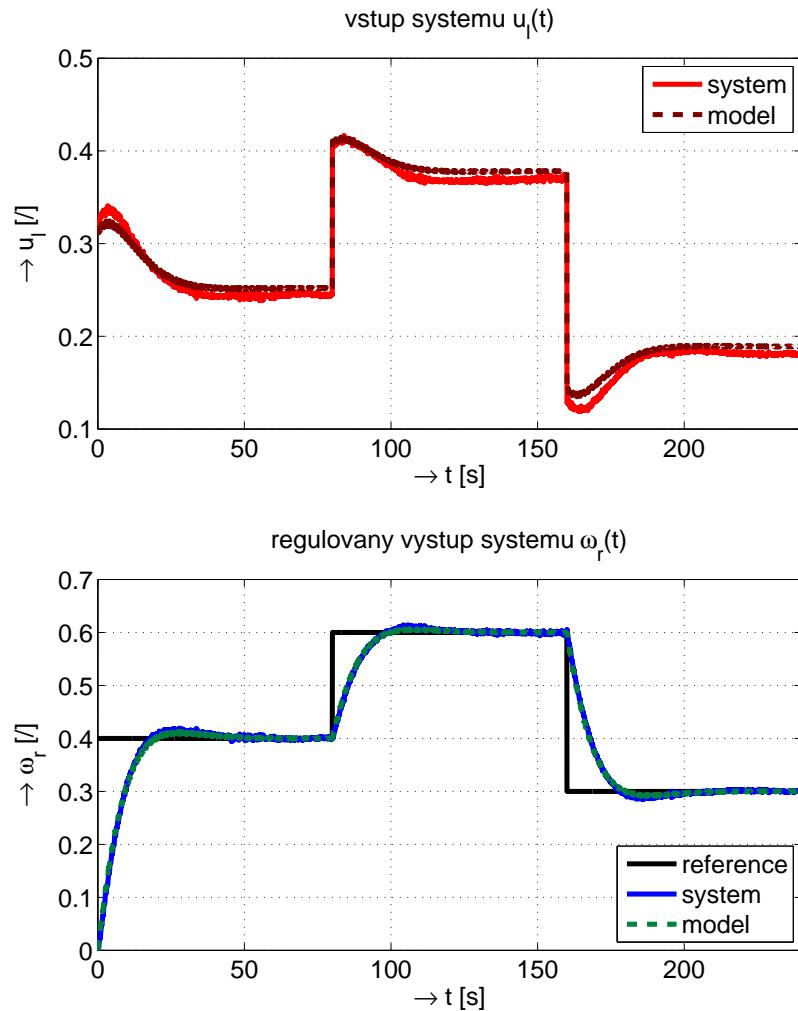
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = 0.7816 + \frac{0.109424}{s} \quad (5.12)$$

Správnost návrhu si můžeme zkонтrolovat pomocí Nyquistovy křivky otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$, obr. 5.6, kde je skutečně zaručena požadovaná kvalita regulace dosažením zvolené fázové bezpečnosti $PM = 80^\circ$.



Obrázek 5.6: Nyquistova křivka navržené otevřené regulační smyčky $L(j\omega)$ s PI regulátorem

Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH i jeho matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého PI regulátoru (5.12) je zachycen na obr. 5.7.



Obrázek 5.7: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí PI regulátoru

Poznamenejme, že průběh napětí $u_l(t)$ se opět nachází po celou dobu regulace pouze v „lineární oblasti“ statické převodní charakteristiky motoru 2.3.

Kapitola 6

Návrh pokročilých metod řízení - LQ, LQG

V této kapitole se budeme opět zabývat návrhem řízení servomechanismu ETH nyní ovšem z pohledu moderní teorie řízení.

Představa moderní teorie řízení je původně spjata převážně s pokročilými metodami návrhu řízení a to především v časové oblasti. Matematicky se tento přístup velmi často opírá o lineární maticovou algebru a jeho rozšíření pro návrh řízení MIMO systémů je na rozdíl od předchozího „klasického“ přístupu zcela přirozené. V těchto případech je na systém nejčastěji oproti „klasickému“ zpětnovazebnímu řízení (obr. 5.1) aplikována (buď přímo nebo pomocí technik optimálního odhadu stavu) stavová zpětná vazba.

Regulátor je potom obvykle navrhován pomocí formulace nějakého optimalizačního problému (např. minimalizace kvadratického kritéria v případě LQ regulátoru). Charakteristickým rysem této procedury je také to, že regulátor není „laděn“ přímo změnou jeho parametrů, ale volbou tzv. váhových matic v příslušných kritériích. Tato procedura návrhu regulátoru může také zahrnovat mnoho požadavků jako jsou např. různá omezení na vstupy a výstupy apod.

H_∞ přístup (kapitola 7) a postupy přímého tvarování uzavřené regulační smyčky potom zvyšují robustnost celého systému.

6.1 Návrh LQ regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH

LQ¹² regulátor (LQR) je zpětnovazební stavový regulátor, který minimalizuje (nuluje, stabilizuje do počátku) stavy systému podle kvadratického kritéria:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right\} = \quad (6.1)$$

¹²z anglického označení Linear system and a Quadratic criterion

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{array} \right], \quad (6.2)$$

kde první součtový člen představuje tzv. cenu koncového stavu a druhý člen cenu všech předchozích stavů a řízení. Matice \mathbf{Q} je pozitivně semidefinitní váhová matice stavů a matice \mathbf{R} pozitivně definitní váhová matice vstupů.

V případě kvadraticky optimálního řízení řešíme optimalizační úlohu typu:

$$\mathbf{u}^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} J. \quad (6.3)$$

Podle [8] vede tato úloha na řešení ve tvaru tzv. diferenční Riccatiho rovnice:

$$\mathbf{K}(k) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B} \mathbf{K}(k), \quad (6.5)$$

kterou řešíme zpětnou rekurzí v čase s koncovou podmínkou $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}$, kde \mathbf{P} je tzv. matice kvadratické formy a udává optimální hodnotu kritéria (6.1) a matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou matice stavového modelu diskrétního stabilizovatelného dynamického systému.

Kritérium (6.1) potom nabývá svého minima pro řízení ve tvaru:

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{K}(k) \mathbf{x}(k), \quad (6.6)$$

kde \mathbf{K} je tzv. *Kalmanovo zesílení*. Optimální zákon řízení (6.6) tedy vede na stavovou zpětnou vazbu. Pokud Kalmanovo zesílení $\mathbf{K}(k)$ konverguje k nějaké limitní hodnotě, potom platí:

$$\mathbf{P}(k) \rightarrow \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}(k) \rightarrow \mathbf{K} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

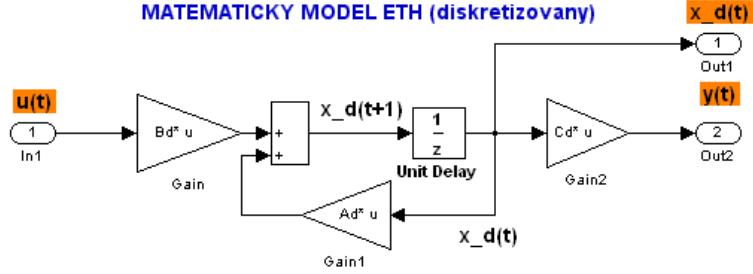
Získáme tak časově neměnný LQ regulátor, který má stejnou strukturu jako běžná stavová zpětná vazba.

Naším cílem ovšem dále není stabilizace stavů systému do počátku, a proto budeme základní úlohu LQ regulátoru modifikovat na úlohu tzv. kvadraticky optimálního servomechanismu neboli úlohu kvadraticky optimálního sledování.

Přičemž řešíme návrh diskrétního LQ regulátoru, a je tedy nutné provést nejprve také diskretizaci identifikovaného matematického modelu servomechanismu ETH. Diskretizací přenosu (4.4) s periodou vzorkování $T_s = 0.01s$ dostáváme diskrétní stavový model, obr. 6.1, který definujeme jako:

$$\mathbf{x}_d(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{B}_d u(k), \quad (6.8)$$

$$y(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k). \quad (6.9)$$



Obrázek 6.1: Diskretizovaný stavový model servomechanismu ETH

Jelikož má výstup systému $y(k)$ na zvolém horizontu délky N sledovat konstantní referenční signál $w(k)$, definujeme také nové kvadratické kritérium optimality ve tvaru:

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ e^T(k) \mathbf{Q}_e e(k) + u^T(k) \mathbf{R}_u u(k) \right\}, \quad (6.10)$$

kde pro regulační odchylku platí:

$$e(k) = w(k) - y(k). \quad (6.11)$$

V úloze kvadraticky optimálního servomechanismu je referenční trajektorie $w(k)$ dána jako výstup dynamického LTI¹³ systému, který lze zapsat ve tvaru:

$$x_r(k+1) = x_r(k), \quad (6.12)$$

$$w(k) = x_r(k). \quad (6.13)$$

Regulační odchylku (6.11) lze tedy vyjádřit jako:

$$e(k) = w(k) - y(k) = x_r(k) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d u(k). \quad (6.14)$$

Pokud dále navíc požádujeme nulovou trvalou regulační odchylku ($e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 0$), rozšíříme naši úlohu kvadraticky optimálního servomechanismu ještě o tzv. *sumátor regulačních odchylek*, který lze opět modelovat diskrétním systémem ve tvaru:

$$x_{se}(k+1) = x_{se}(k) + e(k) = x_{se}(k) + x_r(k) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) - \mathbf{D}_d u(k), \quad (6.15)$$

$$y_{se}(k) = x_{se}(k). \quad (6.16)$$

Současně s tímto formálním rozšířením připíšeme také ještě jeden člen do kritéria (6.10) a dostaváme tak:

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ e^T(k) \mathbf{Q}_e e(k) + y_{se}^T(k) \mathbf{Q}_{se} y_{se}(k) + u^T(k) \mathbf{R}_u u(k) \right\}, \quad (6.17)$$

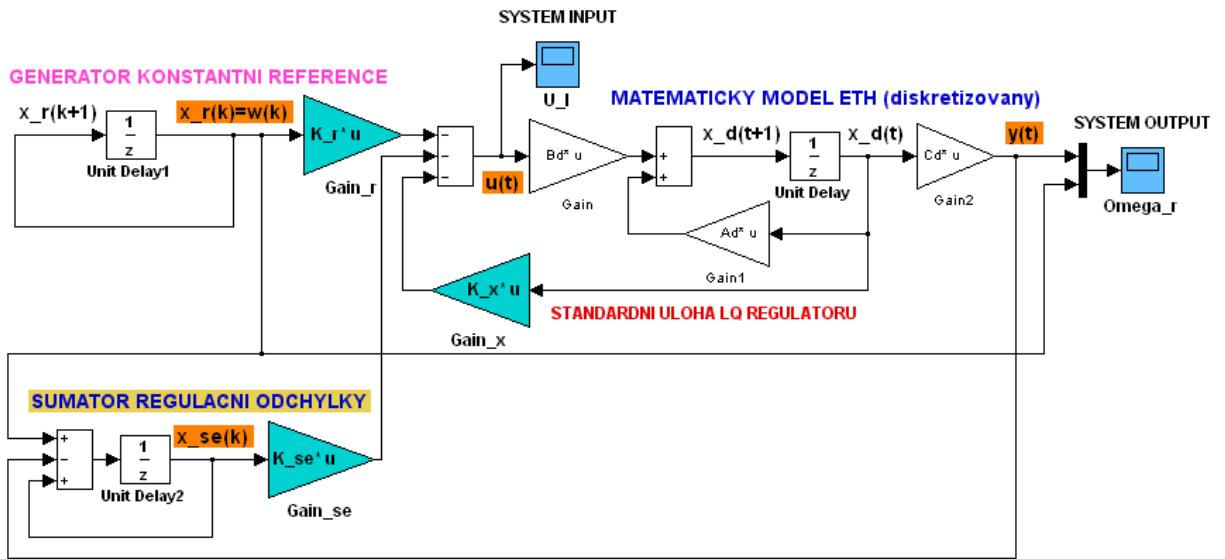
¹³z anglického Linear Time Invariant system

kde \mathbf{Q}_e je váhová matice regulační odchylky a \mathbf{Q}_{se} je váhová matice součtu regulačních odchylek.

Kvadraticky optimální servomechanismus tedy obsahuje tyto 3 základní částí:

- diskrétní stavový model regulované soustavy (standardní úloha LQ regulátoru)
- generátor konstantní reference
- sumátor regulačních odchylek

Kompletní zapojení navrženého kvadraticky optimálního servomechanismu je znázorňeno na obr. 6.2, kde jsou pro nás zatím neznámé hodnoty zesílení \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_r a \mathbf{K}_{se} .



Obrázek 6.2: Simulinkové zapojení úlohy kvadraticky optimálního servomechanismu

Za účelem sjednocení všech těchto částí zavedeme nový formální systém se stavovým vektorem:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ x_r(k) \\ x_{se}(k) \end{bmatrix}, \quad \text{tedy :} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \quad (6.19)$$

$$\text{kde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ -\mathbf{C}_d & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ 0 \\ -\mathbf{D}_d \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Abychom ovšem vůbec mohli tuto úlohu kvadraticky optimálního sledování řešit, musíme nejprve kritérium (6.17) převést zpátky na standardní problém kvadraticky optimálního regulátoru (6.1), protože jedině v tomto tvaru umíme řešením diferenční Riccatiho rovnice (6.4) a (6.5) nalézt optimální zákon řízení (6.6).

Dosadíme tedy do kritéria (6.17) a upravíme ho do tvaru:

$$\begin{aligned} J &= \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ e^T(k) \mathbf{Q}_e e(k) + y_{se}^T(k) \mathbf{Q}_{se} y_{se}(k) + u^T(k) \mathbf{R}_u u(k) \right\} = \\ &= \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (\mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k) - x_r(k))^T(k) \mathbf{Q}_e (\mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(k) + \mathbf{D}_d u(k) - x_r(k)) + \dots \right\} \end{aligned}$$

a pro $\mathbf{D}_d = \mathbf{0}$ dostáváme standardní tvar kritéria LQ regulátoru:

$$J = \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) & u^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}_e \mathbf{C}_d & -\mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}_e & 0 & 0 \\ -\mathbf{Q}_e \mathbf{C}_d & \mathbf{Q}_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{se} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u^T(k) \end{bmatrix} \right\}, \quad (6.21)$$

$$\text{kde } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}_e \mathbf{C}_d & -\mathbf{C}_d^T \mathbf{Q}_e & 0 \\ -\mathbf{Q}_e \mathbf{C}_d & \mathbf{Q}_e & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{se} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_u \quad (6.22)$$

jsou váhové matice stavů a vstupu.

Nyní již můžeme řešit diferenční Riccatiho rovnici (6.4) resp. (6.5), která limitně povede na optimální zákon ve tvaru:

$$u^*(k) = -\mathbf{Kx}(k) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{K}_r & \mathbf{K}_{se} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d(k) \\ x_r(k) \\ x_{se}(k) \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

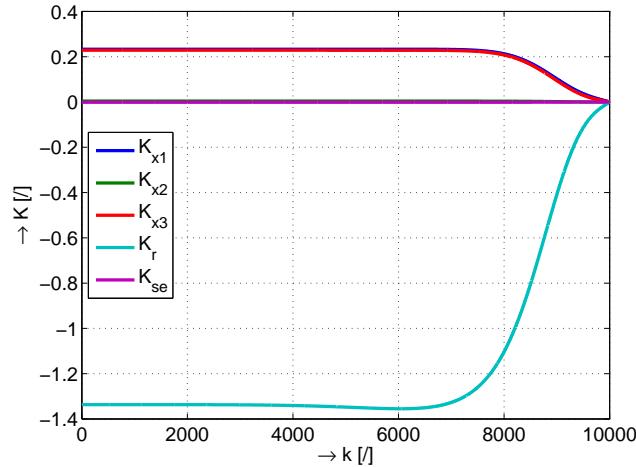
Optimální hodnoty vah kvadratického kritéria (6.17) byly po sérii experimentů v MATLABu a Simulinku zvoleny jako:

$$\mathbf{Q}_e = 0.1, \quad \mathbf{Q}_{se} = 1 \cdot 10^{-6}, \quad \mathbf{R}_u = 1. \quad (6.24)$$

Při návrhu LQ regulátoru resp. při volbě váhových matic (6.24) bylo stejně jako v případě PID regulátorů respektováno především omezení na vstup ($u(k) \leq 0.6$).

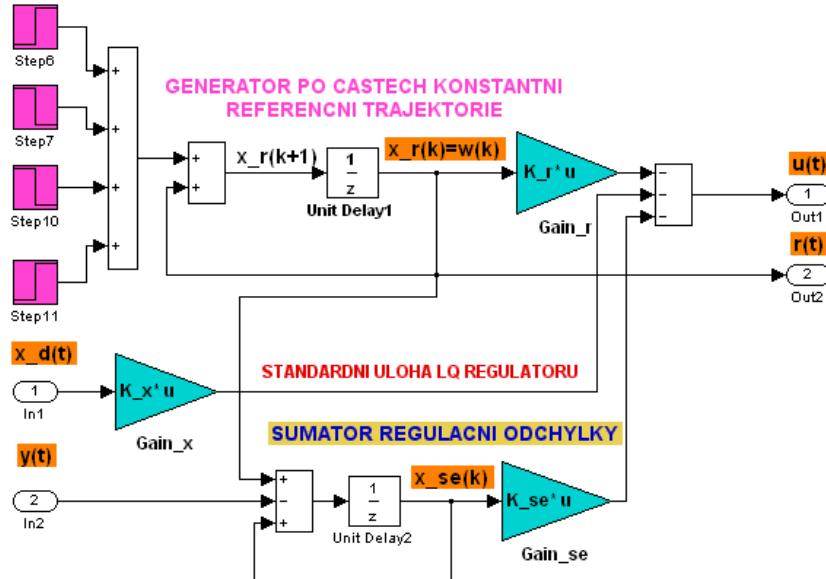
Průběh Kalmanova zesílení \mathbf{K} optimálního zákona řízení (6.23) je vykreslen na obr. 6.3, kde zpětným postupem v čase dostáváme ustálené hodnoty jeho jednotlivých složek:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 0.2334 & 0.0041 & 0.2287 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_r = -1.337, \quad \mathbf{K}_{se} = -0.001. \quad (6.25)$$



Obrázek 6.3: Průběhy iterací Kalmanova zesílení LQ regulátoru

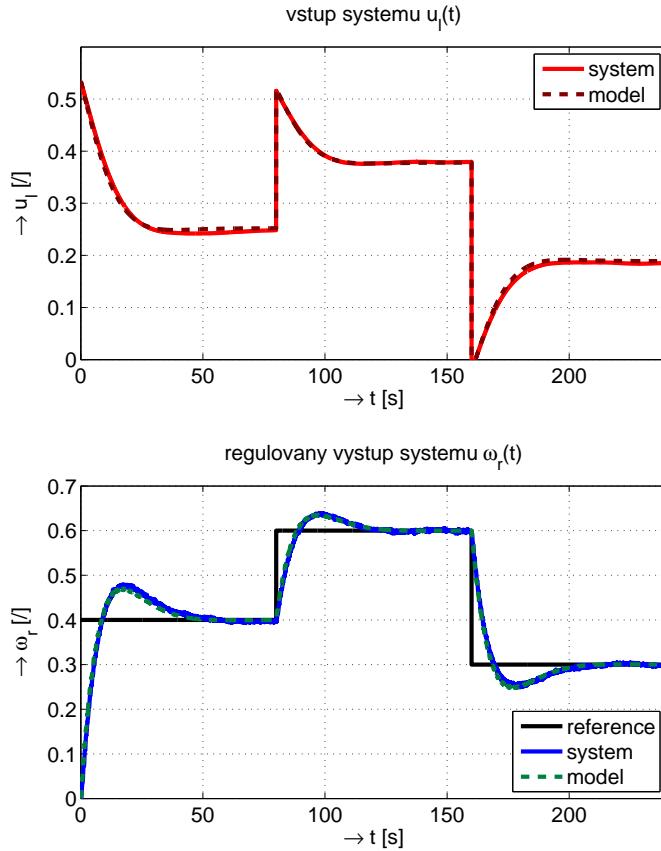
Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého LQ regulátoru je uvedeno v příloze na obrázku A.4. Blok¹⁴ matematického modelu zde implementuje zapojení diskrétního modelu uvedeného na obr. 6.1 a vnitřní struktura zapojení bloku LQ regulátor je nakreslena na obr. 6.4.



Obrázek 6.4: Implementace vnitřní struktury LQ regulátoru jako bloku Subsystem v prostředí Simulink.

Výsledky navrženého kvadraticky optimálního sledování po částech konstantní referenční trajektorie $w(k)$ s reálným laboratorním modelem se spojenými servomotory i jeho matematickým modelem jsou vykresleny na obr. 6.5.

¹⁴Subsystem v prostředí Simulink



Obrázek 6.5: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí LQ regulátoru

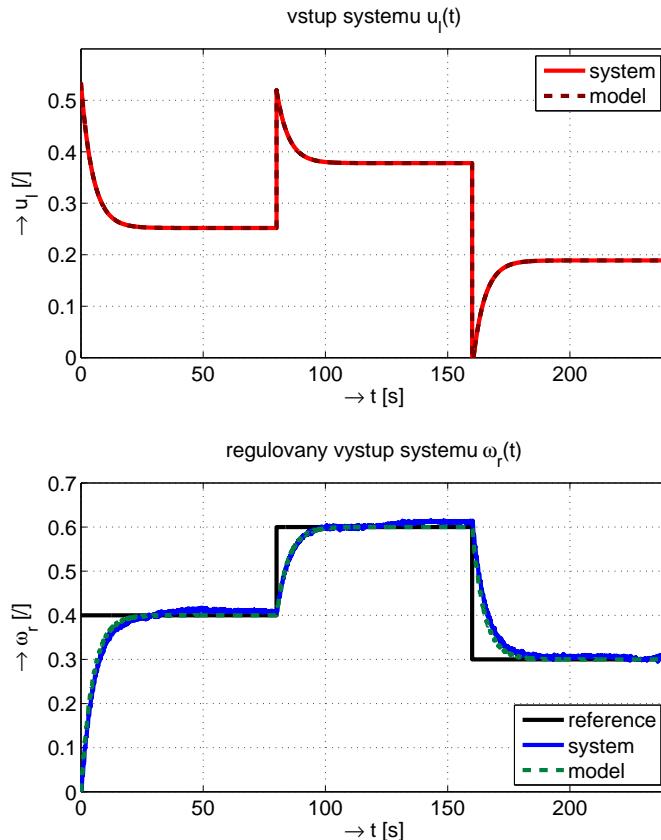
Z průběhů regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH si mužeme mimo jiné všimnout poměrně nepříjemně velkého překmitu regulované veličiny $\omega_r(t)$. Ten je způsobený především přítomností sumátoru regulačních odchylek, který sice spolehlivě zajišťuje nulovou trvalou regulační odchylku, ovšem má také tu nepříjemnou vlastnost, že podobně jako integrační složka PID regulátoru výrazně prodlužuje dobu regulace.

Zcela náhodou bylo zvoleno poněkud netradiční a matematicky ne zcela korektní řešení založené na experimentech s matematickým modelem reálného systému. Modifikace navrženého LQ regulátoru (obr. 6.4) spočívala v zachování všech složek ustáleného Kalmanova zesílení (6.25), tedy až na jednu. Zesílení sumátoru regulačních odchylek \mathbf{K}_{se} bylo místo původní hodnoty $\mathbf{K}_{se} \doteq -1 \cdot 10^{-3}$ zcela vynulováno, čímž v podstatě došlo k úplnému vyřazení sumátoru regulačních odchylek z činnosti.

Poznamenejme, že toto je naprosto odlišný postup, než kdybychom celou úlohu kvadraticky optimálního sledování definovali jako úlohu bez sumátoru regulačních odchylek, což je v praxi zcela běžný a používaný postup. Ten ale v případě řízení servomechanismu ETH vzhledem k neúměrně velké trvalé regulační odchylce zcela selhal. Úloha sumátoru regulačních odchylek se tak pro návrh LQ regulátoru stala naprosto nepostradatelnou.

Ovšem při aplikaci LQ řízení s modifikovanou hodnotou zesílení $K_{se} = 0$ dojdeme ke zjištění, že průběhy regulované veličiny dosahují o mnoho lepších výsledků, když je sumátor regulačních ochylek změnou zesílení K_{se} takto zcela vyřazen z činnosti a nezpožděuje tak průběh regulace.

Průběh takto modifikované LQ regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH i jeho matematického modelu s vyřazeným sumátorem regulačních odchylek jsou zachyceny na obr. 6.6.



Obrázek 6.6: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí modifikovaného LQ regulátoru s vyřazeným sumátorem regulačních odchylek

Je zde patrné, že překmit regulované veličiny se zde již prakticky nevyskytuje, což znamená velice výrazné zlepšení kvality regulace oproti průběhu LQ řízení zachyceném na obrázku 6.5.

Na závěr této kapitoly ještě dodejme, že realizované LQ řízení otáček servomechanismu ETH v podstatě představuje řízení v otevřené regulační smyčce (pouze na základě stavů diskrétního stavového modelu regulované soustavy nikoliv stavů reálného systému). Úplná stavová zpětná vazba je navržena hned v kapitole následující.

6.2 Návrh LQG modifikace regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH

V případě, kdy není stav procesu $\mathbf{x}(k)$ přímo měřitelný, je možné na základě pozorování vstupů a výstupů systému tento stav odhadovat. V deterministické formulaci problému lze k odhadování stavu sestavit tzv. pozorovatele stavu metodou umisťování pólů. Ve stochastické formulaci problému lze úlohu odhadu stavu formulovat ve smyslu optimálního LMS¹⁵ odhadu. Výsledný optimální pozorovatel se potom nazývá **Kalmanův filtr**.

Zkratka LQG potom značí rozšíření již navrženého LQ regulátoru o tento Kalmanův filtr, který pracuje s optimálním odhadem stavů ovlivněných Gaussovým šumem (šum s nulovou střední hodnotou a znamým rozptylem). Vstupem Kalmanova filtru jsou vstupy a výstupy systému a výstupem Kalmanova filtru jsou odhadované stavy systému.

Uzavřená regulační smyčka s LQ regulátorem a Kalmanovým filtrem pro řízení otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH je ukázána na obr. A.5 v příloze.

V případě návrhu Kalmanova filtru řešíme optimalizační úlohu LMS odhadu minimalizujícího střední kvadratickou chybu odhadu stavu. Kritérium je tedy ve tvaru:

$$J_{LMS} = \varepsilon \left\{ \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{LMS} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}, \quad (6.26)$$

kde předpokládáme, že hledaná data $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})$ jsou pouze afinní funkcií měřených dat \mathbf{y} :

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}. \quad (6.27)$$

Podle [8] lze odvodit, že lineární odhad střední hodnoty stavu $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}$ minimalizující střední kvadratickou chybu odhadu (6.26) je dán vztahem:

$$\hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) = \mu_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_y). \quad (6.28)$$

Důležitou vlastností odhadu $\hat{\mathbf{x}}_{LMS}$ je právě skutečnost, že závisí pouze na prvních dvou momentech - středních hodnotách μ_x , μ_y a kovariančních maticích \mathbf{P}_{xy} , \mathbf{P}_{yy} . Platí samozřejmě vlastnost $\varepsilon \{ \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}) \} = \mu_x$. Dále můžeme odvodit kovarianční matici chyby odhadu:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{LMS}} &= \varepsilon \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y})) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{LMS}(\mathbf{y}))^T \right\} = \\ &= \varepsilon \left\{ ((\mathbf{x} - \mu_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_y)) ((\mathbf{x} - \mu_x) - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_y))^T \right\} = \\ &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \underbrace{\mathbf{P}_{yy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{P}_{yx} = \\ &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

¹⁵z anglického Linear Mean Square

Za regulovanou soustavu nyní považujeme diskrétní, lineární, pozorovatelný, stochastický model ve tvaru:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (6.30)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) + \mathbf{e}(k), \quad (6.31)$$

kde šum procesu $\mathbf{v}(k)$ a šum měření jsou diskrétní bílé šumy s nulovou střední hodnotou:

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (6.32)$$

a známou kovarianční maticí:

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k_1) \\ \mathbf{e}(k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k_2) \\ \mathbf{e}(k_2) \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta(k_1 - k_2), \quad \delta(k_1 - k_2) \begin{cases} = 1 \text{ pro } k_1 = k_2 \\ = 0 \text{ pro } k_1 \neq k_2 \end{cases}. \quad (6.33)$$

Z (6.33) vidíme, že šumy jsou navzájem korelované, ale v různých časových okamžicích jsou již nezávislé. Kovarianční matice šumu procesu \mathbf{Q} je symetrická pozitivně semidefinitní matice a kovarianční matice šumu měření \mathbf{R} je symetrická pozitivně definitní matice.

Myšlenka odhadu stavu je potom taková, že předpokládáme, že v k -tém kroku algoritmu známe *apriorní* odhad stavu $\mathbf{x}(k)$ (tj. odhad využívající data do času $k-1$, ale neberoucí v úvahu data $\mathbf{y}(k)$), jehož podmíněnou střední hodnotu budeme značit $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ a kovarianční matici chyby odhadu $\mathbf{P}(k|k-1)$.

Po změření hodnoty výstupu $\mathbf{y}(k)$ chceme tyto hodnoty aktualizovat a získat *aposteriorní* odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ (tj. odhad zahrnující měření $\mathbf{y}(k)$) a kovarianční matici chyby odhadu $\mathbf{P}(k|k)$.

Kalmanův filtr pro nekorelované šumy procesu a měření ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$) postupně odvodíme vyjádřením vývoje střední hodnoty systému (6.30),(6.31):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k-1) = \varepsilon \{ \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) + \mathbf{v}(k) \} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{Bu}(k) \quad (6.34)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = \varepsilon \{ \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k) + \mathbf{e}(k) \} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{Du}(k) \quad (6.35)$$

a vývoje chyby odhadu stavu:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k-1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k-1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k) \quad (6.36)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k|k-1) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{e}(k). \quad (6.37)$$

Kovarianční matici chyby odhadu stavu potom vyjádříme jako:

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{bmatrix}^T | k-1 \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Ovodíme \mathbf{P}_{xx} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xx} &= \varepsilon \left\{ \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k-1) \tilde{\mathbf{x}}^T(k+1|k-1) \right\} = \\ &= \varepsilon \left\{ [\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)] [\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]^T \right\} = \\ &= \varepsilon \left\{ \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) \tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{v}(k) \tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1) \mathbf{A}^T + \dots \right\} = \\ &= \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

kde jsme předpokládali nezávislost šumu procesu a stavů. Obdobně získáme \mathbf{P}_{xy} , \mathbf{P}_{yx} a \mathbf{P}_{yy} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} & \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{C}^T \\ \mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{A}^T & \mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Dosadíme-li nyní do (6.28), získáme vztah pro odhad stavu $\mathbf{x}(k)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k-1) &= \mu_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \mu_y) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \\ &+ \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{C}^T (\mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k)). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Označíme-li

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{C}^T (\mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (6.42)$$

jako Kalmanovo zesílení Kalmanova filtru, vidíme, že dostáváme podobný tvar jako v případě deterministického pozorovatele stavů:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k-1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \\ &+ \mathbf{L}(k) (\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k)). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Dosazením do (6.29) potom získáme tzv. Riccatiho rovnici pro Kalmanův filtr:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k-1) &= \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} = \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \\ &- \mathbf{AP}(k|k-1) \mathbf{C}^T (\mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{CP}(k|k-1) \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Rovnice (6.41) a (6.44) představují algoritmus Kalmanova filtru a dají se rozdělit do dvou nezávislých kroků:

- Datový (filtrační) krok Kalmanova filtru:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{L}'(k) + \varepsilon(k|k-1), \quad (6.45)$$

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{L}'(k) \mathbf{C} \mathbf{P}(k|k-1), \quad (6.46)$$

kde $\varepsilon(k|k-1)$ je chyba odhadu výstupu:

$$\varepsilon(k|k-1) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (6.47)$$

a $\mathbf{L}'(k)$ je Kalmanovo zesílení datového kroku:

$$\mathbf{L}'(k) = \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{C}^T \left(\mathbf{C} \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}. \quad (6.48)$$

- Časový (predikční) krok Kalmanova filtru:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (6.49)$$

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (6.50)$$

Shrneme tedy, že časový krok Kalmanova filtru odhaduje (predikuje) stav systému na základě znalosti modelu a datový krok následně aktualizuje odhad stavu na základě měřeného výstupu $\mathbf{y}(k)$.

Kalmanův filtr je tedy algoritmus generující posloupnost odhadů stavů $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ a kovariančních matic chyb odhadu $\mathbf{P}(k|k)$. Abychom mohli Kalmanův filtr navrhnout, musíme znát parametry šumu procesu a šumu měření (kovarianční matice \mathbf{Q} a \mathbf{R}) nebo je ještě odhadnout. V našem případě byly po sérii experimentů s diskrétním stochastickým modelem servomechanismu ETH (6.30), (6.31) odhadnuty parametry těchto šumů jako:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = 1 \cdot 10^{-5} \quad (6.51)$$

Pro návrh Kalmanova filtru tedy stačí (obdobně jako u LQ regulátoru) iteračně řešit rovnice (6.45), (6.46) resp. (6.49), (6.50) odděleného datového a časového kroku, dokud nedosáhneme ustáleného Kalmanova zesílení $\mathbf{L}'(k) \rightarrow \mathbf{L}'$.

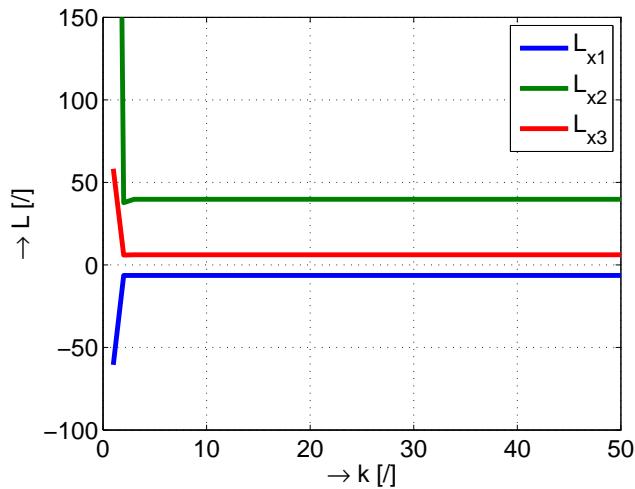
Také poznamenejme, že Kalmanovo zesílení celého filtru získáme kombinací vztahů (6.42) a (6.48):

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{A}\mathbf{L}'(k) \quad resp. \quad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{AL}' \quad (6.52)$$

Z průběhu iterací ustáleného Kalmanova zesílení \mathbf{L} , obr. 6.7, obdržíme:

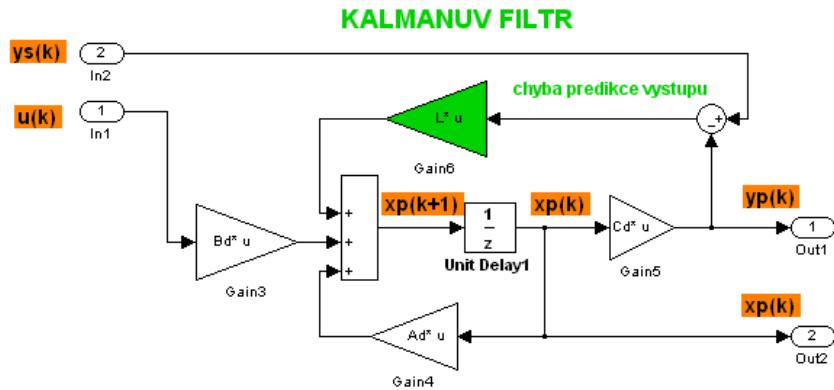
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -6.3968 \\ 39.7793 \\ 6.1461 \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

které použijeme ke zkonztruování časově invariantního Kalmanova filtru, obr. 6.8.



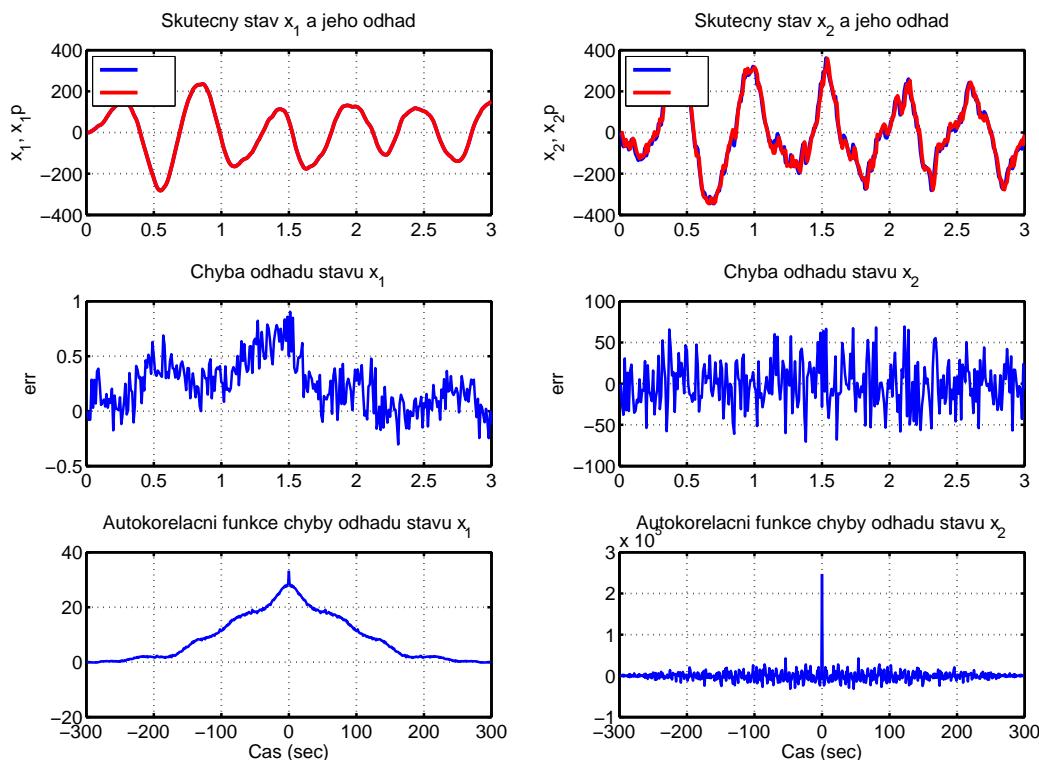
Obrázek 6.7: Průběhy iterací Kalmanova zesílení LQ regulátoru

Na obr. 6.8 vidíme, že časově invariantní Kalmanův filtr má stejnou strukturu jako pozorovatel stavu (6.43). Matice \mathbf{L} je ovšem navržena optimálně pro kovarianční matice šumu procesu \mathbf{Q} a šumu měření \mathbf{R} .



Obrázek 6.8: Implementace vnitřní struktury Kalmanova filtru jako bloku Subsystem v prostředí Simulink.

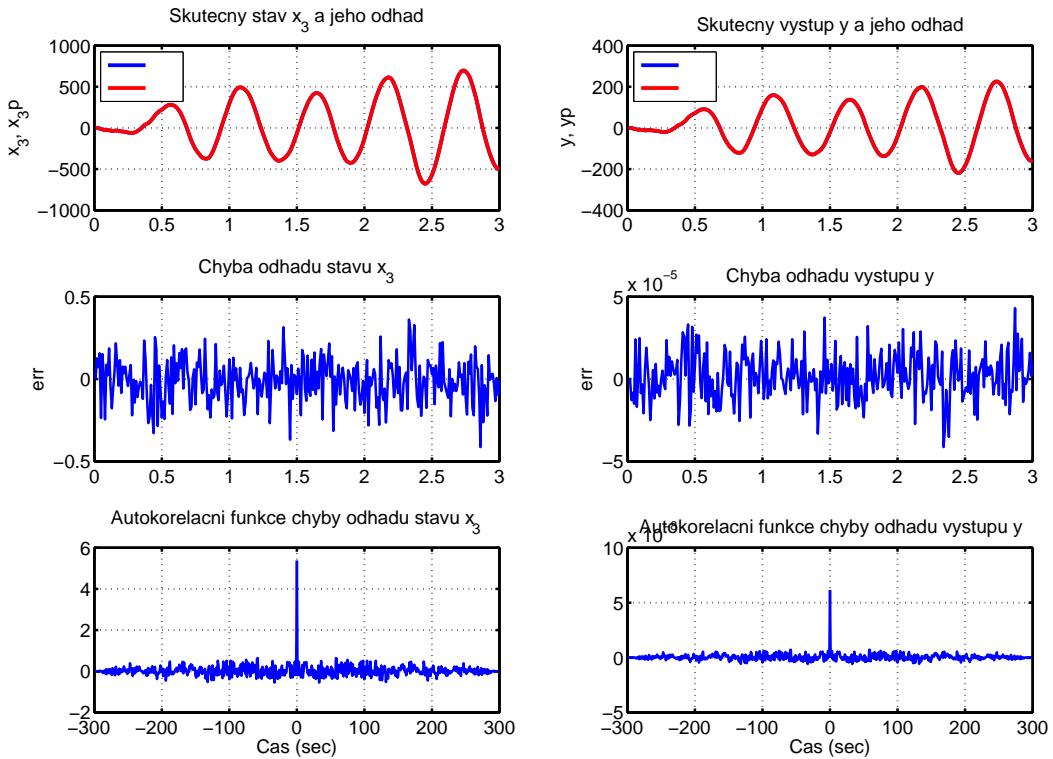
Na obr. 6.9 resp. 6.10 jsou potom vykresleny průběhy skutečných a odhadovaných stavů a skutečného a odhadovaného výstupu diskrétního stochastického modelu servomechanismu ETH s navrženým Kalmanovým filtrem.



Obrázek 6.9: Průběhy skutečných a odhadovaných stavů $x_1(k)$, $x_2(k)$ diskrétního stochastického modelu servomechanismu ETH

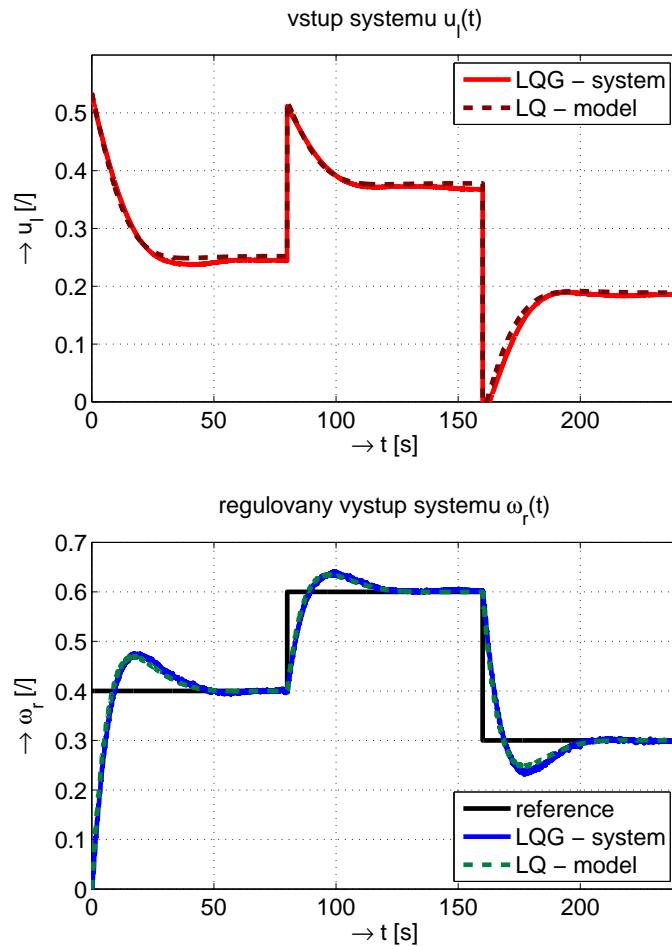
To, zda jsme při návrhu Kalmanova filtru postupovali správně, si můžeme ověřit např. tím, že chyba odhadu výstupu $\varepsilon(k|k-1)$ musí opět představovat tzv. bílý šum. To nám potvrzuje jednak autokorelační funkce chyby odhadu výstupu na obr. 6.10 a jednak i výpočet její střední hodnoty z vypočtených dat:

$$\varepsilon\{\varepsilon(k|k-1)\} \doteq -1 \cdot 10^{-6} \doteq 0 \quad (6.54)$$



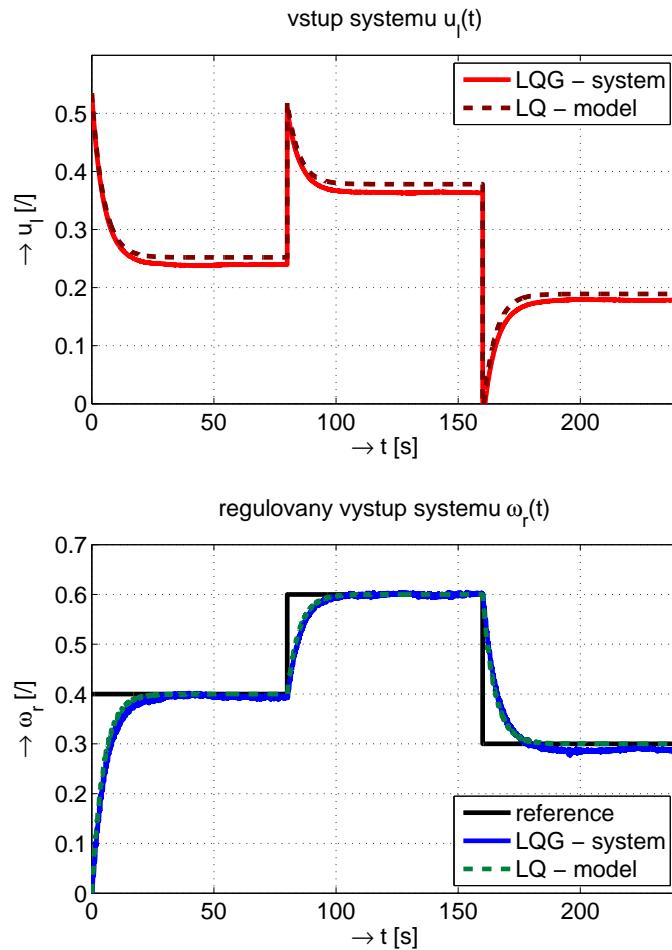
Obrázek 6.10: Průběhy skutečného a odhadovaného stavu $x_3(k)$ a skutečného a odhadovaného výstupu $y(k)$ diskrétního stochastického modelu servomechanismu ETH

Chování uzavřené regulační smyčky A.5 s navrženým LQ regulátorem (totožný s regulátorem z předchozí kapitoly 6.1) a Kalmanovým filtrem pro zvolený skokový referenční signál $w(k)$ je potom znázorněno na obr. 6.11 resp. 6.12 ve verzi s modifikovaným LQ regulátorem ($\mathbf{K}_{se} = 0$).



Obrázek 6.11: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí LQG regulátoru

Pokud porovnáme průběhy regulovaných veličin $\omega_r(t)$ na obr. 6.11 resp. 6.12, vidíme, že rozdíly mezi navrženým LQG a předchozím LQ řízením nejsou nikterak velké. Ze vstupu a výstupu laboratorního modelu se spojenými servomotory ETH tedy lze pomocí Kalmanova filtru velmi dobře odhadovat všechny potřebné stavy systému.



Obrázek 6.12: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí modifikovaného LQG regulátoru s vyřazeným sumátorem regulačních odchylek

Kapitola 7

Návrh robustního řízení servomechanismu ETH

Robustní řízení představuje sadu metod pro návrh řízení, které se snaží brát v úvahu nepřesnosti v modelování dynamických systémů, případně nestálost takových systémů v průběhu samotného procesu řízení. V této části tedy bude nejprve velmi stručně vysvětleno, jak neurčitosti matematicky modelovat a jak tyto modely následně použít pro návrh robustního regulátoru. Důraz bude kláden na prakticky osvědčený návrh regulátorů ve frekvenční oblasti ovšem z pohledu moderních optimalizační metod označovaných jako H_∞ -optimalizace.

Robustní řízení je tedy moderní metoda návrhu regulátorů beroucí při návrhu v úvahu také neurčitosti v modelech dynamických systémů. Neurčitost lze definovat jako nesouhlas mezi matematickým modelem a reálným objektem. Důvodů pro neurčitosti v modelech je hned několik:

- fyzikální parametry modelu jsou změřeny nepřesně ($\pm 5\%$),
- fyzikální parametry se mohou měnit v čase,
- nedokonalé nebo špatné porozumění fyzikální podstatě problému,
- vědomé použití méně dokonalého modelu (ekonomicky výhodnější),
- použití jednoduššího modelu kvůli výpočtu aj.

Jako jeden příklad za všechny můžeme uvést pro náš konkrétní případ laboratorního modelu ETH také např. nestálost teploty v laboratoři K26, která při řízení modelu velmi výrazně působí na dynamiku celého systému (ovlivňuje především statickou převodní charakteristiku motoru, obr. 2.3). To ale mluvíme již o časově proměnných perturbacích a těmi se v této části zabývat nebudeme.

Neurčitost v modelu potom můžeme modelovat různými způsoby¹⁶, ale v zásadě je

¹⁶např. s využitím Robust Control Toolboxu v prostředí MATLAB

rozdělujeme do dvou základních skupin:

- neurčitost strukturovaná,
- neurčitost nestrukturovaná.

O *strukturované neurčitosti* mluvíme tehdy, pokud se některé parametry modelu reálného systému pohybují v určitých známých intervalech (např. uvažujeme proměnný moment setrvačnosti $J \in \langle J_{\min}, J_{\max} \rangle$ apod.). Modely neurčitostí toho typu se však vzhledem k častému nedostatku informací o reálném systému příliš nepoužívají.

Příkladem *nestrukturované neurčitosti* potom může být např. zanedbaná (nepřesně známá) dynamika systému na vyšších frekvencích a lze ji popsat multiplikativním, aditivním nebo zpětnovazebním modelem. Nejčastěji se však setkáme s modelem multiplikativním, který budeme také dále používat:

$$P = (1 + \Delta W_2) P_0, \quad \text{kde } \|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad \forall \omega, \quad (7.1)$$

kde

- P_0 ... nominální model,
- P ... skutečný (perturbovaný) model,
- W_2 ... váhová funkce (profil maximální amplitudy neurčitosti, frekvenčně závislá)
- Δ ... neznámá informace o skutečné hodnotě a fázi perturbace ($\|\Delta\|_\infty \leq 1 \Rightarrow |\Delta(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$)

H_∞ norma SISO systému potom označuje:

$$\|P\|_\infty = \max_\omega |P(j\omega)|. \quad (7.2)$$

V teorii robustního řízení potom řešíme především tyto dva centrální problémy:

- robustní stabilita
- robustní kvalita regulace

Robustní stabilitu lze definovat jako stabilitu uzavřené regulační smyčky s daným regulátorem, která je garantována pro všechny přípustné odchylinky modelu od skutečného systému, tj. pro všechny soustavy popsané modelem neurčitosti P (7.1). Obdobně *robustní kvalita řízení* je souhrn všech požadavků na kvalitu regulace zaručených příslušným regulátorem pro všechny perturbované modely P .

Kritérium robustní stability lze odvodit pomocí tzv. věty o malém zesílení¹⁷, viz [2]. Pro multiplikativní model neurčitosti (7.1) v tomto případě musí platit:

$$\|W_2 T_0\|_{\infty} \stackrel{!}{<} 1 \approx |T_0(j\omega)| \stackrel{!}{<} |1/W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega, \quad (7.3)$$

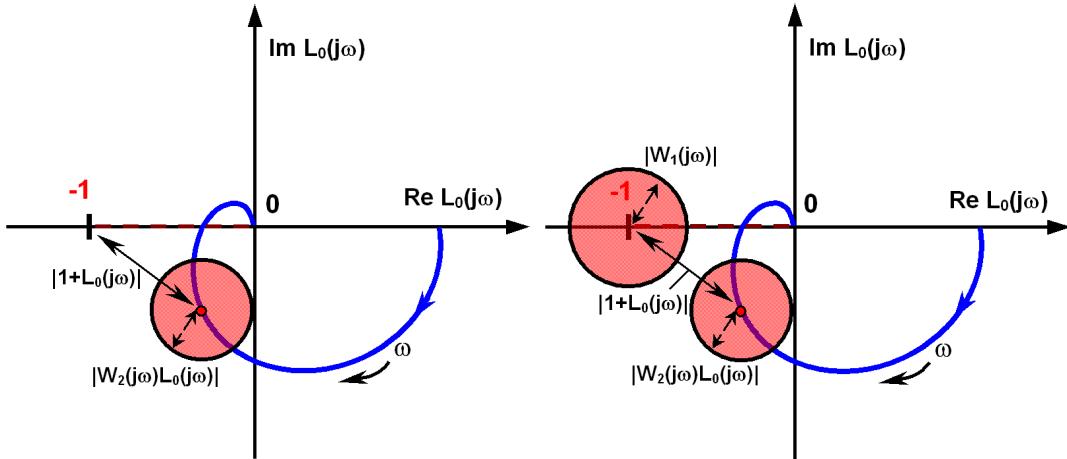
kde přenos T_0 označuje přenos uzavřené regulační smyčky s nominálním modelem:

$$T_0(s) = \frac{L_0(s)}{1 + L_0(s)} = \frac{P_0(s) C(s)}{1 + P_0(s) C(s)}. \quad (7.4)$$

Úpravou kritéria (7.3) lze dále odvodit grafickou interpretaci robustní stability (viz obr. 7.1a):

$$RS \Leftrightarrow \left| W_2 \frac{L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W_2 L_0(j\omega)| < |1 + L_0(j\omega)|, \quad \forall \omega. \quad (7.5)$$

Z obr. 7.1 vidíme, že podmínka robustní stability nám říká, že neurčitost soustavy nesmí změnit počet oběhů frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky $L_0(j\omega)$ v komplexní rovině kolem bodu $[-1, 0j]$.



Obrázek 7.1: a) Grafická interpretace robustní stability, b) Grafická interpretace robustní kvality regulace (multiplikativní model neurčitosti)

Nutná a postačující podmínka robustní kvality řízení je potom pro multiplikativní model neurčitosti (7.1) dána jako součet tzv. nominální kvality řízení a zmíněné podmínky robustní stability (7.3):

$$\|W_1 S_0\|_{\infty} + \|W_2 T_0\|_{\infty} \stackrel{!}{<} 1, \quad (7.6)$$

¹⁷small-gain theorem

resp. platí ekvivaletní vztah:

$$\|W_1 S\|_\infty \stackrel{!}{<} 1, \quad \forall \omega \approx |S(j\omega)| \stackrel{!}{<} |1/W_1(j\omega)|, \quad \forall \omega, \quad (7.7)$$

jelikož platí:

$$RK \Leftrightarrow |W_1(j\omega) S(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega \Leftrightarrow \quad (7.8)$$

$$\Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1 + P_0(j\omega) C(j\omega) [1 + \Delta(j\omega) W_2(j\omega)]|, \quad |\Delta(j\omega) \leq 1|, \quad \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1 + L_0(j\omega) + W_2(j\omega) L_0(j\omega)|, \quad \forall \omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1 + L_0(j\omega)| > |W_1(j\omega)| + |W_2(j\omega) L_0(j\omega)|, \quad \forall \omega \Leftrightarrow \quad (7.9)$$

$$\Leftrightarrow |W_1(j\omega) S_0(j\omega)| + |W_2(j\omega) T_0(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega.$$

Grafická interpretace kritéria robustní kvality regulace podle (7.9), obr. 7.1b, nám potom říká, že pokud má být s daným regulátorem zaručena požadovaná robustní kvalita regulace, nesmí se kružnice, jejichž poloměry jsou dány absolutními hodnotami váhových funkcí W_1 a W_2 , pro příslušnou frekvenci ω protnout. Nominální zesílení v otevřené regulační smyčce tedy musí být dostatečně velké, aby zpětnovazební obvod byl schopen kompenzovat neurčitosti v modelu.

7.1 Návrh „robustního“ PI regulátoru pro řízení otáček servomechanismu ETH

O návrhu PI regulátoru pro řízení otáček $\omega_r(t)$ již bylo pojednáno v kapitole 5.2, nyní se však pokusíme tento PI regulátor ($k_p = 0.7816$, $k_i = 0.109424$) pomocí teorie robustního řízení vhodně modifikovat tak, aby splňoval požadavky robustní stability a robustní kvality regulace. Byl proto zvolen následující postup.

Jako nominální model regulované soustavy byl zvolen zjednodušený přenos získaný identifikací pomocí měření přechové charakteristiky (4.2):

$$P_0(s) = \frac{1.5874}{10.22s + 1}. \quad (7.10)$$

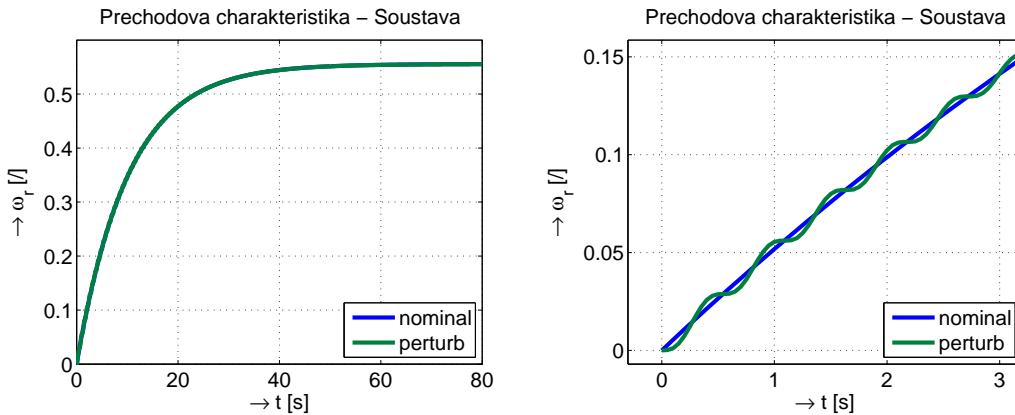
Dále předpokládáme, že chování systému na vyšších frekvencích je ve skutečnosti složitější a je ovlivněno ještě výskytem dvou komplexně sdužených pólů $s_{2,3} = \sigma \pm j\tau$. Tuto dvojici tedy zahrneme do multiplikativního modelu neurčitosti. Perturbovaný model tedy je ve tvaru:

$$P(s) = P_0(s) \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(s - \sigma + j\tau)(s - \sigma - j\tau)} = P_0(s) \frac{\sigma^2 + \tau^2}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \tau^2}. \quad (7.11)$$

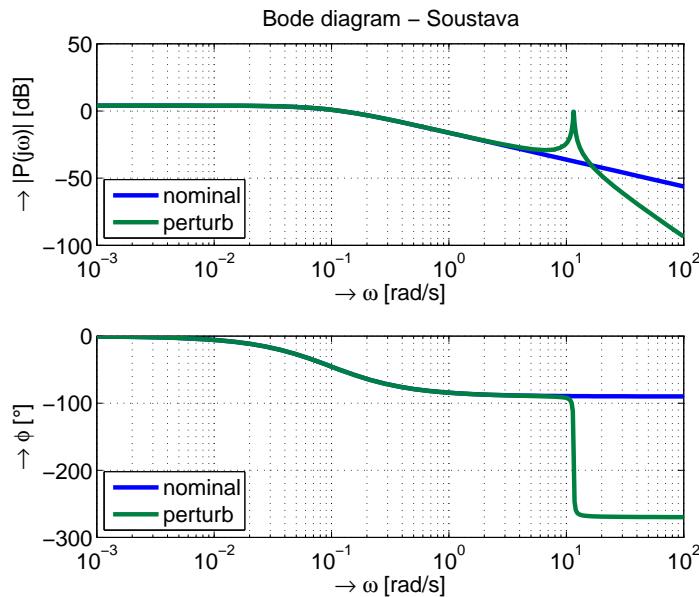
Parametry multiplikativní neurčitosti σ a τ lze s ohledem na dominantní pól nominálního modelu (7.10) odhadovat někde v intervalech $\sigma \in \langle -0.1; 0 \rangle$, $\tau \in \langle 10; 100 \rangle$ a s těmito hodnotami dále pracovat. Nicméně, abychom mohli dále provést srovnání kvality regulace pomocí již navrženého PI regulátoru, zvolíme tyto parametry tak, jako kdybychom je odhadli nejlépe, jak je to jen možné, tedy:

$$s_{2,3} = \sigma \pm j\tau = -0.0822 \pm j11.5532, P(s) = \frac{20.733}{(s + 0.09785)(s^2 + 0.1644 + 133.5)} \quad (7.12)$$

Srovnání nominálního (7.10) a perturbovaného (7.12) modelu nám v časové oblasti ukazuje obr. 7.2 resp. ve frekvenční oblasti obr. 7.3.



Obrázek 7.2: Srovnání nominálního a perturbovaného modelu (+ detail rozbehu motoru)



Obrázek 7.3: Srovnání nominálního a perturbovaného modelu - Bodeho frekvenční charakteristika

Přechodové charakteristiky nominálního a perturbovaného modelu 7.2 se liší jen velice nepatrně a při nepřesném a krátkodobém měření mohou být oba případy experimentálně nerozlišitelné. Přesto má kmitání velký vliv na chování uzavřené smyčky pro některé nastavení regulátoru. Na Bodeho frekvenční charakteristice 7.3 je potom rozdíl obou systémů patrnější.

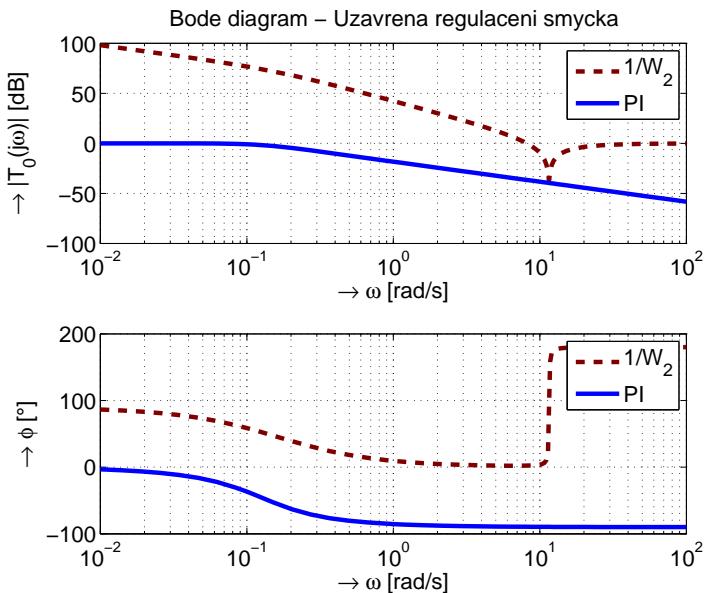
Nyní tedy budeme uvažovat neurčitost systému na vyšších frekvencích a budeme hledat váhovou funkci $W_2(j\omega)$, resp. přenos $W_2(s)$ pro multiplikativní model neurčitosti. Podle (7.1) tedy lze psát:

$$\left| \frac{\sigma^2 + \tau^2}{-\omega^2 - 2\sigma j\omega + \sigma^2 + \tau^2} - 1 \right| \leq W_2(j\omega), \quad \forall \omega, \quad (7.13)$$

tedy platí:

$$W_2(s) = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \tau^2} - 1 = \frac{-s^2 + 2\sigma s}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \tau^2}. \quad (7.14)$$

Nyní můžeme podle (7.3) provést pro již navržený PI regulátor (5.12) test robustní stability, obr. 7.4.



Obrázek 7.4: Test robustní stability pro navržený PI regulátor

Vidíme, že amplitudová frekvenční charakteristika přenosu uzavřené smyčky leží celá pod amplitudovou frekvenční charakteristikou $|1/W_2(j\omega)|$, tudíž navržený PI regulátor podle předpokladů splňuje test robustní stability.

Dále se můžeme zajímat také o robustní kvalitu regulace. Za účelem stanovení vhodné váhové funkce $W_1(j\omega)$, podle které bychom mohli objektivně posuzovat robustní kvalitu

regulace a vytyčit tak minimální mez kvality, pod kterou bychom nechtěli klesnout, byl model frekvenčně závislé váhové funkce $W_1(j\omega)$ approximován přenosem ve tvaru:

$$W_1^{-1}(s) = \frac{k_s \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{\frac{s}{\omega_2} + 1}. \quad (7.15)$$

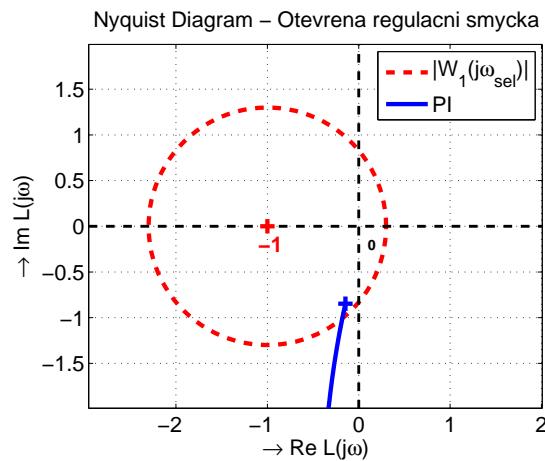
Abychom mohli neznámé parametry k_s , ω_1 , ω_2 této váhové funkce nějak přirozeně volit, byla nejprve stanovena frekvence, na které bychom rádi zlepšili kvalitu regulace již dříve navržené PI regulace otáček. Zvolili jsme tedy frekvenci $\omega_{sel.}$ odpovídající šířce pásma frekvenční charakteristiky uzavřené regulační smyčky $T_0(j\omega)$ (obr. 7.4):

$$\omega_{sel.} = \omega_{BW} \doteq 0.16 \text{ rad/s.} \quad (7.16)$$

Další postup je takový, že amplitudu váhové funkce $W_1(j\omega)$ volíme na této frekvenci tak, aby původně navržený PI regulátor neprošel testem robustní kvality regulace (7.8):

$$|W_1(j\omega_{sel.})| = 1.3, \quad (7.17)$$

což potvrzuje Nyquistova křivka otevřené regulační smyčky s perturbovaným modelem $L(j\omega)$ na obr. 7.5.

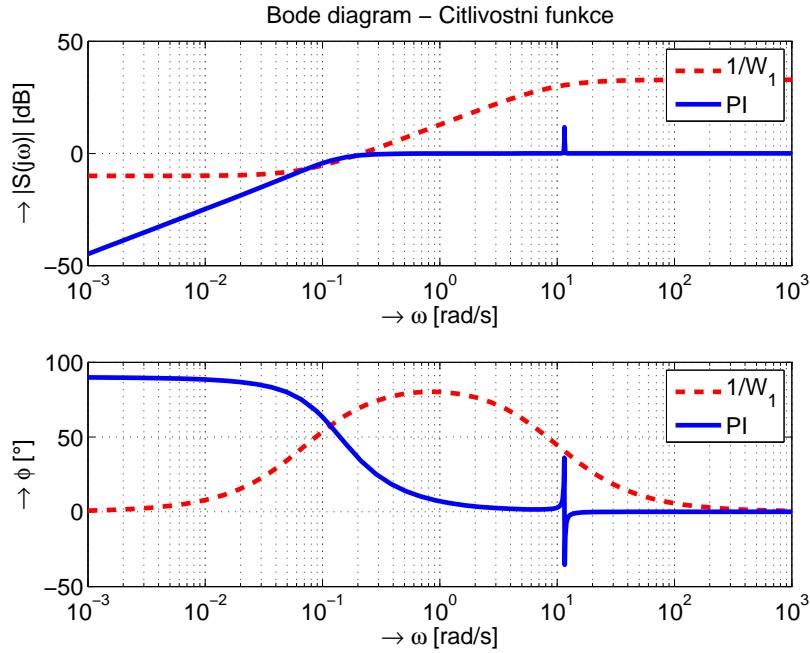


Obrázek 7.5: Test robustní kvality regulace pro navržený PI regulátor

Statické zesílení k_s a zlomovou frekvenci ω_2 váhové funkce (7.15) volíme s ohledem na amplitudovou frekvenční charakteristiku citlivostní funkce $S(j\omega)$ pro původně navržený PI regulátor (viz obr. 7.6) tak, aby podle kritéria robustní kvality regulace (7.7) bylo reálné navrhnout nový PI regulátor, který by podmínce robustní kvality regulace vyhovoval.

Parametry váhové funkce (7.15) k_s a ω_2 tedy byly odhadem zvoleny takto:

$$k_s = -10 \text{ dB} \approx 0.31623, \quad \omega_2 = 10 \text{ rad/s.} \quad (7.18)$$



Obrázek 7.6: Test robustní kvality regulace pro navržený PI regulátor

Nyní nám zbývá určit poslední parametr ω_1 modelu váhové funkce (7.15). Ten určíme využitím znalosti hodnoty její amplitudy na frekvenci $\omega = \omega_{sel.}$:

$$\left| W_1^{-1}(j\omega_{sel.}) \right| = \frac{1}{|W_1(j\omega_{sel.})|} = \frac{1}{1.3} \doteq 0.76923 \quad (7.19)$$

Podle (7.15) tedy můžeme psát:

$$\begin{aligned} \left| W_1^{-1}(j\omega_{sel.}) \right| &= \left| \frac{k_s \left(\frac{j\omega_{sel.}}{\omega_1} + 1 \right)}{\frac{j\omega_{sel.}}{\omega_2} + 1} \right| = k_s \sqrt{\frac{\frac{\omega_{sel.}^2}{\omega_1^2} + 1}{\frac{\omega_{sel.}^2}{\omega_2^2} + 1}} \\ \Rightarrow \quad \omega_1 &= \omega_{sel.} \sqrt{\frac{k_s}{\left| W_1^{-1}(j\omega_{sel.}) \right|^2 \left(\frac{\omega_{sel.}^2}{\omega_2^2} + 1 \right) - k_s^2}} \doteq 0.072 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Dostáváme tedy přenos zvolené váhové funkce resp. jeho převrácenou hodnotu:

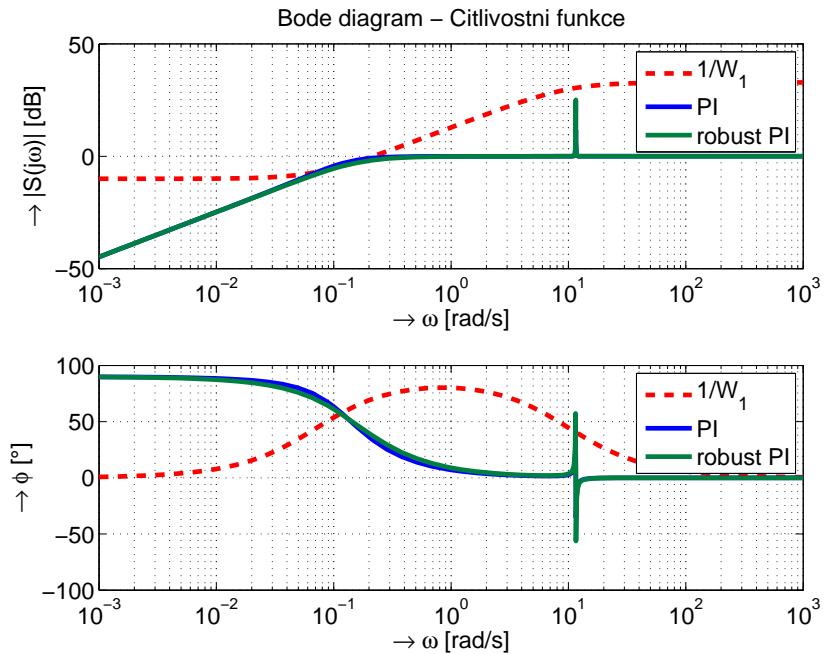
$$W_1^{-1}(s) = \frac{k_s \left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{\frac{s}{\omega_2} + 1} = \frac{0.31623 \left(\frac{s}{0.072} + 1 \right)}{\frac{s}{10} + 1}. \quad (7.21)$$

Modifikace dříve navrženého PI regulátoru (5.12) s respektováním podmínek zvolené robustní kvality regulace a robustní stability potom spočívala v „ladění“ původních parametrů regulátoru navrženého klasickými metodami tak, aby byla splněna všechna zmíněná kritéria robustního řízení.

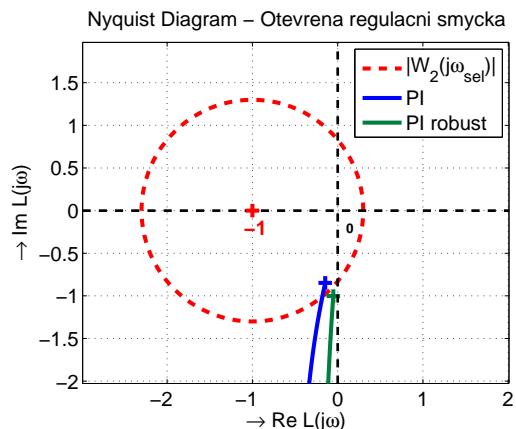
Po sérii experimentů byl navržen PI regulátor s těmito parametry:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = 1 + \frac{0.109424}{s} \quad (7.22)$$

Z obrázku 7.7 a dále 7.8 je zřejmé, že tento nově navržený PI regulátor splňuje na rozdíl od toho předchozího také podmínu na zvolenou robustní kvalitu regulace.

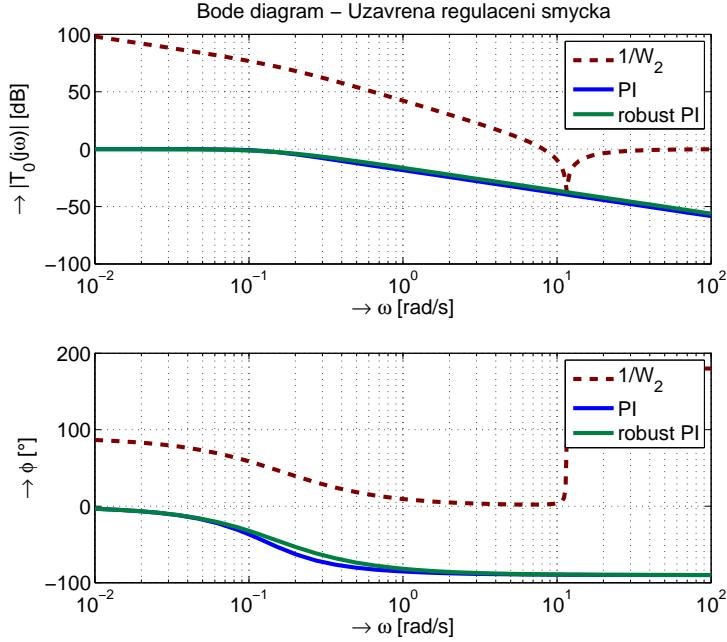


Obrázek 7.7: Test robustní kvality regulace pro navržený „robustní“ PI regulátor



Obrázek 7.8: Test robustní kvality regulace pro navržený „robustní“ PI regulátor

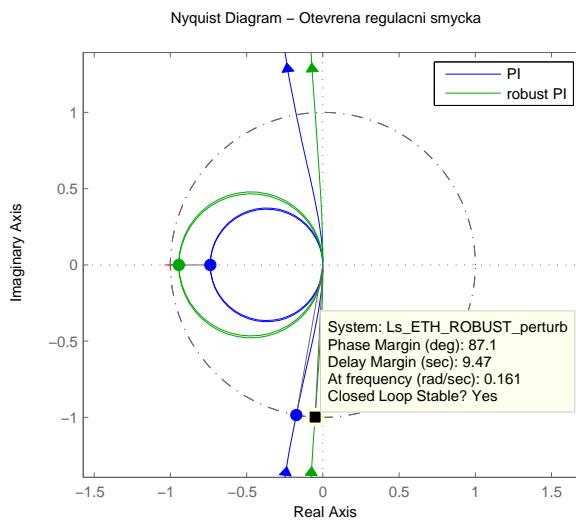
Obr. 7.9 potom pouze dokládá to, že navržený „robustní“ PI regulátor splňuje také podmínu robustní stability (7.3).



Obrázek 7.9: Test robustní stability pro navržený PI „robustní“ regulátor

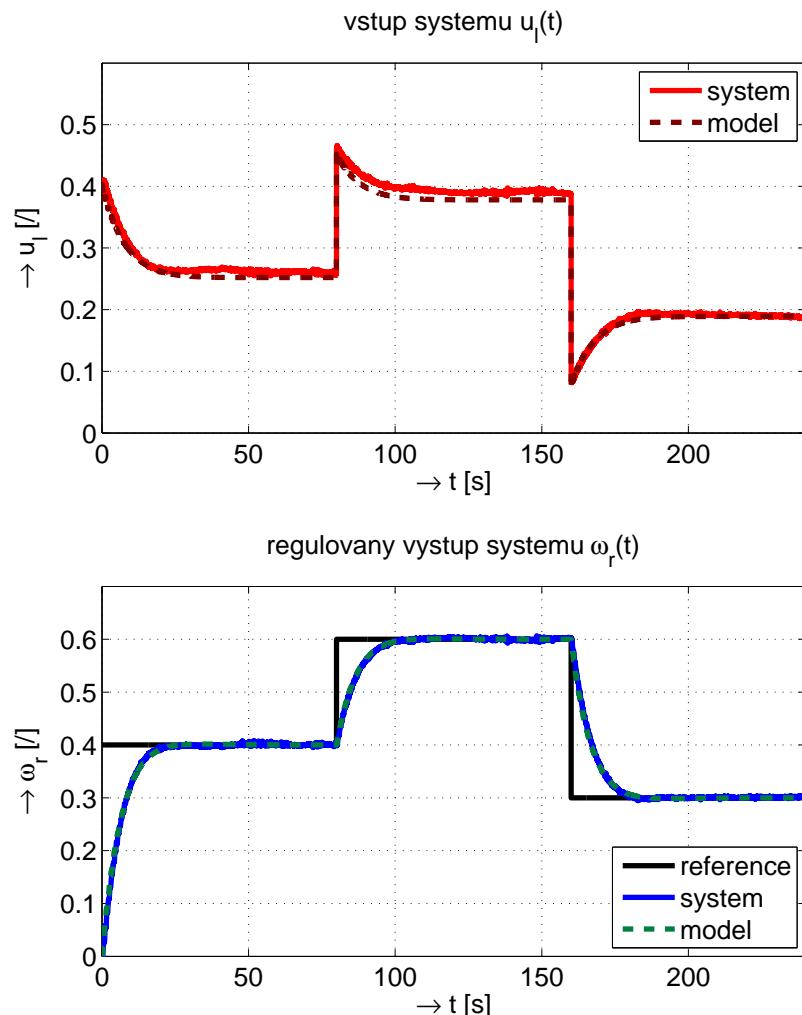
Můžeme si zde ale mimo jiné také všimnout, že šířka přenášeného frekvenčního pásma je o něco větší, což znamená i rychlejší odezvu navrženého regulačního obvodu.

Z obr. 7.10 lze zase vyčíst, že z pohledu klasických frekvenčních metod návrhu PID regulátorů došlo také ke zvýšení fázové bezpečnosti PM .



Obrázek 7.10: Srovnání dosažené kvality regulace navrženého PI a „robustního“ PI regulátoru

Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH i jeho matematického modelu pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ pomocí navrženého „robustního“ PI regulátoru (7.22) je zachycen na obr. 7.11.



Obrázek 7.11: Průběh regulace otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí „robustního“ PI regulátoru

Kapitola 8

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo se nejprve seznámit s laboratorním modelem se spojenými servomotory ETH, který se nachází v laboratoři teorie automatického řízení K26 na katedře řídicí techniky fakulty elektrotechnické ČVUT v Praze. V počátní fázi šlo nejprve o to, seznámit se všemi jeho vstupy a výstupy, s jeho způsobem připojení k PC a jeho celkovým senzorovým vybavením a v neposlední řadě také se všemi možnými vstupními a výstupními omezeními a dalšími úskalými, které s sebou tento reálný systém přináší. V některých případech bylo možné navrhnut vzhodná opatření, kterými lze tyto nepříjemné vlivy alespoň částečně eliminovat (viz například návrh číslicové filtrace pro zpracování signálu ze senzoru úhlové rychlosti v kap. 2.3).

Významným bodem dále bylo odvodit a v prostředí MATLABu sestavit přesný matematický model reálného systému vycházající z jeho skutečné fyzikální podstaty. Velká pozornost byla věnována také samotné identifikaci systému, kdy bylo vyzkoušeno více možných způsobů experimentální identifikace. Při identifikaci byl kladen důraz především na přesné stanovení všech neznámých parametrů stavového popisu matematického modelu servomechanismu ETH. Metoda identifikace ARX modelu potom posloužila jako možná alternativa k ověření správnosti matematického modelu - poznamenejme, že přenosy (4.4) a (4.13) jsou takřka identické.

Přitom jsme se po celou dobu zabývali systémem, který není nijak složitý co do počtu řiditelných vstupů nebo měřitelných výstupů nebo snad nějak příliš komplikovaný z hlediska identifikace nebo nalezení matematicko-fyzikálního modelu. Dokonce ani nebylo nutné model systému nějak příliš zjednodušovat nebo dokonce redukovat jeho řád, jak o tom také pojednává kniha [2]. Nicméně šlo o takový systém, u kterého i drobné detaily jako je pružnost a krut hrídele simulovaná pomocí pružného spojení ve střední části modelu mohou hrát svou jistou nikoli však zanedbatelnou roli. Důsledkem toho se i díky výskytu nepříjemných kmitavých pólů v přenosu systému může komplikovat i samotný návrh řízení laboratorního modelu.

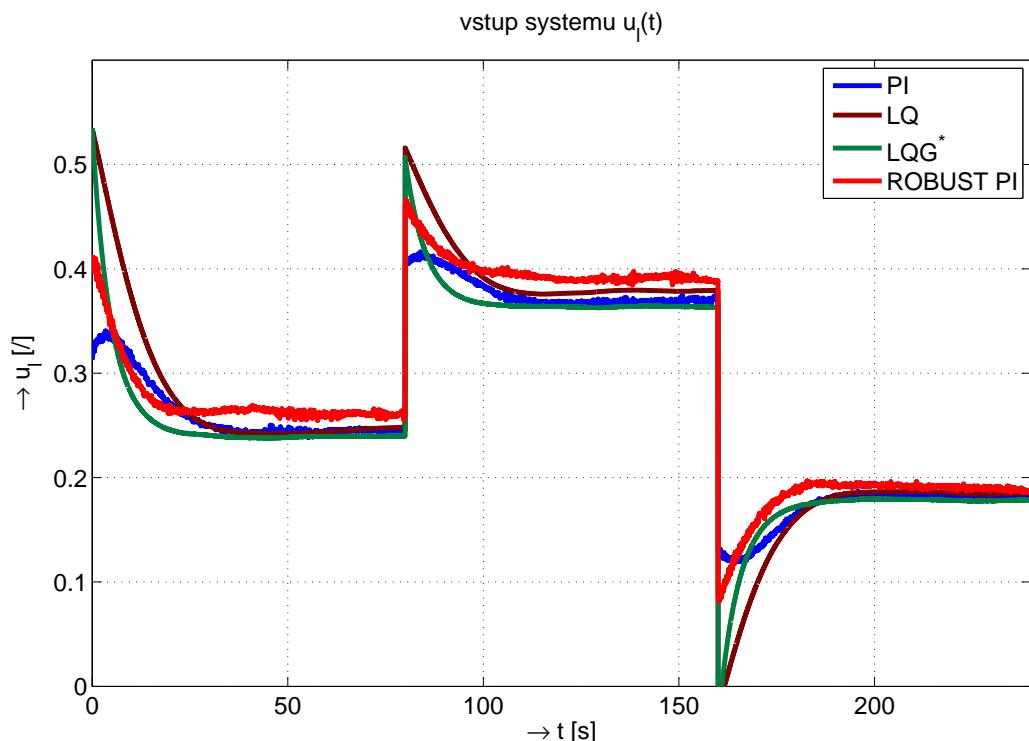
V kapitolách 5 až 7 potom byl konfrontován přístup klasického návrhu základních PID regulátorů s postupem návrhu z pohledu moderní teorie řízení optimálních regulátorů typu LQ, LQG a robustního řízení. Také bylo v této práci ukázáno praktické využití

Kalmanova filtru k návrhu optimálního pozorování resp. odhadování neznámého stavu procesu na základě měření vstupních a výstupních signálů systému v případě, kdy není tento stav měřitelný.

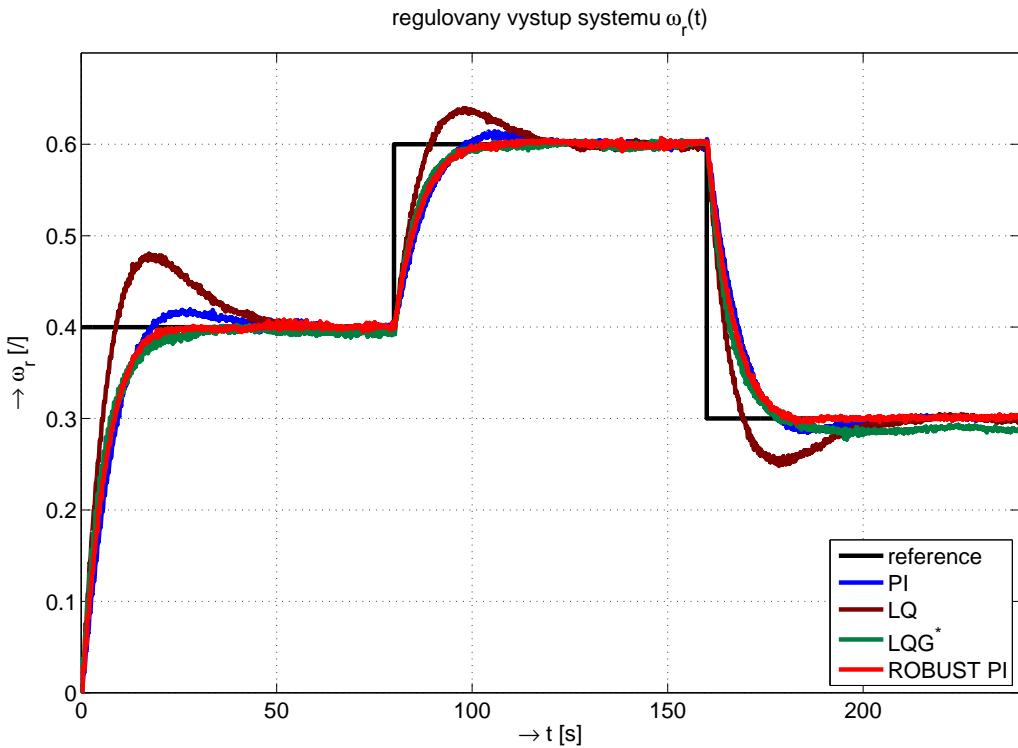
Ve všech případech přitom šlo o návrh regulační smyček pro řízení úhlové rychlosti ω_r pomocí vstupního napětí u_l , která by co nejlépe splňovala požadavky na zvolenou kvalitu regulace. Samostatná kapitola (5.1) byla věnována také řízení polohy pravé hřídele φ_r pomocí napětí u_l .

Výsledky všech navržených regulátorů pro řízení otáček $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH pro zvolený schodovitý referenční signál $w(t)$ shrnují obr. 8.1 a 8.2.

Označení LQG* potom nese modifikovaný LQG regulátor s vyřazeným sumátorem regulačních odchylek způsobem popsaným v kapitole 6.1.



Obrázek 8.1: Srovnání všech typů navržených regulátorů pro řízení úhlové rychlosti $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH - akční zásah



Obrázek 8.2: Srovnání všech typů navržených regulátorů pro řízení úhlové rychlosti $\omega_r(t)$ pravé hřídele servomechanismu ETH - regulovaná veličina

Je přinejmenším velice zajímavé, že při použití těchto zcela odlišných přístupů (klasický \times moderní přístup návrhu) jsme nakonec v jistém smyslu dospěli k téměř totožným výsledkům. Pokud totiž porovnáme např. výsledky regulace dosažené pomocí navrženého LQ* resp. LQG* regulátoru s vyrazeným sumátorem regulačních odchylek¹⁷ s výsledky regulace dosažené pomocí „robustního“ PI regulátoru splňujícího požadavky na zvolenou robustní kvalitu regulace, vidíme, že jejich algoritmy řízení dospěly odlišnými cestami k téměř stejnemu způsobu řízení laboratorního modelu. Je tedy téměř jisté, že s ohledem na vstupní omezení systému u_l již nelze dosáhnout při řízení otáček pravé hřídele lepších výsledků.

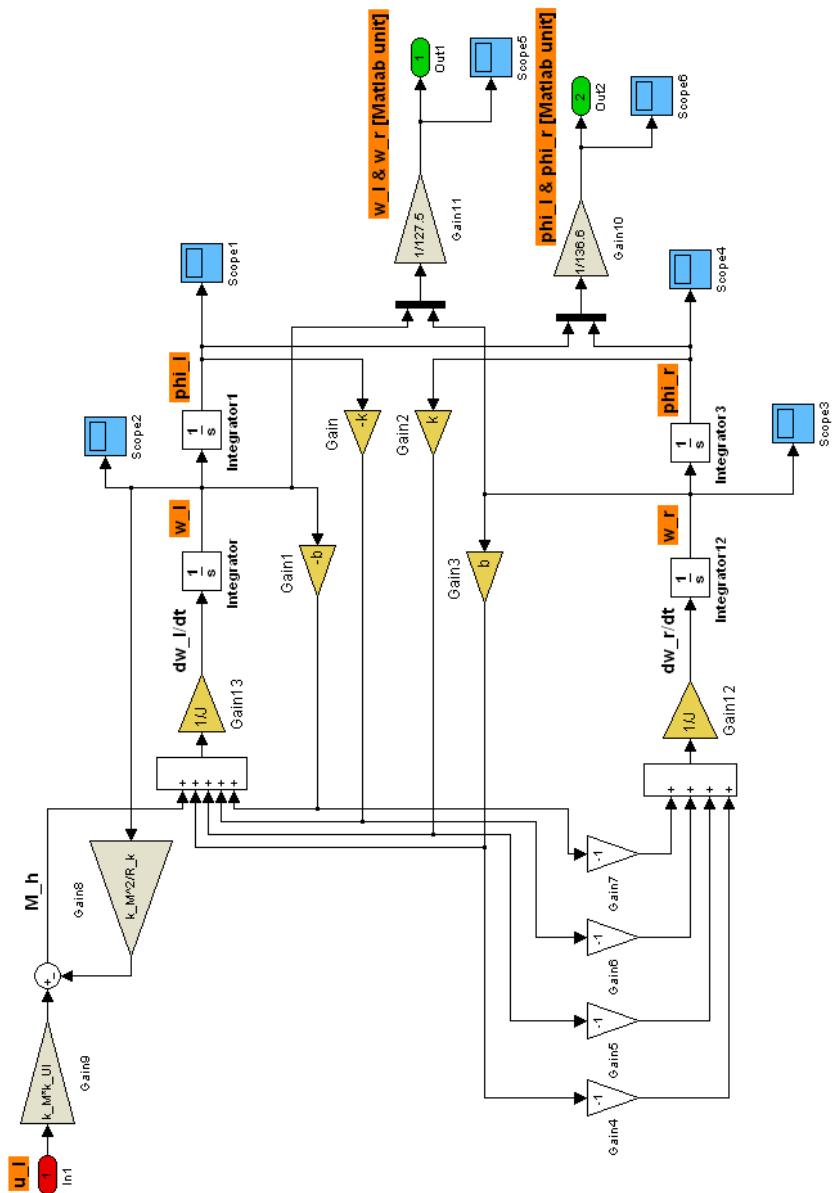
¹⁷poznamenejme, že v průběhu regulované veličiny $\omega_r(t)$ je viditelná jistá nepatrná trvalá regulační ochylka u této navržené LQG* regulace

Literatura

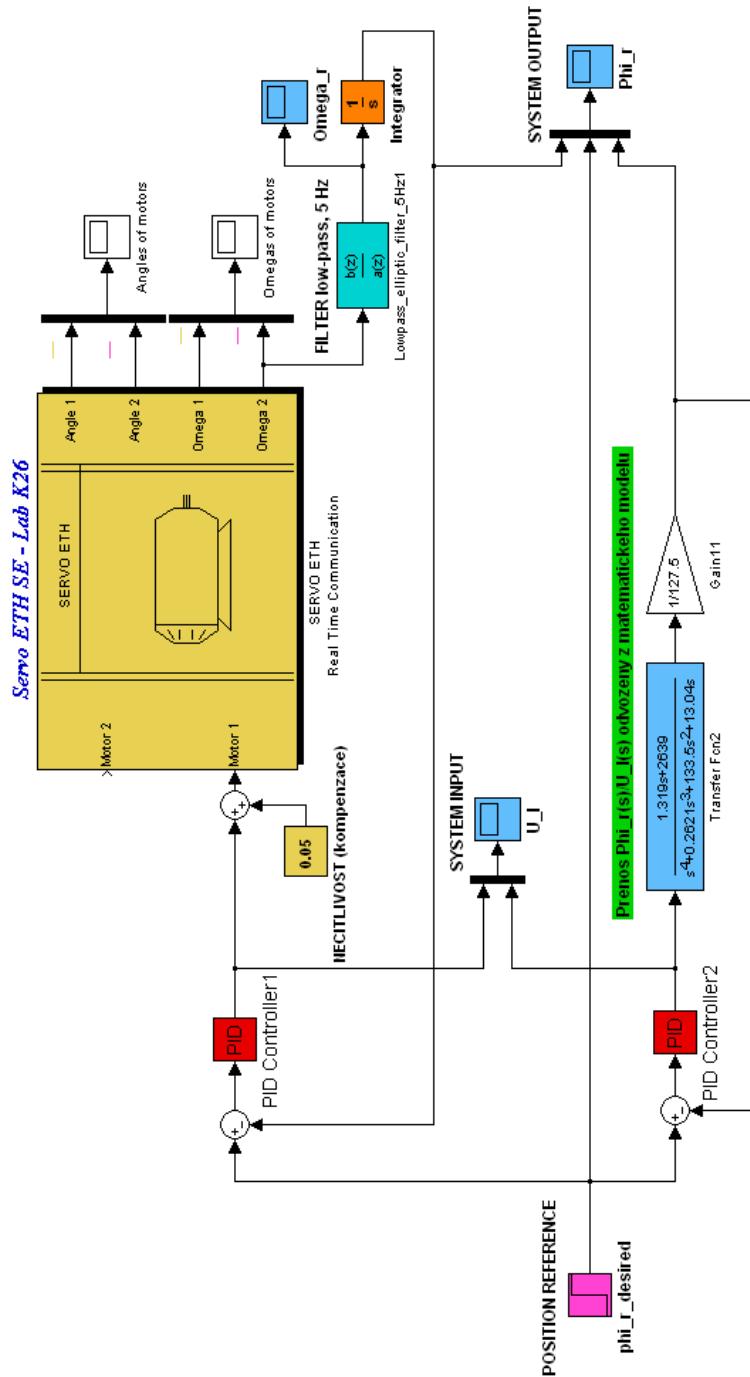
- [1] G.F.FRANKLIN, J.D. POWELL, A. EMAMI-NAEINI: *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice-Hall, 2006.
- [2] S. SKOGESTAD, I. POSTLETHWAITE: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Second ed., J.Wiley & Sons, 2005.
- [3] P. NOSKIEVIČ: *Modelování a identifikace systémů*. MONTANEX a.s., Ostrava, 1999.
- [4] J. ŠTECHA: *Optimální rozhodování a řízení*. Skriptum ČVUT, FEL, 2000.
- [5] J. ROUBAL: *Laboratoř teorie automatického řízení* [online] (2009).
⟨<http://support.dce.felk.cvut.cz/lab26/>⟩
- [6] J. ROUBAL, P. HUŠEK, A SPOL.: *Základy regulační techniky v příkladech* [online] (2009).
⟨<http://support.dce.felk.cvut.cz/pub/roubalj/>⟩
- [7] K. JONÁŠ: *GUI pro návrh PID regulátorů* [online] (2008), BP, ČVUT-FEL.
⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/lab26/download/library/bp_2008_jonas_karel.pdf⟩
- [8] V. HAVLENA: *X35MTR Nové slides* [online] (2009), ČVUT-FEL.
⟨http://support.dce.felk.cvut.cz/e-kurzy/file.php/15/prednasky/mtr_slidy_1up.pdf⟩
- [9] *The Mathworks* [online] (2008).
⟨<http://www.mathworks.com/>⟩
- [10] *Wikipedia - The Free Encyclopedia* [online] (2008).
⟨http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page⟩

Příloha A

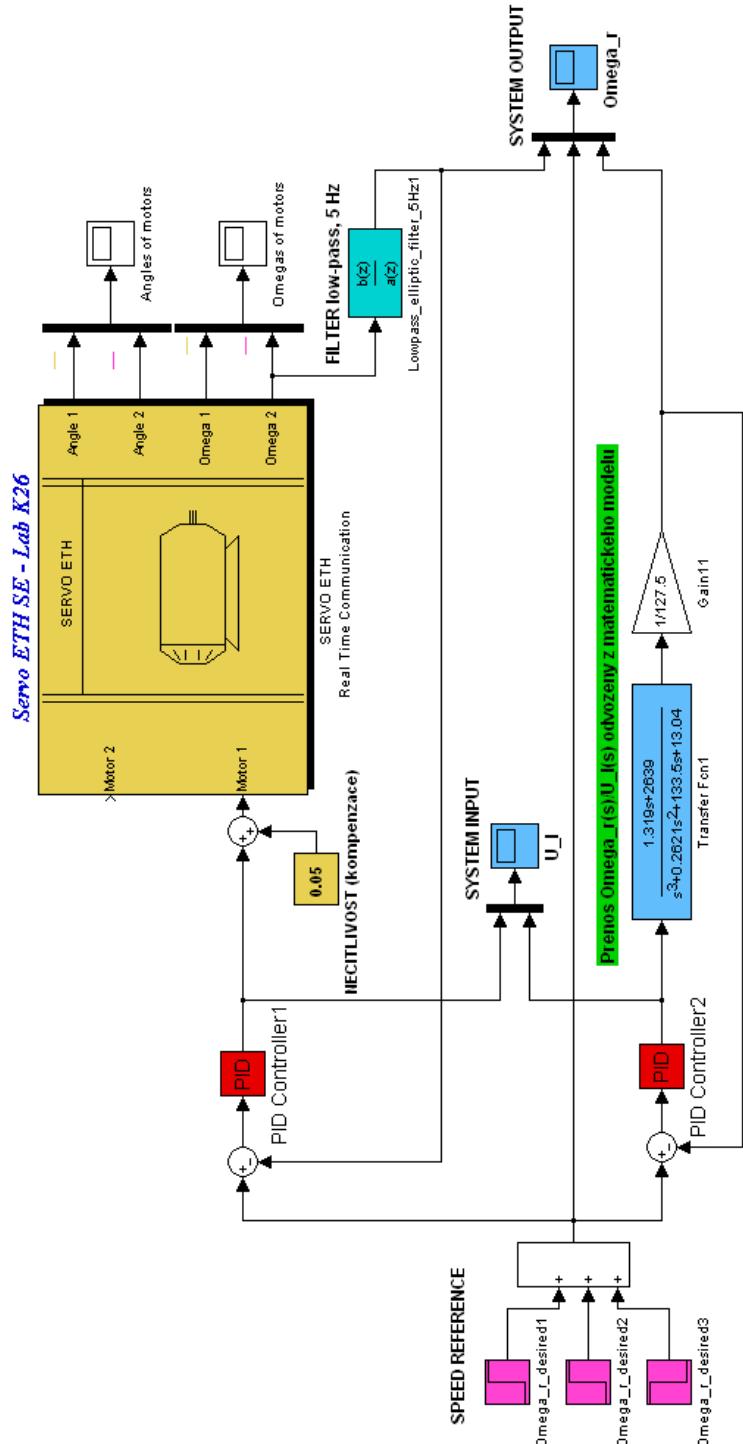
Simulinková schéma



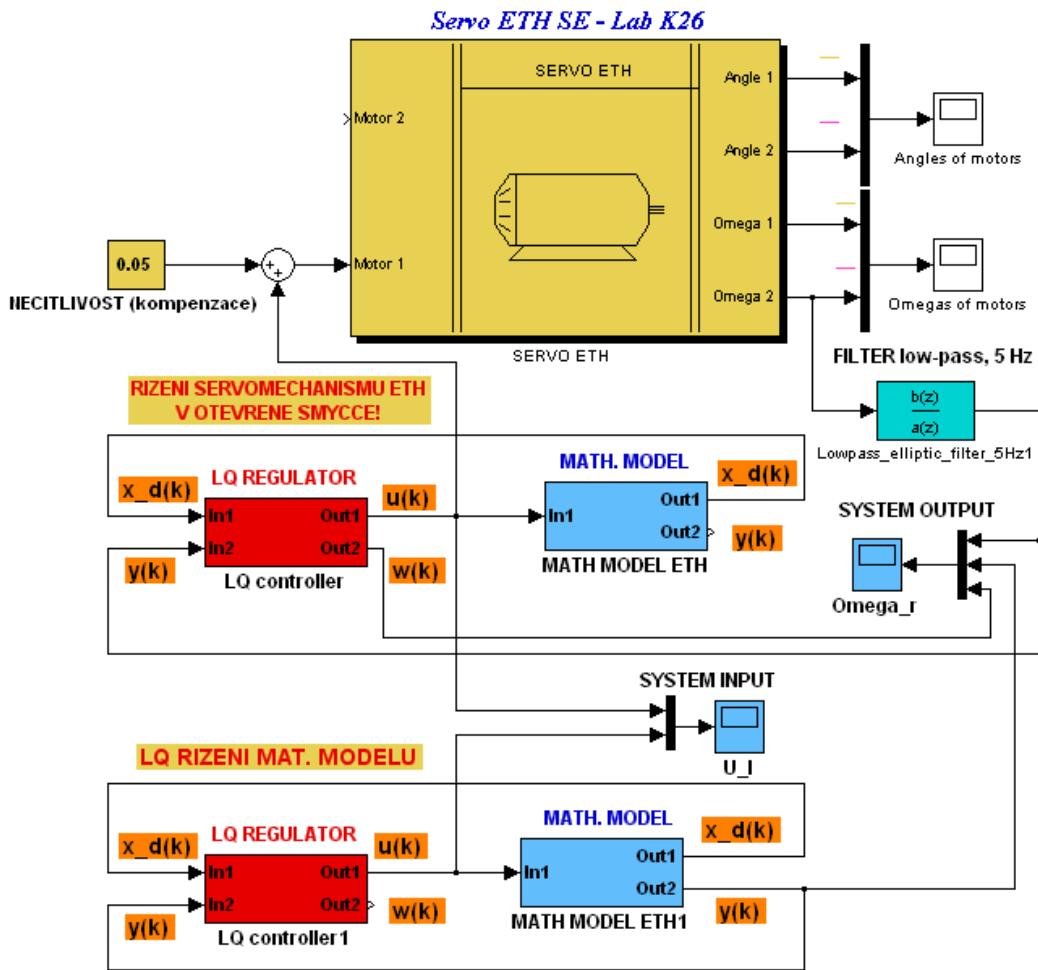
Obrázek A.1: Simulinkové schéma matematického modelu servomechanismu ETH



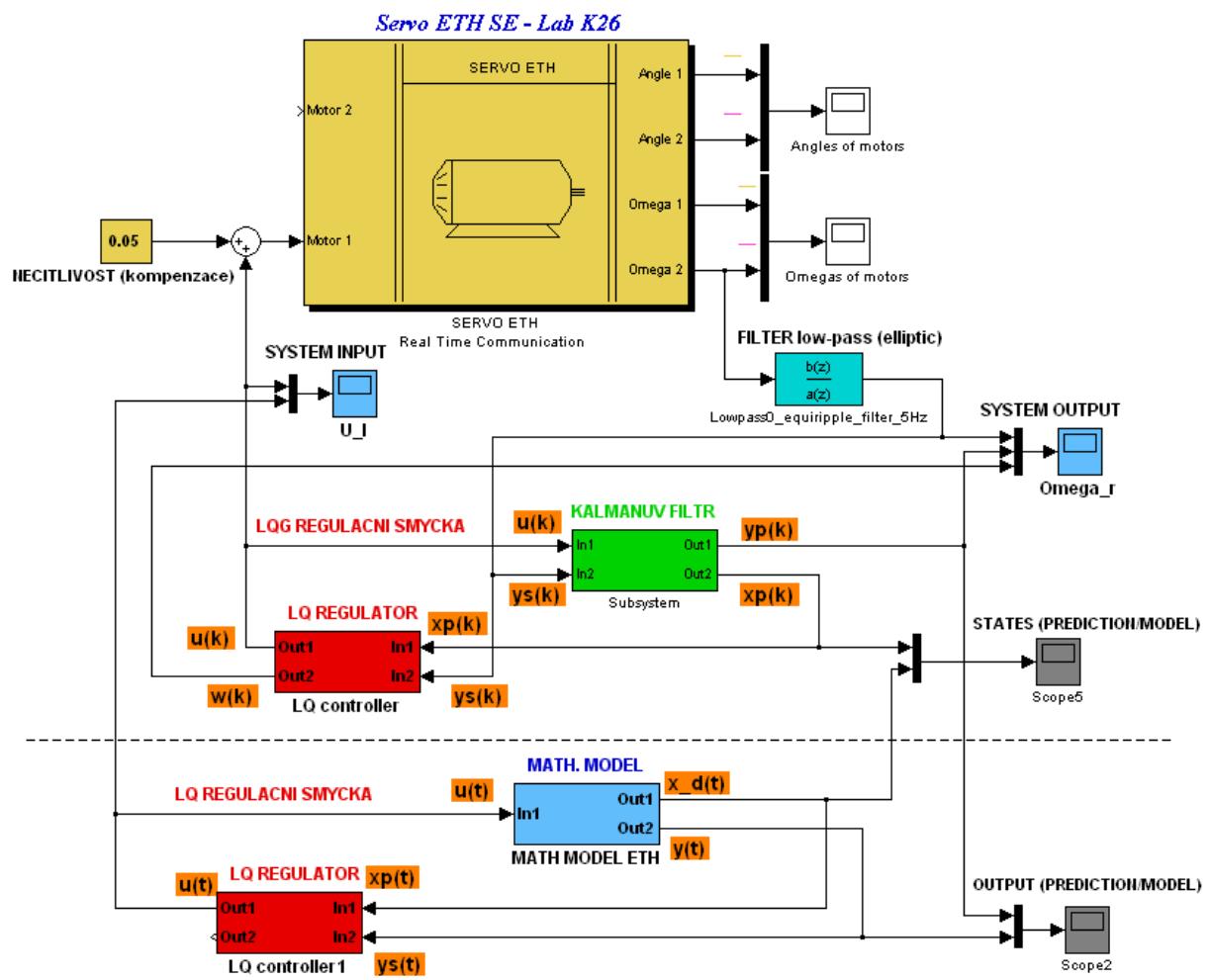
Obrázek A.2: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení POLOHY pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého PI regulátoru



Obrázek A.3: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení OTÁČEK pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého PI regulátoru



Obrázek A.4: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení OTÁČEK pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého LQ regulátoru



Obrázek A.5: Simulinkové schéma regulační smyčky pro řízení OTÁČEK pravé hřídele servomechanismu ETH pomocí navrženého LQ regulátoru s Kalmanovým filtrem - LQG

Příloha B

Obsah přiloženého CD

Součástí této diplomové práce je přiložené CD obsahující především tento text, fotografie a krátké demonstrační video zachycující důležité části laboratorního modelu ETH a dále originální zdrojové a Simulinkové soubory navržených regulačních smyček pro řízení laboratorního modelu se spojenými motory ETH v prostředí MATLAB a Simulink v laboratoři K 26.

- Soubor **DP_2010_Serva_ETH.pdf** - vlastní text této diplomové práce ve formátu .pdf
- Adresář **MATLAB & Simulink files** - zdrojové soubory a Simulinková schémata navržených regulačních smyček
- Adresář **ETH fotos & videos** - fotografie významných komponent servomechanismu ETH + krátké demonstrační video