

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Robustní řízení čtyřválcové vodárny

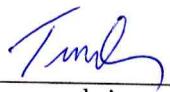
Praha, 2011

Autor: Bc. Václav Trnka
Vedoucí práce: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 20.4.2011



podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval především vedoucímu diplomové práce Ing. Petru Huškovi, Ph.D. za trpělivost a cenné rady při zpracování práce a své rodině a přítelkyni za podporu při studiu.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá řízením lineárního matematického modelu čtyřválcové vodárny, který představuje systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy (MIMO). Do modelu je zavedena neurčitost (perturbace), která odráží chování reálného systému. Cílem práce je navrhnout regulátory klasickými a pokročilými metodami a porovnat jejich vlastnosti. Je představeno \mathcal{H}_∞ -řízení jako nástroj pro analýzu robustnosti a kvality řízení a také pro robustní (odolný vůči neurčitostem) návrh regulátorů. Tyto robustní metody (smíšená citlivost, \mathcal{H}_∞ loop-shaping, D-K iterace), které v návrhu uvažují perturbovaný model, jsou porovnány s klasickými metodami - decentralizovaný PI regulátor a LQ regulátor, které uvažují v návrhu nominální model (bez neurčitosti). Pro porovnání se použije kromě časových průběhů i μ -analýza, která ověřuje vliv neurčitosti na stabilitu a kvalitu řízení regulačního obvodu. Na konci práce jsou zhodnoceny výsledky a je určeno, který regulátor vykazoval nejlepší vlastnosti.

Klíčová slova

čtyřválcová vodárna, robustnost, neurčitost, perturbovaný model, kvalita řízení, \mathcal{H}_∞ -problém.

Abstract

Diploma thesis deals with control of linear mathematical model of quadruple-tank process, which represents a system with two inputs and two outputs (MIMO). The uncertainty (perturbation), which reflects the behaviour of real system, is inserted into the model. The goal of this work is to design controllers with classic and advanced methods and to compare their results. The \mathcal{H}_∞ -control is presented as a tool for robustness and performance analysis and also for robust (resistant to uncertainty) design of controllers. These robust methods (mixed sensitivity, \mathcal{H}_∞ loop-shaping, D-K iteration), which consider perturbed model in design phase, are compared with classic methods - decentralized PI controller and LQ regulator, which consider nominal model (without uncertainty) in design phase. Besides time responses, μ -analysis, which verifies influence of uncertainty on stability and performance of control loop, is used for a comparison. At the end of this thesis, results are evaluated and it is determined which controller had the best properties.

Keywords

quadruple-tank process, robustness, uncertainty, perturbed model, performance, \mathcal{H}_∞ -problem.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: **Bc. Václav Trnka**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (magisterský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření, blok KM1 - Řídicí technika

Název tématu: **Robustní řízení čtyřválcové vodárny**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s nelineárním modelem systému čtyřválcové vodárny.
2. Model linearizujte ve dvou vhodně zvolených pracovních bodech, tak aby jeden model měl stabilní a druhý nestabilní nulu.
3. Pro oba linearizované modely navrhněte základní typy regulátorů - PID regulátor a LQ regulátor.
4. Pro oba linearizované modely navrhněte pokročilé typy regulátorů založené na H_inf optimalizaci a tvarování otevřené smyčky a diskutujte jejich vlastnosti.

Seznam odborné literatury:

- [1] Johansson, K., H.: The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable zero. IEEE Trans. on Control Systems Technology, 8, (3), 456-465, 2000.
- [2] Skogestad S., Postlethwaite I.: Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. Second ed., Wiley, Chichester, UK, 2005.
- [3] Zakucia J.: Řízení čtyřválcové vodárny. Diplomová práce, katedra řídicí techniky, FEL ČVUT Praze, 2008.

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2010/2011

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry



doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan



V Praze dne 2. 12. 2009

Obsah

Seznam obrázků	xii
Seznam tabulek	xiii
1 Úvod	1
1.1 Seznam použitých symbolů a zkratek	2
2 Čtyřválcová vodárna	5
3 Robustnost a kvalita řízení	9
3.1 Singulární čísla a \mathcal{H}_∞ -norma	9
3.2 Škálování modelu	11
3.3 Zobecněný model	12
3.4 Robustnost	13
3.5 Neurčitost	13
3.6 Robustní stabilita (RS)	16
3.7 Kvalita řízení	18
3.7.1 Úvodem	18
3.7.2 Nominální kvalita řízení (NP)	19
3.7.3 Robustní kvalita řízení (RP)	20
4 Návrh regulátorů	22
4.1 Požadavky na řízení	22
4.2 Klasické metody syntézy	22
4.2.1 Decentralizovaný PI regulátor	22
4.2.1.1 Minimálně fázový model	23
4.2.1.2 Nemiminimálně fázový model	24
4.2.2 LQ regulátor s pozorovatelem	27
4.2.2.1 Minimálně fázový model	30
4.2.2.2 Nemiminimálně fázový model	31
4.3 Robustní \mathcal{H}_∞ -metody syntézy	32
4.3.1 Obecný \mathcal{H}_∞ -optimální problém	32
4.3.2 Redukce řádu regulátoru	34
4.3.3 Smíšená citlivost (mixed-sensitivity)	36
4.3.3.1 Minimálně fázový model	37
4.3.3.2 Nemiminimálně fázový model	38

4.3.4	\mathcal{H}_∞ loop-shaping	39
4.3.4.1	Minimálně fázový model	43
4.3.4.2	Neminimálně fázový model	45
4.3.5	D-K iterace	47
4.3.5.1	Minimálně fázový model	49
4.3.5.2	Neminimálně fázový model	50
4.4	Porovnání nominálních odezv a zhodnocení výsledků	51
4.4.1	Minimálně fázový model	51
4.4.2	Neminimálně fázový model	53
5	Závěr	55
Literatura		57
A Obsah přiloženého CD		I

Seznam obrázků

2.1	Znázornění čtyřválcové vodárny	6
3.1	Klasický regulační obvod	12
3.2	Zobecněný regulační obvod	12
3.3	Příklad zobecněného modelu	12
3.4	Perturbovaný model	14
3.5	w_{Om} pro minimálně fázový systém	15
3.6	w_{On} pro neminimálně fázový systém	15
3.7	Aditivní neurčitost	15
3.8	Faktorizovaná neurčitost	15
3.9	Zobecněný regulační obvod s neurčitostí	16
3.10	$N\Delta$ -struktura	16
3.11	$M\Delta$ -struktura	17
3.12	Regulační obvod s perturbovaným modelem pro určení M	18
3.13	Přesný a asymptotický graf $1/ w_p(j\omega) $	19
3.14	Zobecněný regulační obvod pro určení NP	20
3.15	Fiktivní neurčitost v zobecněném modelu	20
3.16	Zobecněný regulační obvod pro určení RP	21
4.1	Schéma zapojení decentralizovaného PI regulátoru pro minimálně fázový model	23
4.2	Časové odezvy s decentralizovaným PI regulátorem pro minimálně fázový model	24
4.3	μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a decentralizovaným PI regulátorem	24
4.4	Schéma zapojení decentralizovaného PI regulátorem pro neminimálně fázový model	25
4.5	Časové odezvy s decentralizovaným PI regulátorem pro neminimálně fázový model	25
4.6	μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a decentralizovaným PI regulátorem	26
4.7	Stavová zpětná vazba	27
4.8	Zapojení LQ regulátoru pro sledování reference	28
4.9	Regulační obvod s LQ regulátorem a pozorovatelem	30
4.10	Časové odezvy s LQ regulátorem pro minimálně fázový model	30

4.11	μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem	LQ	31
4.12	Časové odezvy s LQ regulátorem pro neminimálně fázový model		32
4.13	μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a LQ regulátorem		32
4.14	Hankelova singulární čísla systému		35
4.15	Zobecněný regulační obvod pro problém smíšené citlivosti		36
4.16	Časové odezvy s regulátorem "smíšená citlivost" pro minimálně fázový model		37
4.17	μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem "smíšená citlivost"		38
4.18	Časové odezvy s regulátorem "smíšená citlivost" pro neminimálně fázový model		38
4.19	μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem "smíšená citlivost"		39
4.20	Problém \mathcal{H}_∞ robustní stabilizace		40
4.21	Tvarovaný model s regulátorem		41
4.22	Zobecněný regulační obvod pro problém \mathcal{H}_∞ loop-shaping		42
4.23	Výsledky tvarovaní OL singulárních čísel regulátorem pro minimálně fázový model		43
4.24	Časové odezvy s regulátorem " \mathcal{H}_∞ loop-shaping" pro minimálně fázový model		44
4.25	μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"		44
4.26	Výsledky tvarovaní OL singulárních čísel regulátorem pro neminimálně fázový model		45
4.27	Časové odezvy s regulátorem " \mathcal{H}_∞ loop-shaping" pro neminimálně fázový model		46
4.28	μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"		46
4.29	Zobecněný regulační obvod pro problém D-K iterace		48
4.30	Časové odezvy s regulátorem "D-K iterace" pro minimálně fázový model		49
4.31	μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem "D-K iterace"		49
4.32	Časové odezvy s regulátorem "D-K iterace" pro neminimálně fázový model		50
4.33	μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem "D-K iterace"		50
4.34	Porovnání nominálních časových odezv pro minimálně fázový model		51
4.35	Porovnání nominálních akčních zásahů regulátorů pro minimálně fázový model		51
4.36	Porovnání nominálních časových odezv pro neminimálně fázový model		53
4.37	Porovnání nominálních akčních zásahů regulátorů pro neminimálně fázový model		53

Seznam tabulek

2.1	Parametry čtyřválcové vodárny	5
2.2	Hodnoty parametrů v nastavených pracovních bodech	7
4.1	Řízení výšky hladiny v prvním válci pro minimálně fázový model	52
4.2	Řízení výšky hladiny ve druhém válci pro minimálně fázový model	52
4.3	Řízení výšky hladiny v prvním válci pro neminimálně fázový model	54
4.4	Řízení výšky hladiny ve druhém válci pro neminimálně fázový model	54

Kapitola 1

Úvod

V praxi často stojíme před problémem, že chování získaného matematického modelu systému dostatečně neodpovídá chování reálného systému. Aby se tento problém vyřešil, musí se do modelu zahrnout neurčitost (perturbace). Ta může mít více zdrojů jako jsou neznámé parametry, zanedbaná dynamika na vysokých frekvencích, atd. [1]. Podrobněji se o neurčitosti zmíníme v podkapitole 3.5.

Klasické metody syntézy regulátorů neuvažují v návrhové fázi přítomnost neurčitostí (návrh je pro nominální systém) a výsledky na reálném systému proto mohou být neuspokojivé. Jeden způsob, jak se s tímto problémem vyrovnat, je použití stochastického řízení. Neurčitosti jsou v tomto případě modelovány jako pravděpodobnostní distribuce, z nichž se vypočte akční veličina [2]. Jelikož tyto metody počítají s nejpravděpodobnějším akčním zásahem, mohou nastat abnormální situace vzdálené od očekáváných, kdy nebudou tak dobře fungovat. Příklad stochastické metody návrhu je např. LQG (Linear quadratic gaussian).

Robustní metody řízení se naopak snaží omezit neurčitosti (reprezentované deterministicky) na všech frekvencích [2]. Pokud je známa hranice neurčitosti na všech frekvencích, regulátor může dosáhnout výsledků, které splní požadavky na řízení ve všech možných případech. Na robustní metody se proto může nahlížet jako na *worst-case*, narozdíl od stochastických metod, které jsou *typical-case*. Je zřejmé, že pro záruku, že budou splněny požadavky ve všech možných případech, se musí často trochu obětovat nominální kvalita řízení (doba náběhu, doba ustálení, atd.). V dalším textu jsou podrobněji popsány robustní metody řízení založené na minimalizaci \mathcal{H}_∞ -normy.

Tato práce navazuje na [3], kde je podrobně uveden model vícerozměrného systému čtyřválcové vodárny a navrženy regulátory pro nominální model klasickými metodami. Již odvozený linearizovaný matematický model je rozšířen o neurčitost. Cílem práce je navrhnout regulátory klasickými i pokročilými metodami a porovnat jejich vlastnosti. Představíme \mathcal{H}_∞ -řízení jako nástroj pro analýzu robustnosti a kvality řízení a také pro návrh robustních regulátorů. \mathcal{H}_∞ -metody syntézy - smíšená citlivost, \mathcal{H}_∞ loop-shaping a D-K iterace porovnáme s klasickými metodami, jako jsou decentralizované PI a LQ řízení, na nominálním i perturbovaném modelu. Robustnost a kvalita řízení jsou ověřeny na časových průbězích a pomocí μ -analýzy, která kvantifikuje míru dosažené robustní stability a robustní kvality řízení. Nakonec určíme, který regulátor vykazuje nejlepší výsledky. Všechny simulace a výpočty jsou provedeny v programu MATLAB/Simulink.

1.1 Seznam použitých symbolů a zkratек

MIMO	systémy s více vstupy a výstupy
SISO	systémy s jedním vstupem a jedním výstupem
\triangleq	definice
$G(s)$	přenosová funkce nominálního modelu (škálovaného)
$G(s) \cong \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	stavová reprezentace $G(s)$
$G_p(s)$	přenosová funkce perturbovaného modelu
Δ_O	normovaná výstupní multiplikativní neurčitost
F_l	spodní lft transformace
F_u	horní lft transformace
RGA	matice relativních zesílení
$\bar{\sigma}$	maximální singulární číslo
$\underline{\sigma}$	minimální singulární číslo
μ_{Δ}	strukturované singulární číslo
$\ \dots\ _H$	Hankelova norma
B_{Δ}	množina všech dovolených perturbací
Δ	blokově diagonální struktura neurčitosti
$\overline{\Delta}$	rozšířená normovaná neurčitost
NP	nominální kvalita řízení
NS	nominální stabilita
RS	robustní stabilita
RP	robustní kvalita řízení
$G = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$	normalizovaná levá nesoudělná podílová faktorizace G
ϵ	bezpečnost stability pro regulační obvod s modelem ve tvaru normalizované nesoudělné podílové faktorizace
W_p	tvarovací filtr kvality řízení (performance filter)
W_u	tvarovací filtr akčního zásahu
ρ	spektrální poloměr
m_G	počet nestabilních pólů modelu
W_1	prekompenzátor

1.1. SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

W_2	postkompenzátor
K_r	regulátor redukovaného řádu useknutím balančované realizace
K_h	regulátor redukovaného řádu Hankelovou optimální redukcí
ω_B^*	přibližná šířka pásma regulace, ve kterém se sleduje reference
ω_{RP}^*	přibližná šířka pásma regulace, ve kterém je splněna robustní kvalita řízení

KAPITOLA 1. ÚVOD

Kapitola 2

Čtyřválcová vodárna

Detailní popis nelineárního modelu vodárny a odvození přenosu lineárního modelu je uveden v [3] a [4], proto se zde omezíme jen na základní popis. Vodárna má čtyři válce vysoké 20 cm a jsou propojeny podle Obrázku 2.1. Do válců je čerpána voda pomocí dvou čerpadel přes dva poměrové ventily. Napětí na čerpadle v_i ovlivňuje tok q_i podle rovnice $q_i = k_i v_i$, $i = 1, 2$, kde k_i je konstanta i-tého čerpadla. Jednotlivé toky jsou dále ovliňovány poměrovými ventily s konstantami $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$. Toky jsou též znázorněny na Obrázku 2.1.

Základní parametry vodárny jsou v Tabulce 2.1.

$A_1 = A_3 = 28 \text{ [cm}^2]$	průřez dna 1. a 3. válce
$A_2 = A_4 = 32 \text{ [cm}^2]$	průřez dna 2. a 4. válce
$a_1 = a_3 = 0,071 \text{ [cm}^2]$	průřez odtoku 1. a 3. válce
$a_2 = a_4 = 0,057 \text{ [cm}^2]$	průřez odtoku 2. a 4. válce
$h_i \in \langle 0, 20 \rangle \text{ [cm]}$	výška hladiny v i-tém válci
$v_i \in \langle 0, 10 \rangle \text{ [V]}$	napětí na i-tém čerpadle

Tabulka 2.1: Parametry čtyřválcové vodárny

Po linearizaci soustavy nelineárních rovnic dostaneme stavový popis:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.1)$$

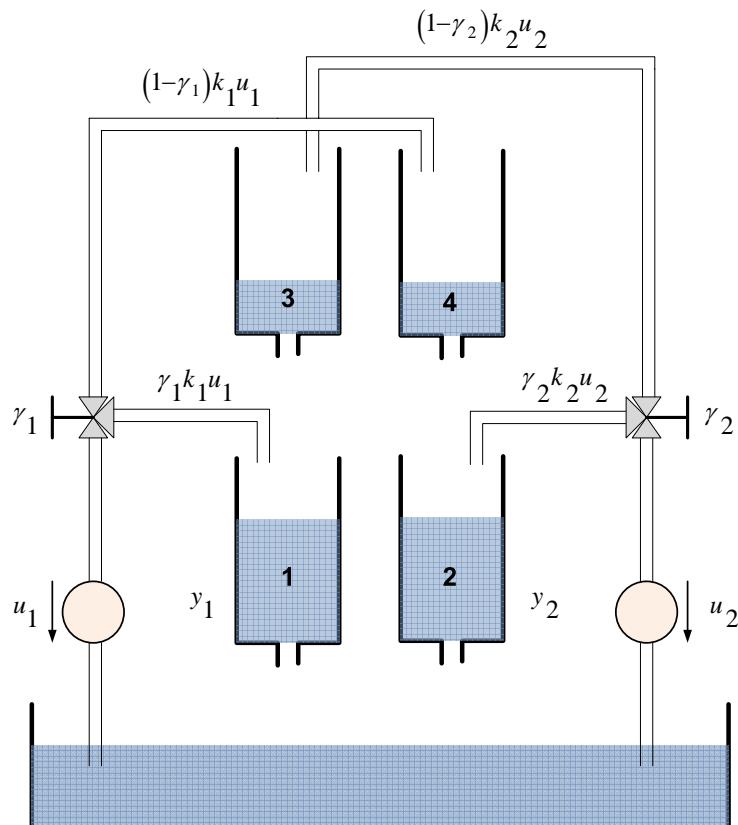
$$y = Cx + Du \quad (2.2)$$

se stavovými maticemi [3]:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde $T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}$, $i = 1, \dots, 4$ jsou časové konstanty.



Obrázek 2.1: Znázornění čtyřválcové vodárny

Přenosová matice systému $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ je:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{1 + sT_1} & \frac{(1 - \gamma_2)c_1}{(1 + sT_3)(1 + sT_1)} \\ \frac{(1 - \gamma_1)c_2}{(1 + sT_4)(1 + sT_2)} & \frac{\gamma_2 c_2}{1 + sT_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

kde:

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{T_i k_i}{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{zesílení [cm/V]}, \\ h_i^0 &, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{ustálený stav i-tého válce [cm]}, \\ k_i &, \quad i = 1, 2, \quad \text{konstanta i-tého čerpadla [cm}^3.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}\text{]}, \\ g &= 981 \text{ cm.s}^{-2}, \quad \text{gravitační zrychlení}. \end{aligned}$$

Vstupy jsou napětí na čerpadlech $u_i \equiv v_i$, $i = 1, 2$ a výstupy jsou výšky hladin v prvních dvou válcích $y_i \equiv h_i$, $i = 1, 2$. Systém je ředitelný a pozorovatelný a nachází se v minimální realizaci. Zajímavá vlastnost systému je, že pomocí nastavení poměrových ventilů (kostant γ_1, γ_2) lze přesunout nulu do nestabilní pravé komplexní poloroviny, a tím výrazně změnit chování systému (neminimální fáze). Podmínka je [3]:

- $1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$ **minimálně fázový režim.**
- $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ **neminimálně fázový režim.**

Fyzikální interpretace je taková, že pokud je součet toků do horních nádrží (3, 4) větší než součet toků do dolních nádrží (1, 2), je systém neminimálně fázový. Z výpočtů vstupních a výstupních směrů nestabilní nuly se ukazuje, že ovlivňuje oba vstupy i výstupy systému.

Pro linearizaci jsme zvolili dva pracovní body (minimálně/neminimálně fázový režim). Minimálně fázový systém označíme G_m a neminimálně fázový G_n . Hodnoty parametrů pro oba pracovní body jsou v Tabulce 2.2.

	G_m	G_n
$\gamma_1; \gamma_2 [-]$	(0, 62; 0, 52)	(0, 34; 0, 25)
$h_1^0; h_2^0; h_3^0; h_4^0 [\text{cm}]$	(12, 776; 13, 1597; 2, 3529; 2, 4266)	(13, 5301; 13, 9559; 6, 6337; 7, 1095)
$v_1^0; v_2^0 [\text{V}]$	(5; 5)	(5; 5)
$k_1; k_2 [\text{cm}^3.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}]$	(2, 07; 2, 01)	(2, 04; 2, 16)
nuly	(-0,0561; -0,0058)	(-0,0648; 0,0282)
póly	(-0,0157; -0,0109; -0,0366; -0,0253)	(-0,0153; -0,0106; -0,0218; -0,0148)

Tabulka 2.2: Hodnoty parametrů v nastavených pracovních bodech

Jelikož je model plně pozorovatelný a ředitelný, všechny MIMO nuly modelu jsou tzv. *přenosové* (transmission zeros) [5]. Tyto nuly jsou invariantní (též *invariantní nuly*)

vůči zpětnovazebnímu řízení, tedy nedají se řízením přemístit (podobně jako nuly u SISO systémů). Nastavení podle Tabulky 2.2 odpovídá přenosovým maticím:

$$G_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{2,55}{1+63,65s} & \frac{2,19}{(1+27,31s)(1+63,65s)} \\ \frac{2,26}{(1+39,49s)(1+92s)} & \frac{3}{1+92s} \end{bmatrix},$$

$$G_n(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,42}{1+65,49s} & \frac{3,79}{(1+45,87s)(1+65,49s)} \\ \frac{3,98}{(1+67,57s)(1+94,7s)} & \frac{1,6}{1+94,7s} \end{bmatrix}.$$

Model budeme řídit v rozmezí $\pm 10\%$ kolem pracovního bodu prvního a druhého válce.

Kapitola 3

Robustnost a kvalita řízení

3.1 Singulární čísla a \mathcal{H}_∞ -norma

V této části se jen krátce zmíníme o matematickém aparátu, který se dále v práci používá. Pro podrobnější popis odkazujeme na [1] a [5].

Uvažujme matici přenosů $G(j\omega)$ ($l \times m$) [1]. Každá matice může být rozložena pomocí SVD (Singular value decomposition):

$$G = U\Sigma V^H, \quad (3.1)$$

kde:

- U unitární matice ($l \times l$) výstupních singulárních vektorů u_i ,
- Σ matice ($l \times m$) se singulárními čísly σ_i na hlavní diagonále (sestupně),
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}$, H značí komplexní konjugovanou transpozici,
- V unitární matice ($m \times m$) vstupních singulárních vektorů v_i .

Singulární čísla σ_i udávají zesílení systému a matice V a U k nim příslušné vstupní (v_i) a výstupní směry (u_i). Dávají lepší informaci o zesílení MIMO systému než vlastní čísla. Zvláště zajímavé a důležité je největší zesílení systému přes všechny vstupní směry $\bar{\sigma}$ a nejmenší zesílení $\underline{\sigma}$:

$$\max_{v \neq 0} \frac{\|Gv\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}(G^H G)} \triangleq \bar{\sigma}(G), \quad (3.2)$$

$$\min_{v \neq 0} \frac{\|Gv\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\lambda_{\min}(G^H G)} \triangleq \underline{\sigma}(G). \quad (3.3)$$

\mathcal{H}_∞ -norma je definována jako maximum (přes všechny frekvence) maximální singulárního čísla frekvenčního přenosu:

$$\|G(j\omega)\|_\infty \triangleq \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (3.4)$$

Existuje i interpretace v časové oblasti:

$$\|G\|_\infty \triangleq \max_{u(t) \neq 0} \sqrt{\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty u(t)^T u(t) dt}}, \quad (3.5)$$

což představuje odmocninu z *maximálního zesílení energie* přenosové funkce G pro všechny vstupní signály $u(t) \neq 0$ s konečnou energií [5].

K výpočtu \mathcal{H}_∞ -normy existují principielně 2 přístupy [5].

- Lze definovat dostatečně jemnou frekvenční mřížku $\omega_1, \dots, \omega_R$ pro každou frekvenci $\omega_i, i \in \{1, \dots, R\}$, vypočít maximální singulární číslo matice $G(j\omega_i)$ a poté vybrat maximum těchto čísel. Tato metoda je numericky velmi náročná, zvláště když neexistuje žádná a-priori informace, ve které frekvenční oblasti se má maximum hledat.
- Druhý přístup používá stavovou reprezentaci přenosové matice $G(s)$:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Reálné části vlastních čísel matice A jsou záporné (předpokládá se asymptoticky stabilní realizovatelná přenosová matice). Protože $G(\infty) = D$, platí $\|G\|_\infty \geq \bar{\sigma}(D)$. Nyní definujme pro libovolné $\gamma > \bar{\sigma}(D)$ matici:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D^T C & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

kde:

$$R = D^T D - \gamma^2 I, \quad (3.8)$$

$$S = DD^T - \gamma^2 I. \quad (3.9)$$

Potom platí:

$$\|G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow H_\gamma \text{ nemá žádné vlastní číslo na imaginární ose}. \quad (3.10)$$

Nyní se může jednoduchou iterací přes γ (**γ -iterace**) libovolně přesně určit \mathcal{H}_∞ -norma: Zvolí se horní a dolní hranice pro $\|G\|_\infty : \gamma_d \leq \|G\|_\infty \leq \gamma_h$. Poté se dosadí $\gamma := (\gamma_d + \gamma_h)/2$, spočte se H_γ a ověří se existence imaginárních vlastních čísel. Pokud taková vlastní čísla existují ($\|G\|_\infty \geq \gamma$), dosadí se γ jako nová dolní hranice a procedura se opakuje. V opačném případě ($\|G\|_\infty < \gamma$) se dosadí γ jako nová horní hranice a přejde se k další iteraci. Takto se půlí každý iterační krok interval pro $\|G\|_\infty$.

Výpočet \mathcal{H}_∞ -normy tedy spočívá v iteraci bud' přes frekvence ω , nebo přes γ . Jelikož model vodárny je striktně ryzí ($D = 0$), výpočet výše zmíněné matice H_γ se zjednoduší.

3.2 Škálování modelu

Škálování je velmi důležité v praktických aplikacích, protože usnadňuje analýzu modelu (viz další sekce) a návrh regulátoru (výběr vah) [1]. Některé interpretace jsou závislé na správném škálování, například analýza *vstupně-výstupní řiditelnosti* (odkazujeme na [1]) a použití citlivostní funkce u MIMO systémů, pokud nejsou výstupní odchylky na jednotlivých kanálech srovnatelné úrovně.

Na začátku návrhového procesu je třeba rozhodnout o požadavcích na řízení, a proto je třeba zvážit očekávané změny u reference a poruchy, u každého vstupu jeho povolenou hodnotu a u každého výstupu jeho povolenou odchylku. Vhodný přístup pro škálování je, aby byly veličiny v rozsahu $\langle 0, 1 \rangle$. To se provede tím, že všechny veličiny se podělí jejich maximálními očekávanými či povolenými změnami (– značí neškálované veličiny). Jelikož většinou je zájem minimalizovat regulační odchylku \bar{e} , volíme škálování s ohledem na maximální regulační odchylku. Pro škálování MIMO systému (pro model vodárny je $i = 1, 2$) platí:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i / \bar{u}_{i \max} && \text{škálovaný } i\text{-tý vstup,} \\ \bar{u}_{i \max} & && \text{největší povolená změna } i\text{-tého vstupu,} \\ y_i &= \bar{y}_i / \bar{e}_{i \max} && \text{škálovaný } i\text{-tý výstup,} \\ \bar{e}_{i \max} & && \text{největší povolená } i\text{-tá regulační odchylka,} \\ r_i &= \bar{r}_i / \bar{e}_{i \max} && \text{škálovaná } i\text{-tá reference,} \\ e_i &= \bar{e}_i / \bar{e}_{i \max} && \text{škálovaná } i\text{-tá regulační odchylka.} \end{aligned}$$

K formalizaci škálovací procedury zavedeme *škálovací faktory*:

$$D_e = \text{diag}\{\bar{e}_{i \max}\}, D_u = \text{diag}\{\bar{u}_{i \max}\}, i = 1, 2. \quad (3.11)$$

Nyní je možné vyjádřit přenosovou matici škálovaného modelu:

$$G = D_e^{-1} \bar{G} D_u. \quad (3.12)$$

Škálovací matice pro model vodárny jsou:

$$\begin{aligned} D_e &= \begin{bmatrix} 0, 1.h_1^0 & 0 \\ 0 & 0, 1.h_2^0 \end{bmatrix}, \\ D_u &= \begin{bmatrix} v_1^0 & 0 \\ 0 & v_2^0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

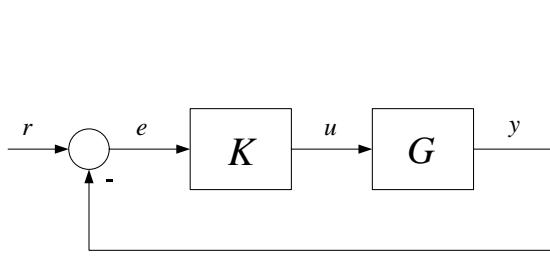
Budeme tedy uvažovat maximální odchylku od pracovního bodu $\pm 10\%$ a změnu akčního zásahu $\pm v_i^0$, $i = 1, 2$ kvůli splnění podmínky v Tabulce 2.1. Cílem řízení pro škálovaný systém je navrhnut $u_i(t)$, $|u_i(t)| \leq 1$ tak, že $|e_i(t)| \leq 1$, nejlépe však $|e_i(t)| \rightarrow 0$ (*perfektní řízení*), $i = 1, 2$. V dalším textu používáme pro návrh regulátorů a analýzu robustnosti a kvality řízení škálovaný model, simulace jsou potom na původním modelu. Neškálovaný regulátor se vypočte transformací:

$$\bar{K} = D_u K D_e^{-1}. \quad (3.13)$$

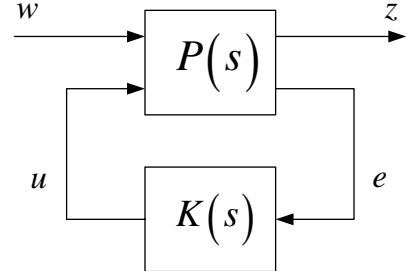
3.3 Zobecněný model

Klasický regulační obvod je na Obrázku 3.1. Je výhodné tuto strukturu zobecnit se systémem $P(s)$ (zobecněný model), jenž má *vnitřní* vstup u , *vnitřní* výstup e , *zobecněný* vstup w a *zobecněný* výstup z , viz Obrázek 3.2 [5]. Pro zobecněný regulační obvod platí:

$$\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$



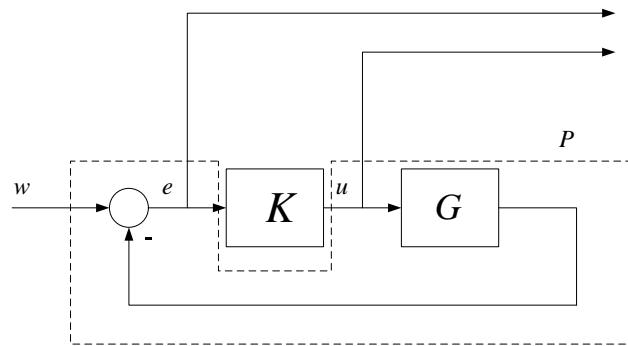
Obrázek 3.1: Klasický regulační obvod



Obrázek 3.2: Zobecněný regulační obvod

Všechny signály jsou vektory, protože pracujeme s MIMO modelem. Zobecněné exogenní vstupy definují signály, které působí na regulační obvod. Může to být porucha nebo reference. Zobecněné exogenní výstupy kvantifikují kvalitu regulace, která se sleduje. Situace je na Obrázku 3.3. Jak zobecněné vstupy, tak výstupy mohou být váhovány frekvenčně závislými vahami, viz podkapitola 3.7. Přenos uzavřeného zobecněného regulačního obvodu z Obrázku 3.2 se spočte přes *spodní lft transformaci* (lower linear fractional transformation):

$$z = F_l(P, K)w = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w. \quad (3.15)$$



Obrázek 3.3: Příklad zobecněného modelu

3.4 Robustnost

Regulovaná soustava je *robustní*, pokud je necitlivá vůči rozdílům mezi reálným systémem a jeho matematickým modelem, který byl použit pro návrh regulátoru [1]. Tyto rozdíly se označují za *neurčitost* modelu. Hlavní myšlenkou robustního H_∞ -řízení, které v této práci představíme, je ověření, zda specifikace návrhu jsou splněny i pro ”nejhorší” možnou neurčitost (worst-case). Postup je tento:

1. Zvolit množinu neurčitostí a najít matematickou reprezentaci neurčitosti modelu.
2. Ověřit robustní stabilitu - zjistit, zda je soustava stabilní pro všechny modely z množiny perturbovaných modelů ($\forall G_p(s) : G_p(s) \in \Pi$).
3. Pokud je soustava robustně stabilní, ověří se, zda splňuje požadovanou kvalitu řízení pro všechny modely z množiny perturbovaných modelů.

Označení, které budeme používat v textu:

Π	množina všech možných perturbovaných modelů (s neurčitostí),
$G_p(s) \in \Pi$	jeden perturbovaný model,
$G(s) \in \Pi$	nominální model (bez neurčitosti).

3.5 Neurčitost

Jak už jsme zmínili v Kapitole 1, neurčitost (perturbace) může mít více příčin [1]:

1. Některé parametry nejsou přesně známé.
2. Parametry se mohou měnit kvůli nelinearitám nebo změnám pracovních podmínek.
3. Na vysokých frekvencích je řád a dynamika systému neznámá.
4. Měřicí přístroje nejsou dokonalé a mohou negativně ovlivnit regulovaný systém.
5. Zvolí se raději jednodušší model a zanedbaná dynamika se reprezentuje neurčitostí.
6. Implementovaný regulátor se liší od navrženého.

Předpokládáme, že model vodárný obsahuje parametrickou neurčitost. Tato neurčitost je názorná, odpovídá realitě a dobře se s ní pracuje. Abychom mohli použít pokročilé metody řízení, reprezentujeme tuto neurčitost jako výstupní multiplikativní neurčitost (menší citlivost než vůči vstupní multiplikativní neurčitosti [1]) [6], neboli přepočteme parametrickou neurčitost na výstupní multiplikativní, viz níže. Perturbovaný model s výstupní multiplikativní neurčitostí lze vyjádřit rovnicí:

$$\Pi_O^1 : G_p = (I + E_O)G = (I + W_O\Delta_O)G, \quad \|\Delta_O\|_\infty \leq 1, \quad (3.16)$$

¹Index O značí, že se neurčitost nachází na výstupu modelu.

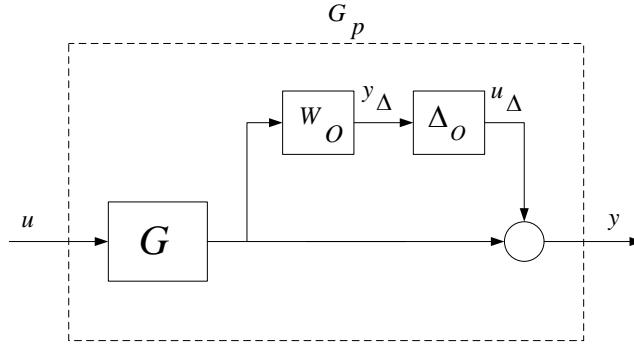
kde:

$$W_O(s) = \text{diag}\{w_{O_i}(s)\}, \quad w_{O_i}(s) = w_O(s), \quad i = 1, 2, \quad (3.17)$$

$$\Delta_O(s) = \text{diag}\{\delta_i(s)\}; \quad |\delta_i(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega, \quad i = 1, 2. \quad (3.18)$$

Neurčitost Δ_O je omezená na všech frekvencích (normalizovaná), E_O je stabilní² a je *strukturovaná*, protože je diagonální. To odpovídá reálnému předpokladu, že neurčitost se vyskytuje na jednotlivých kanálech (oddělené obvody) a nemá křížové vazby [1]. Prvky váhy W_O určíme z rovnice (3.16) dosazením maximální neurčitosti (například $\Delta_O = I$) a maximalizací přes všechny perturbované modely pro všechny frekvence:

$$|w_O(j\omega)| \geq l_O(\omega), \quad l_O(\omega) = \max_{G_p \in \Pi_O} \bar{\sigma}((G_p - G)G^{-1}(j\omega)) \quad \forall \omega. \quad (3.19)$$



Obrázek 3.4: Perturbovaný model

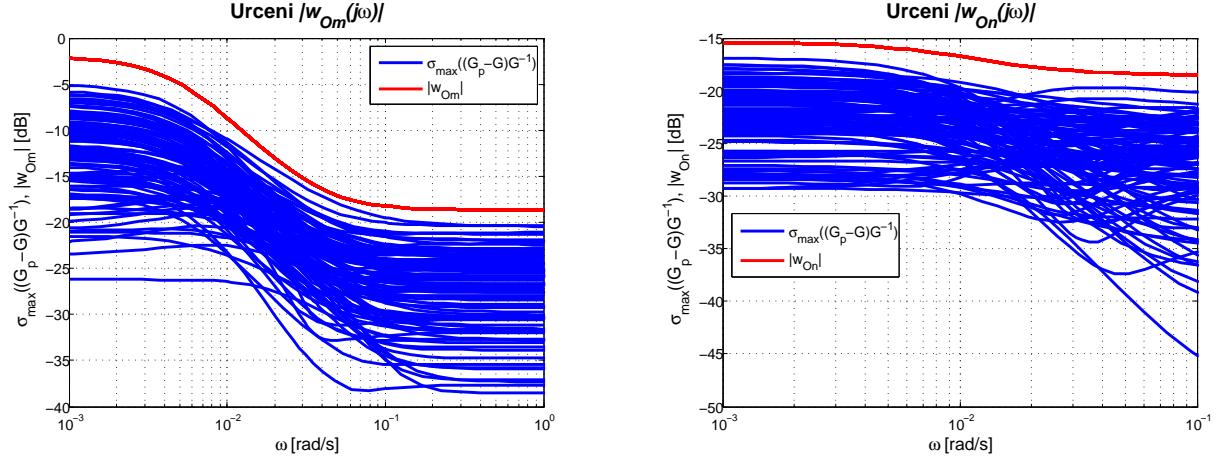
Nerovnice (3.19) zaručuje, že rodina perturbovaných modelů bude zahrnovat i ty nejhorské možné kombinace neurčitostí, viz Obrázek 3.5 a Obrázek 3.6. Ještě zbývá stanovit, které parametry modelu se budou variovat. Z analýzy modelu vyplývá, že se budou měnit parametry čerpadel k_1, k_2 a konstanty poměrových ventilů γ_1, γ_2 . Zvolili jsme, že se budou měnit v rozmezí $\pm 5\%$ kolem nominální hodnoty, viz Tabulka 2.2. Diagonální prvky w_{Om}, w_{On} vah jsme na základě analýzy Obrázků 3.5 a 3.6 určili takto:

$$w_{Om} = 0,79 \frac{(1 + 29,41s)}{1 + 200s}, \quad (3.20)$$

$$w_{On} = 0,17 \frac{(1 + 73,53s)}{1 + 105,26s}. \quad (3.21)$$

Z rovnic (3.20), (3.21) a Obrázků 3.5 a 3.6 plyne, že pro minimálně fázový model je maximální neurčitost 79 % na nízkých frekvencích asi do 0,005 rad/s a 12 % asi od 0,03 rad/s. Pro neminimálně fázový model je maximální neurčitost 17 % na nízkých frekvencích asi do 0,01 rad/s a 12 % asi od 0,014 rad/s.

²Pro multiplikativní neurčitost platí, že E_O je stabilní, nebo neméní počet nestabilních pólů modelu ($m_{G_p} = m_G$) [5]. Nemůže tedy přidat nestabilní pól, ale může krátit pól modelu.

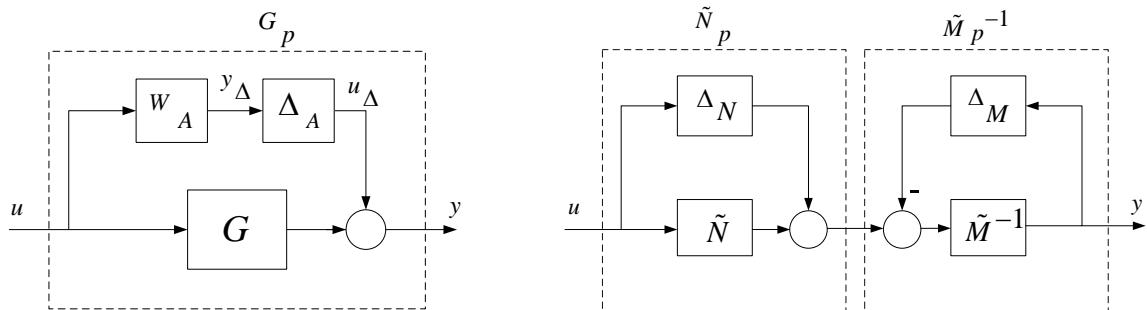


Obrázek 3.5: w_{Om} pro minimálně fázový systém

Obrázek 3.6: w_{On} pro neminimálně fázový systém

Neurčitost může být i *nestrukturovaná* (full-block) a pro ni také platí $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, ale neznáme u ní informace o jednotlivých prvcích jako u strukturované neurčitosti. Sice se s ní jednodušeji pracuje, protože není třeba znát strukturu, ale její použití je často moc *konzervativní*, jelikož reálná neurčitost má vždy strukturu [1]. To znamená, že výsledný regulátor může být odolný i vůči neexistujícím neurčitostem.

Strukturovaná neurčitost může být také *aditivní* neurčitostí a nestrukturovaná může být multiplikativní, aditivní³, nebo *faktorizovaná*, která se většinou používá v návrhovém procesu regulátoru, viz podkapitola 4.3.4.



Obrázek 3.7: Aditivní neurčitost

Obrázek 3.8: Faktorizovaná neurčitost

³ E_A nemění počet nestabilních pólů modelu ($m_{G_p} = m_G$) [5].

3.6 Robustní stabilita (RS)

Zaměříme se zde na odvození podmínky robustní stability pro zobecněný MIMO systém vodárny, grafické odvození pro SISO systémy je možné najít v [1]. Před analýzou definujme *množinu všech dovolených perturbací* (strukturowané, nestrukturované) [1]: $\mathbf{B}_\Delta = \{\Delta \in \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$ s blokově diagonální strukturou Δ :

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I_1; \dots; \delta_k I_k; \Delta_{k+1}; \dots; \Delta_v\}, \quad (3.22)$$

kde $\delta_1, \dots, \delta_k$ jsou komplexní skaláry a $\Delta_{k+1}, \dots, \Delta_v$ jsou komplexní matice. Všechny Δ uvedené v této práci jsou prvky množiny \mathbf{B}_Δ , pro případ modelu vodárny $\Delta = \Delta_O = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2\}$. Nyní rozšířme strukturu na Obrázku 3.2 o neurčitost. Výsledek vidíme na Obrázku 3.9. Uvažujme neurčitý $N\Delta$ -systém na Obrázku 3.10, který vznikl transformací z Obrázku 3.9 a platí:

$$\begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Přenos $w \rightarrow z$ je:

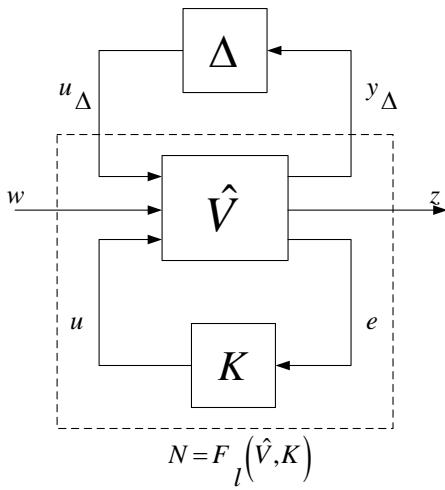
$$F = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}, \quad (3.24)$$

kde F_u je *horní lft transformace*.

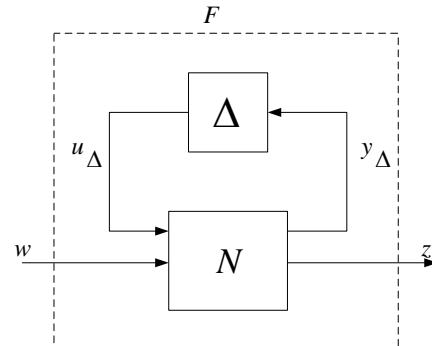
Předpokládá se, že systém je nominálně ($\Delta = 0$) stabilní, to znamená, že celé N musí být stabilní (NS). Dále se předpokládá také stabilita Δ . Z toho vyplývá, že jediný zdroj nestability může být zpětnovazební člen $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$. Tedy pokud je systém nominálně stabilní, může se převést problém stability $N\Delta$ -struktury na problém stability $M\Delta$ -struktury na Obrázku 3.11 s $M = N_{11}$.

Ze zobecněného Nyquistova teorému plyne, že $M\Delta$ -systém je stabilní pro všechny perturbace právě tehdy, když [1]:

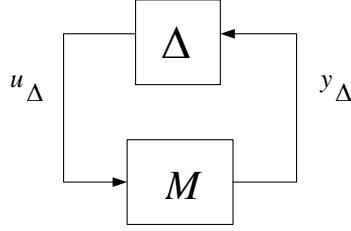
$$\det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega, \forall \Delta. \quad (3.25)$$



Obrázek 3.9: Zobecněný regulační obvod s neurčitostí



Obrázek 3.10: $N\Delta$ -struktura


 Obrázek 3.11: $M\Delta$ -struktura

Z rovnice (3.25) lze dále vyvodit, že pokud bude neurčitost nejhorší možná na všech frekvencích (například $\Delta(j\omega) = I, \forall\omega$), pak pro splnění stability $M\Delta$ -struktury musí platit:

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1, \forall\omega \Leftrightarrow \|M\|_\infty < 1. \quad (3.26)$$

Podmínka (3.25) udává pouze odpověď ano/ne na otázku robustní stability. Jestli je potřeba dostat míru této vlastnosti, musí se použít *struktuované singulární číslo* μ_Δ , které je definováno:

$$\mu_\Delta(M) \triangleq \frac{1}{\min\{k_m | \det(I - k_m M \Delta) = 0, \|\Delta\|_\infty \leq 1\}}, \quad (3.27)$$

μ_Δ je závislé na struktuře Δ .

Spodní a horní odhad (μ_Δ nelze pro Δ vypočítat přesně) udává nerovnice:

$$\rho(M)^4 \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M). \quad (3.28)$$

Nyní lze určit podmínu stability (3.25) pomocí μ_Δ . Platí, že $M\Delta$ -struktura je stabilní pro všechny přípustné perturbace $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \forall\omega$ právě tehdy, když:

$$\mu_\Delta(M(j\omega)) < 1, \forall\omega. \quad (3.29)$$

Pro více informací o strukturovaném singulárním čísle odkazujeme na [1].

Ještě zbývá uvést, co představuje matice přenosů $M(s)$. Jak už jsme zmínili, model obsahuje výstupní multiplikativní neurčitost, viz Obrázek 3.4. Nyní tuto neurčitost dosadíme do klasického regulačního obvodu, situace je na Obrázku 3.12. Porovnáním s Obrázkem 3.11 určíme M :

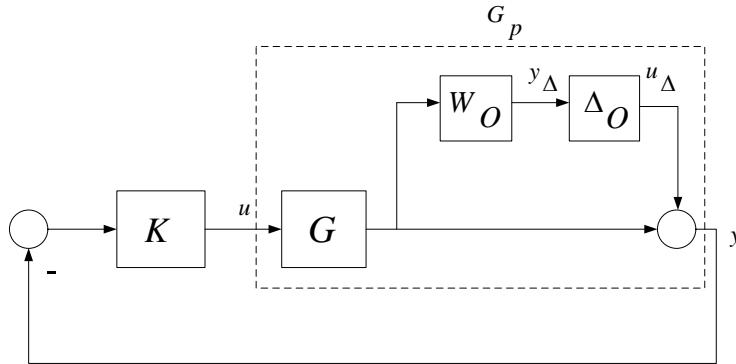
$$M = -W_O G K (I + G K)^{-1} = -W_O T_O. \quad (3.30)$$

Podmínka (3.29) potom přejde do finálního tvaru, který budeme používat k testování robustní stability:

$$\boxed{\text{RS} \Leftrightarrow \text{NS} \wedge \mu_\Delta(W_O(j\omega)T_O(j\omega)) < 1, \forall\omega}. \quad (3.31)$$

Záporné znaménko z rovnice (3.30) nehraje roli při výpočtu μ_Δ .

⁴Spektrální rádius je definován jako $\rho(M) \triangleq \max_i |\lambda_i(M)|$.



Obrázek 3.12: Regulační obvod s perturbovaným modelem pro určení M

3.7 Kvalita řízení

3.7.1 Úvodem

Kvalita řízení (performance) definuje vlastnosti uzavřené regulační smyčky (doba ustálení řízené veličiny, doba náběhu, regulační odchylka). Aby bylo možné specifikovat požadavky na kvalitu řízení a následně ověřit, zda byly splněny, zavedeme tvarovací filtr (váhu) $W_p(s)$:

$$W_p(s) = \text{diag}\{w_{pi}(s)\}, w_{pi}(s) = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A}, i = 1, 2, \quad (3.32)$$

kde $W_p(j\omega)$ je váhovací funkce, kterou se tvaruje citlivostní funkce $S(j\omega) = (I + GK)^{-1}$ a $w_{p1} = w_{p2} = w_p$ [1].

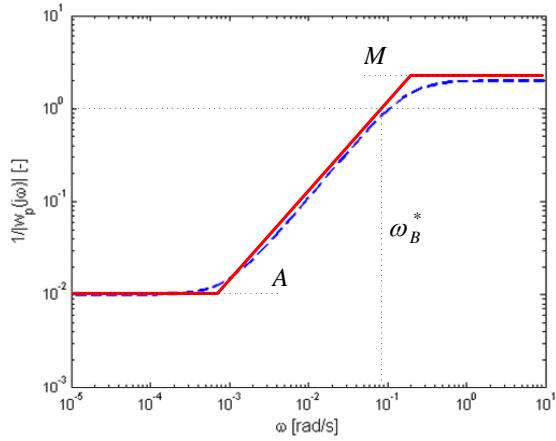
Význam jednotlivých koeficientů vah:

- M překmit citlivostní funkce,
- A regulační odchylka,
- ω_B^* přibližná šířka pásma regulace.

Na Obrázku 3.13 je zobrazen element inverzní váhy W_p^{-1} (tedy požadovaný tvar citlivostní funkce na obou kanálech).

Pro posuzování kvality řízení se používá \mathcal{H}_∞ -norma, neboli musí být splněno [5]:

$$\|W_p S\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(S(j\omega)) < 1/|w_p(j\omega)|, \forall \omega. \quad (3.33)$$



Obrázek 3.13: Přesný a asymptotický graf $1/|w_p(j\omega)|$

3.7.2 Nominální kvalita řízení (NP)

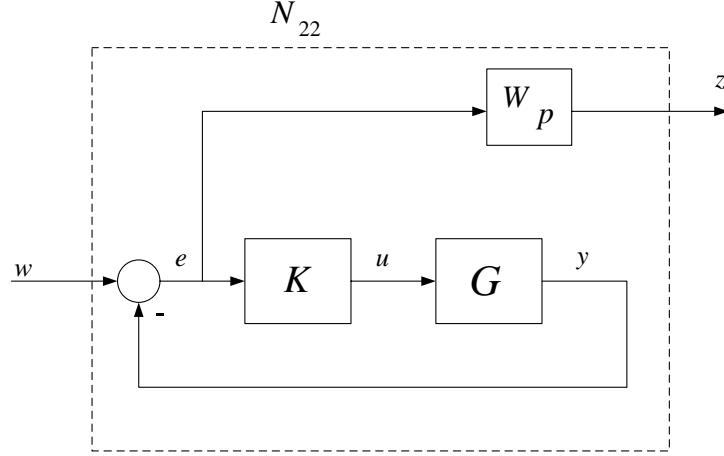
Pro odvození podmínky použijeme $N\Delta$ -strukturu na Obrázku 3.10 [1]. V nominálním případě $\Delta = 0$, proto se dále používá pouze N_{22} (N musí být ovšem nominálně stabilní). Do Obrázku 3.3 zavedeme váhu W_p a určíme N_{22} :

$$N_{22} = W_p S. \quad (3.34)$$

Na Obrázku 3.14 je zobecněný regulační obvod pro určení nominální kvality řízení.

Podmínka nominální kvality řízení je:

$$\boxed{\text{NP} \Leftrightarrow \text{NS} \wedge \bar{\sigma}(W_p(j\omega)S(j\omega)) < 1 \forall \omega.} \quad (3.35)$$



Obrázek 3.14: Zobecněný regulační obvod pro určení NP

3.7.3 Robustní kvalita řízení (RP)

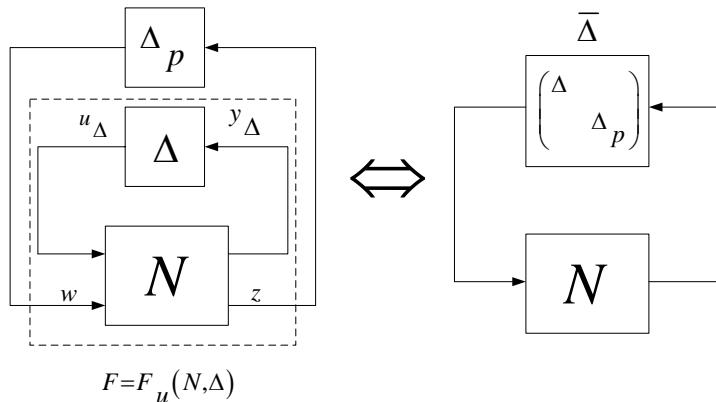
Pokud regulační obvod splňuje robustní kvalitu řízení, potom splňuje NP pro všechny modely z rodiny perturbovaných modelů a také splňuje RS. Pro odvození opět použijeme $N\Delta$ -strukturu na Obrázku 3.10, kde Δ rozšíříme na [5]:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Δ_p , $\|\Delta_p\|_\infty \leq 1$ představuje fiktivní nestrukturovanou neurčitost, která se vkládá mezi exogenní vstupy w a exogenní výstupy z zobecněného modelu, viz Obrázek 3.15.

Testování robustní kvality řízení je vlastně speciální případ testování RS (3.26), kde místo $M\Delta$ -struktury se uvažuje $F\Delta_p$ -struktura:

$$RP \Leftrightarrow \|F\|_\infty = \|F_u(N, \Delta)\|_\infty < 1, \forall \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq 1, \text{ kde } N \text{ splňuje NS.} \quad (3.37)$$



Obrázek 3.15: Fiktivní neurčitost v zobecněném modelu

Nyní z Obrázku 3.16 určíme matici přenosů N :

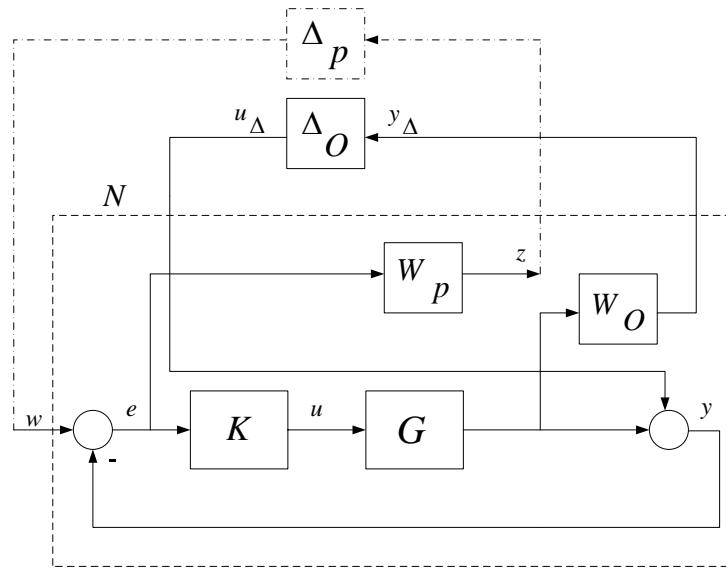
$$N = \begin{bmatrix} -W_O T_O & W_O T_O \\ -W_p S_O & W_p S_O \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

kde $S_O = (I + GK)^{-1}$.

Jelikož $\overline{\Delta}$ je strukturovaná neurčitost, je možné použít pro testování RP strukturované singulární číslo:

$$\boxed{\text{RP} \Leftrightarrow \text{NS} \wedge \mu_{\overline{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \forall \omega}. \quad (3.39)$$

Analýza vlivu neurčitosti na stabilitu a kvalitu řízení regulačního obvodu pomocí strukturovaných singulárních čísel se označuje jako *μ -analýza*.



Obrázek 3.16: Zobecněný regulační obvod pro určení RP

Kapitola 4

Návrh regulátorů

4.1 Požadavky na řízení

Před návrhem je třeba stanovit, jaké nároky máme na regulaci. V časové oblasti:

$$\begin{aligned} e_{ss} &\leq 1\% \quad - \text{regulační odchylka}, \\ p &\leq 30\% \quad - \text{překmit regulované veličiny}, \\ u &\in (0, 10) \text{ V} \quad - \text{akční zásah regulátoru}. \end{aligned}$$

Při návrhu regulátorů \mathcal{H}_∞ -metodami se používá tvarovací filtr podle rovnice (3.32) a chceme, aby:

$$\max |\omega_B^*| \quad \text{tak, že } M = 2, A = 0,01 \wedge RP. \quad (4.1)$$

Chceme tedy maximalizovat frekvenční pásmo, ve kterém je splněna robustní kvalita řízení. Volba $M = 2$ souvisí s požadovaným maximálním překmitem řízené veličiny a A představuje maximální regulační odchylku.

Interakce při regulaci (překmit regulované veličiny na referenci na druhém kanále) se snažíme co nejvíce potlačit, maximálně mohou však dosahovat 30 % hodnoty reference. Při návrhu (hlavně u neminimálně fázového modelu) tedy budeme muset často volit kompromis mezi velikostí interakcí a dobou regulace.

U klasických metod se volí tvarovací filtr W_p až při analýze robustnosti a kvality řízení (není možné RS, NP a RP zaručit již v návrhové části) a opět se snažíme docílit (4.1). Na konci kapitoly porovnáme nominální kvalitu řízení všech regulátorů i dosaženou šířku pásmá robustní kvality řízení ω_{RP}^* .

4.2 Klasické metody syntézy

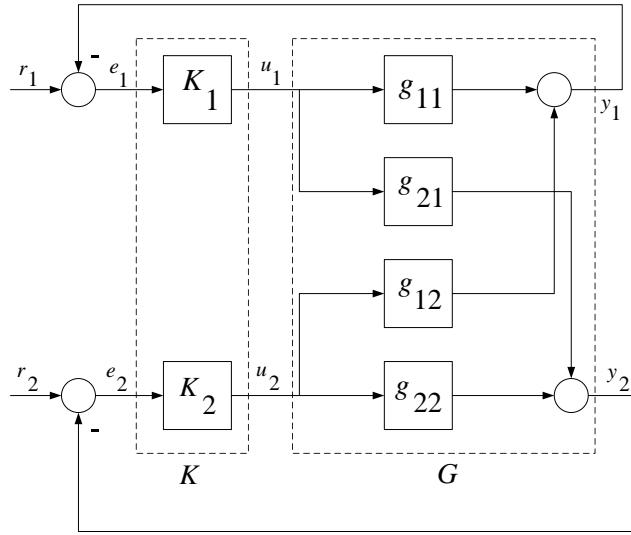
4.2.1 Decentralizovaný PI regulátor

Pro řízení hladiny se z rodiny proporcionálně-integračně-derivačních regulátorů nejlépe hodí PI regulátor. Nejprve jsme vyzkoušeli PD a PID regulátor, ale měly příliš velký akční zásah. Jelikož se má řídit MIMO model (2×2), použije se *decentralizovaný PI*

regulátor. Tento regulátor se skládá z 2 dílčích regulátorů, které navrhujeme pro SISO přenosy. Návrh začíná výpočtem matici RGA¹ (Relative gain array), která kvantifikuje vzájemném ovlivňování vstupů a výstupů modelu [3]. Z RGA lze určit vhodné párování vstupů a výstupů a poté se navrhnou PI regulátory pro jednotlivé SISO podsystémy².

4.2.1.1 Minimálně fázový model

Z matici RGA plyne, že vhodná volba párování vstupů a výstupů je $u_1 - y_1$, $u_2 - y_2$. Na Obrázku 4.1 je zapojení regulátoru v regulačním obvodu.



Obrázek 4.1: Schéma zapojení decentralizovaného PI regulátoru pro minimálně fázový model

Jednotlivé regulátory navrhujeme metodou GMK (Geometrické místo kořenů). Navržený regulátor $K(s)$ má tvar:

$$K_1(s) = 0,14 \frac{(1+6,7s)}{s},$$

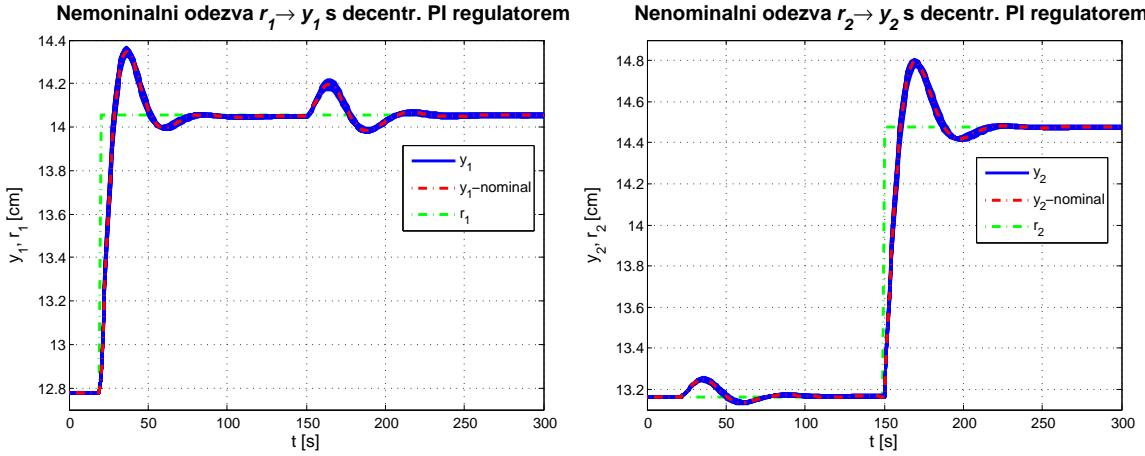
$$K_2(s) = 0,122 \frac{(1+7,8s)}{s}.$$

Pro použití klasického zapojení regulačního obvodu platí, že $K = \text{diag}\{K_1, K_2\}$. Na Obrázku 4.2 lze vidět časové průběhy regulace vodárny.

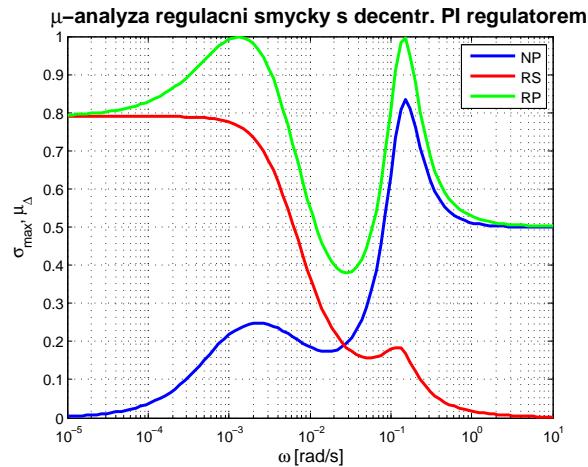
Z μ -analýzy na Obrázku 4.3 vyplývá, že regulační obvod splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,996$) a dosažená šířka pásma regulace $\omega_{RP}^* = 0,075$ rad/s.

¹RGA(G) = $\Lambda(G) \triangleq G \times (G^{-1})^T$, kde \times označuje *násobení člen po členu*.

²Tento postup návrhu decentralizovaného PI regulátoru nezaručí stabilitu regulačního obvodu. Pro použití metody (např. Direct Nyquist array), která toto zaručuje, odkazujeme na [5].



Obrázek 4.2: Časové odezvy s decentralizovaným PI regulátorem pro minimálně fázový model



Obrázek 4.3: μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a decentralizovaným PI regulátorem

4.2.1.2 Neminimálně fázový model

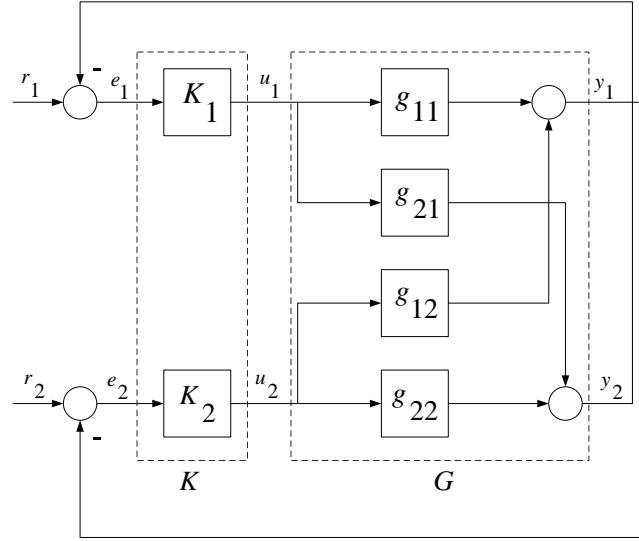
Vhodné párování vstupů a výstupů je $u_1 - y_2$, $u_2 - y_1$. Opět jsme nejprve zkusili metodu GMK, ale museli jsme koeficienty jednotlivých PI regulátorů nakonec ladit ručně, aby regulační obvod byl stabilní. Zapojení regulačního obvodu je na Obrázku 4.4.

Regulátor má tvar:

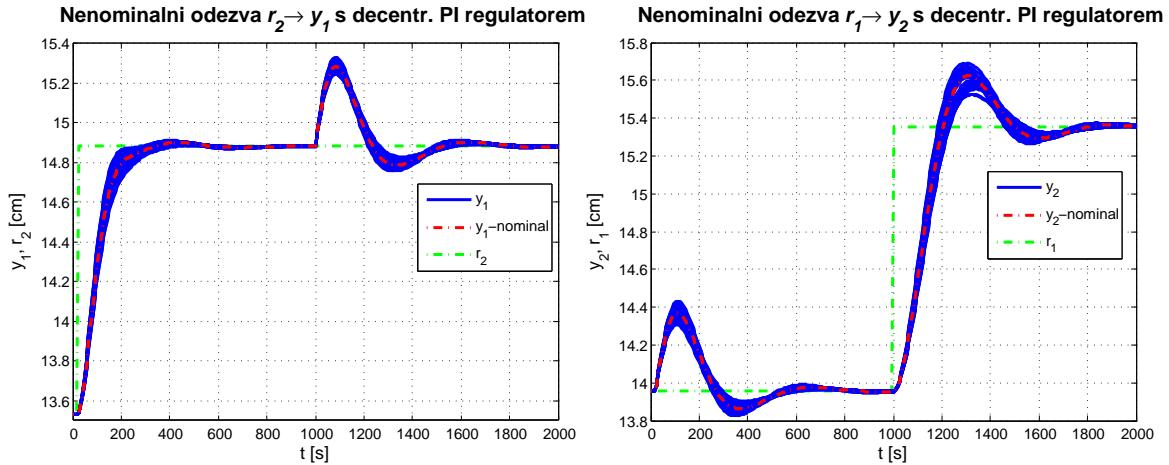
$$K_1(s) = 0,001 \frac{(1 + 80s)}{s},$$

$$K_2(s) = 0,001 \frac{(1 + 95s)}{s}.$$

Na Obrázku 4.5 lze vidět časové průběhy regulace vodárny.



Obrázek 4.4: Schéma zapojení decentralizovaného PI regulátorem pro neminimálně fázový model



Obrázek 4.5: Časové odezvy s decentralizovaným PI regulátorem pro neminimálně fázový model

Pro použití klasického regulačního obvodu platí:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_1 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix}$$

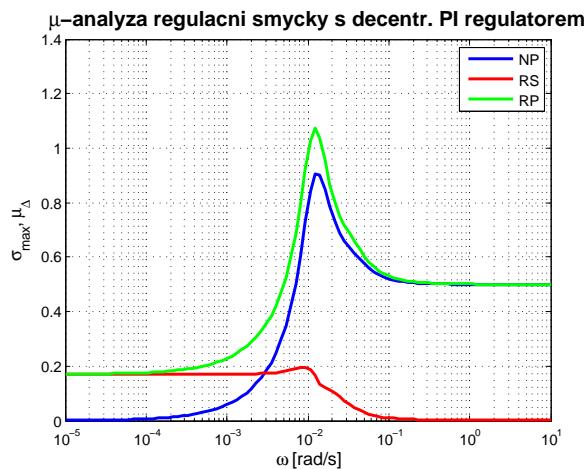
a regulace je potom znova ve tvaru $r_1 \rightarrow y_1$ a $r_2 \rightarrow y_2$ (použijeme při porovnání nominálních odezv se všemi regulátory).

Jak lze vidět z Obrázku 4.6, regulační obvod splňuje RS a NP, ale nesplňuje RP ($\mu_\Delta = 1, 1^3$). To znamená, že nelze najít žádnou váhu W_p (s danými kritérii), pro které

³Regulační obvod by splňoval RP, kdyby se perturbace $1, 1 \times$ zmenšily (toleruje 91 % neurčitosti).

by bylo RP splněno a zároveň byly splněny požadavky v časové oblasti.

Z časových průběhů na Obrázku 4.5 je vidět, že interakce jsou o dost větší než u minimálně fázového systému. I doba regulace se prodloužila. Z nenominálního chování je také možné odcítit, že citlivost na neurčitost je větší než u minimálně fázového modelu (pás kolem nominální odezvy je širší).



Obrázek 4.6: μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a decentralizovaným PI regulátorem

4.2.2 LQ regulátor s pozorovatelem

Na rozdíl od decentralizovaného PI regulátoru jsou ostatní metody návrhu (tedy i LQ regulátor) použity pro celý MIMO model. LQ řízení je typem stavového řízení, proto uvažujeme model ve stavovém tvaru podle (2.1), (2.2) a (2.3) [3]. Návrh LQ regulátoru je vlastně úlohou optimalizace, kde se minimalizují náklady (cost) ve tvaru kvadratického funkcionálu:

$$\min_{u \neq 0} J, \quad J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (4.2)$$

Váhy Q a R (pozitivně semidefinitní) si zvolí návrhář a vyjadřují náklady na řízení (doba regulace) a náklady na akční zásah.

Optimálním řešením (4.2) je $u = -Kx$, kde $K = R^{-1}B^T P$ (matice zesílení) a P je pozitivně semidefinitní řešení algebraické Riccatiho rovnice:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4.3)$$

Z Obrázku 4.7 vyplývá, že klasický LQ regulátor nelze použít pro případ, kdy je třeba sledovat referenci. Dále také se neměří všechny stavy, proto použijeme pozorovatele (viz později).

Aby bylo možné sledovat referenci, přidáme ke stavům nový stav x_i , který představuje integrál regulační odchylky [3]:

$$\dot{x}_i = -Cx + r. \quad (4.4)$$

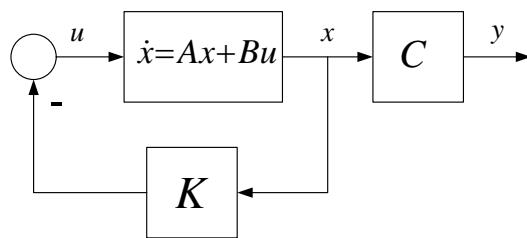
Upravený stavový popis bude:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad (4.5)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

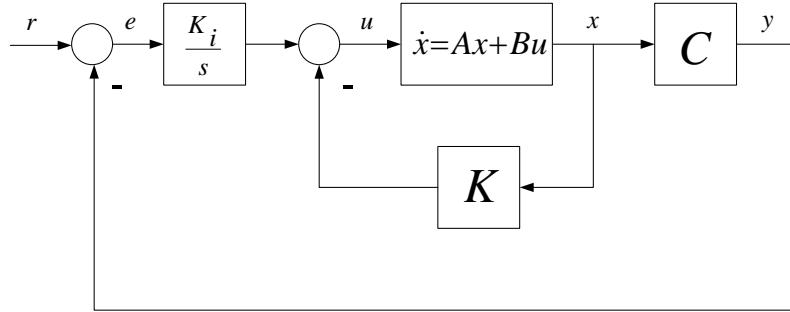
Stavové matice modelu s rozšířenými stavy jsou potom \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} a zpětnovazebné zesílení bude $\tilde{K} = [K \quad -K_i]$. Optimalizační úloha (4.2) přejde do tvaru:

$$\min_{u \neq 0} J, \quad J = \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + u^T R u) dt. \quad (4.7)$$



Obrázek 4.7: Stavová zpětná vazba

Zapojení regulátoru pro sledování reference je na Obrázku 4.8.



Obrázek 4.8: Zapojení LQ regulátoru pro sledování reference

Protože na výstupu se neměří všechny stavy ze stavového vektoru x (pouze výška hladiny v 1. a 2. válci), použijeme *pozorovatele redukovaného řádu* (reduced-order observer), který zbylé dva stavy pozoruje. Stavovový vektor x můžeme rozdělit na 2 části:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix},$$

kde \check{x}_1 jsou měřené stavy a \check{x}_2 jsou pozorované stavy [7]. Stavový popis modelu (2.1) a (2.2) tedy upravíme takto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix}}_{\check{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \check{B}_1 \\ \check{B}_2 \end{bmatrix}}_B u, \quad (4.8)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \check{C}_1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Rovnici (4.8) rozepíšeme po složkách:

$$\dot{x}_1 = \check{A}_{11}\check{x}_1 + \check{A}_{12}\check{x}_2 + \check{B}_1 u, \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_2 = \check{A}_{21}\check{x}_1 + \check{A}_{22}\check{x}_2 + \check{B}_2 u \quad (4.11)$$

a rovnici (4.9) upravíme:

$$y = \check{C}_1 \check{x}_1. \quad (4.12)$$

Rovnice *pozorovatele plného řádu* (full-order observer) jsou:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \check{A}_{11}\hat{x}_1 + \check{A}_{12}\hat{x}_2 + \check{B}_1 u + L_1(y - \check{C}_1 \hat{x}_1), \quad (4.13)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \check{A}_{21}\hat{x}_1 + \check{A}_{22}\hat{x}_2 + \check{B}_2 u + L_2(y - \check{C}_1 \hat{x}_1). \quad (4.14)$$

Rovnici pro \hat{x}_1 není třeba řešit, protože tyto stavu se dají vypočítat přímým použitím (4.12):

$$\dot{\hat{x}}_1 = \check{x}_1 = \check{C}_1^{-1}y. \quad (4.15)$$

V případě vodárnny platí pro pozorovatele stavů, které nelze přímo měřit:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \check{A}_{21}\check{C}_1^{-1}y + \check{A}_{22}\hat{x}_2 + \check{B}_2u. \quad (4.16)$$

Dynamika pozorování je určena vlastními čísly \check{A}_{22} , na které ovšem nemá návrhář vliv a není zaručeno, že jsou vhodně rozmístěna. Je proto vhodnější obecnější struktura, vezmeme proto:

$$\dot{\hat{x}}_2 = Ly + z, \quad (4.17)$$

kde:

$$\dot{z} = Fz + Gy + Hu. \quad (4.18)$$

Chyba pozorování je definována následovně:

$$e = x - \hat{x} = \begin{bmatrix} \check{x}_1 - \hat{x}_1 \\ \check{x}_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{e}_1 \\ \check{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \check{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Použitím rovnic (4.12), (4.17), (4.18) a (4.19) a po několika krocích úprav dostaneme diferenciální rovnici chyby odhadování:

$$\begin{aligned} \dot{\check{e}}_2 &= F\check{e}_2 + (\check{A}_{21} - L\check{C}_1\check{A}_{11} - G\check{C}_1 + FL\check{C}_1)\check{x}_1 + (\check{A}_{22} - L\check{C}_1\check{A}_{12} - F)\check{x}_2 \\ &\quad + (\check{B}_2 - L\check{C}_1\check{B}_1 - H)u. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aby byla chyba nezávislá na \check{x}_1 , \check{x}_2 a u musí platit:

$$F = \check{A}_{22} - L\check{C}_1\check{A}_{12}, \quad (4.21)$$

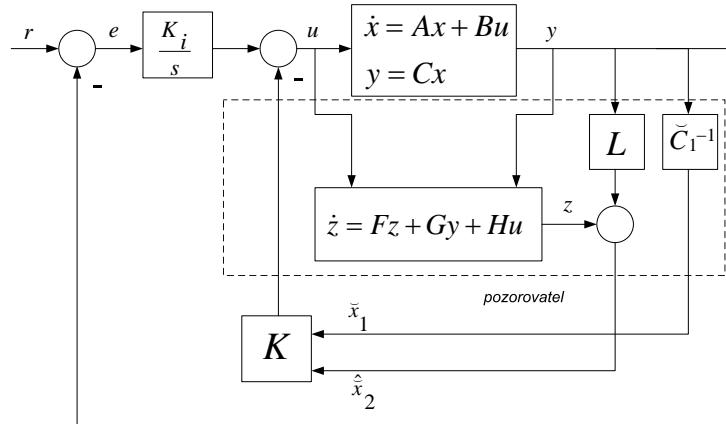
$$H = \check{B}_2 - L\check{C}_1\check{B}_1, \quad (4.22)$$

$$G = (\check{A}_{21} - L\check{C}_1\check{A}_{11})\check{C}_1^{-1} + FL. \quad (4.23)$$

A potom:

$$\dot{\check{e}}_2 = F\check{e}_2. \quad (4.24)$$

Návrh pozorovatele redukovaného řádu tedy spočívá v umístění vlastních čísel $(\check{A}_{22} - L\check{C}_1\check{A}_{12})$ namísto $(A - LC)$ u pozorovatele plného řádu. Vlastní čísla volíme $5 \times$ rychlejší než jsou příslušná vlastní čísla $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$. Regulační obvod s pozorovatelem je na Obrázku 4.9. Počáteční podmínky pozorovatele $z(0)$ volíme o dvě procenta vychýleny od pracovního bodu. Pro návrh použijeme matlabovskou funkci `lqr`.



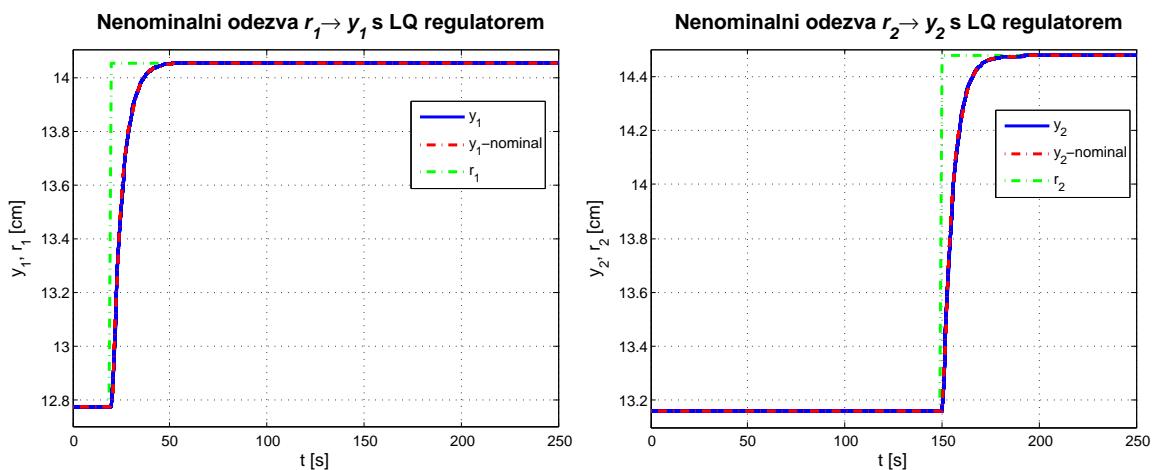
Obrázek 4.9: Regulační obvod s LQ regulátorem a pozorovatelem

4.2.2.1 Minimálně fázový model

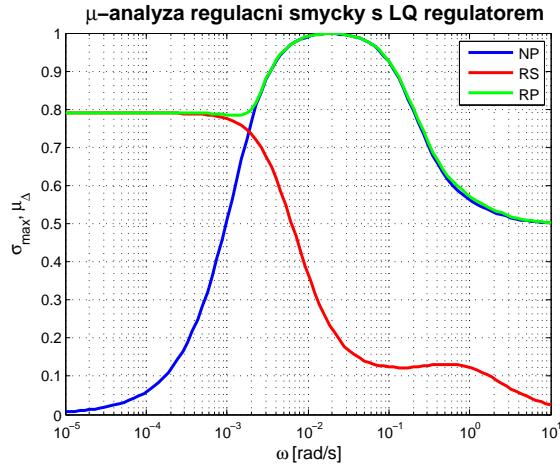
Volba matic \tilde{Q} , R , matice zesílení \tilde{K} (pro původní systém) a matice zesílení pozorovatele L jsou:

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= \text{diag}\{1; 1; 0; 0; 0,065; 0,065\}, \\ R &= \text{diag}\{0,01; 0,01\}, \\ \tilde{K} &= \begin{bmatrix} 55,6035 & -0,1792 & 0,9094 & -0,0025 & -9,9777 & 0,0291 \\ 0,1610 & 56,9432 & -0,0010 & 0,7739 & -0,0300 & -9,6867 \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} -0,2022 & 0 \\ 0 & 10,0750 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Regulační obvod splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,997$), viz Obrázek 4.11, a dosažená šířka pásma $\omega_{RP}^* = 0,17$ rad/s. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.10.



Obrázek 4.10: Časové odezvy s LQ regulátorem pro minimálně fázový model



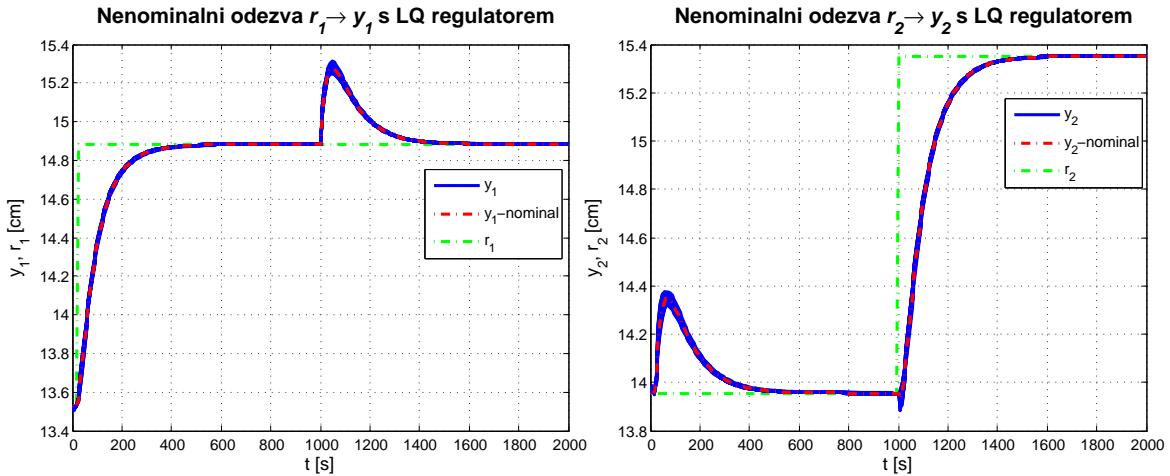
Obrázek 4.11: μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a LQ regulátorem

4.2.2.2 Neminimálně fázový model

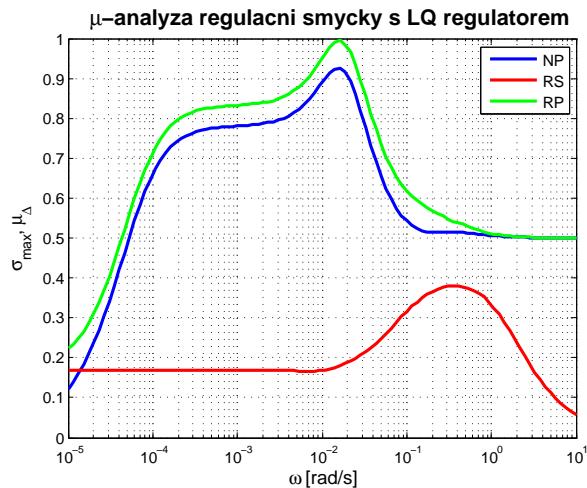
$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= \text{diag}\{1; 1; 0; 0; 0,0008; 0,0008\}, \\ R &= \text{diag}\{0,01; 0,01\}, \\ \tilde{K} &= \begin{bmatrix} 2,4766 & 71,2392 & -20,4203 & 25,2528 & -0,2760 & -0,9774 \\ 62,8882 & -42,0487 & 27,7479 & -31,9050 & -1,0081 & 0,2676 \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} 4,9513 & 0 \\ 0 & 2,7674 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dynamiku pozorovatele jsme zvolili pomalejší ($2 \times \text{eig}\{\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\}$) než u minimálně fázového modelu. Je to z důvodu větší citlivosti regulačního obvodu na neurčitost ⁴(hodnota $\mu_\Delta(W_O T_O)$ byla blízko 1). Regulační obvod s LQ regulátorem splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,99$), viz Obrázek 4.13, a dosažená šířka pásma $\omega_{RP}^* = 0,0063$ rad/s. Interakce jsou velmi viditelné. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.12.

⁴Pro velikost vlastních čísel pozorovatele $\text{eig}\{A_{22} - LC_1 A_{12}\} = 7 \times \text{eig}\{\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\}$ již není RS splněna.



Obrázek 4.12: Časové odezvy s LQ regulátorem pro neminimálně fázový model



Obrázek 4.13: μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a LQ regulátorem

4.3 Robustní \mathcal{H}_∞ -metody syntézy

4.3.1 Obecný \mathcal{H}_∞ -optimální problém

Úloha \mathcal{H}_∞ -optimálního řízení je obecným základem 2 níže uvedených speciálních \mathcal{H}_∞ -problémů návrhu (smíšená citlivost, \mathcal{H}_∞ loop-shaping) [5]. Vraťme se k Obrázku 3.2, kde je znázorněn zobecněný regulační obvod se zobecněným modelem:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{a } z = F_l(P, K)w = [P_{11} + P_{12}(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]w.$$

\mathcal{H}_∞ -optimální problém je nalézt všechny stabilizující regulátory⁵ K , které minimalizují [1]:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(F_l(P, K)(j\omega)). \quad (4.25)$$

V praxi není nezbytné získat optimální regulátor, ale je výpočetně výhodnější a jednodušší navrhnout sub-optimální regulátor (blízko optimálnímu ve smyslu \mathcal{H}_∞ -normy). Vezměme γ_{\min} jako minimální hodnotu $\|F_l(P, K)\|_\infty$ přes všechny stabilizující regulátory K . Pak je \mathcal{H}_∞ -sub-optimální problém pro $\gamma > \gamma_{\min}$ nalézt všechny stabilizující regulátory K tak, že:

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma. \quad (4.26)$$

Pro popis obecného \mathcal{H}_∞ -algoritmu odkazujeme na [1] a [5]. Pokud není známé γ_{\min} , použije se γ -iterace (řeší se řada \mathcal{H}_∞ -sub-optimálních problémů) a optimálnímu řešení se algoritmus přiblíží po určitou toleranci. Výpočet regulátorů necháme na MATLABu, který defaultně používá výše zmíněný algoritmus založený na řešení Riccatiho rovnic, v nastavení se ovšem může zvolit i řešení přes LMI (Linear Matrix Inequality), pro více informací odkazujeme na [8].

⁵Regulátory jsou parametrizovány Youla-Kučerovou parametrizací; $K = (I - QG)^{-1}Q = Q(I - GQ)^{-1}$ (pro stabilní G), kde Q je jakákoli stabilní přenosová matice. Parametrizace zaručuje interní stabilitu uzavřené regulační smyčky, více v [1] a [5].

4.3.2 Redukce řádu regulátoru

Moderní \mathcal{H}_∞ -metody generují regulátory řádu alespoň jako je model, ale díky vahám mají většinou větší řád [1]. Jejich implementace v praxi však může být moc složitá a hledají se jednodušší řešení. Pro tento účel lze redukovat model před návrhem regulátoru, nebo redukovat regulátor po návrhu, nebo obojí. V případě vodárny je model nízkého řádu (4), redukujeme proto regulátor. V této části jsou definovány 2 typy redukce řádu regulátoru - *useknutí balancované realizace* (balanced truncation) a *Hankelova optimální redukce* (optimal Hankel norm approximation), které jsou také použity v této práci. Pro podrobnější popis této problematiky odkazujeme na [1].

Základní úloha redukce je nalézat approximaci nižšího řádu K_r pro původní regulátor K tak, že $\|K - K_r\|_\infty$ je malé. Nyní vysvětlíme pojem *balancované realizace*, která má užitečné vlastnosti oproti původní realizaci. Balancovaná realizace je asymptoticky stabilní minimální realizace, ve které jsou Gramiány⁶ řiditelnosti P a pozorovatelnosti Q diagonální a stejně:

$$P = Q = \text{diag}\{\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n\} \triangleq \Sigma,$$

kde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ jsou *Hankelova singulární čísla* $K(s)$, která jsou definována $\sigma_i \triangleq \sqrt{\lambda_i(PQ)}$, $i = 1, \dots, n$ [1]. Více formálně je možné balancovanou realizaci popsat takto: Pokud (A, B, C, D) je minimální realizace stabilní racionální přenosové funkce $K(s)$, potom (A, B, C, D) je *balancovaná*, když P, Q (viz výše) jsou řešení Lyapunových rovnic:

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad (4.27)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0. \quad (4.28)$$

Jakákoli minimální realizace stabilní přenosové funkce může být balancována jednodušší transformací.

V balancované realizaci je každé σ_i spojeno se stavem x_i balancovaného systému. Velikost σ_i je relativní mírou příspěvku x_i ve vstupně-výstupním chování. Proto pokud $\sigma_1 \gg \sigma_2$, potom stav x_1 ovlivňuje mnohem více vstupně-výstupní chování než stav x_2 . Tato vlastnost Hankelových singulárních čísel je dále využívána pro odstranění stavů, které mají malý efekt na vstupně-výstupní chování. Na Obrázku 4.14 jsou znázorněna Hankelova singulární čísla pomocí funkce MATLABu `hankelsv`.

Rozdělme balancovanou realizaci (A, B, C, D) regulátoru $K(s)$ a příslušnou Σ :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2], \quad (4.29)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

kde $\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, $\Sigma_2 = \text{diag}\{\sigma_{k+1}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n\}$ a $\sigma_k > \sigma_{k+1}$.

Regulátor redukovaného řádu K_r daný (A_{11}, B_1, C_1, D) se nazývá ***useknutí balancovaná realizace*** systému plného řádu K [1]. Charakteristické pro useknutí je, že

⁶ $P \triangleq \int_0^\infty e^{At} BB^T e^{A^T t} dt; Q \triangleq \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt.$

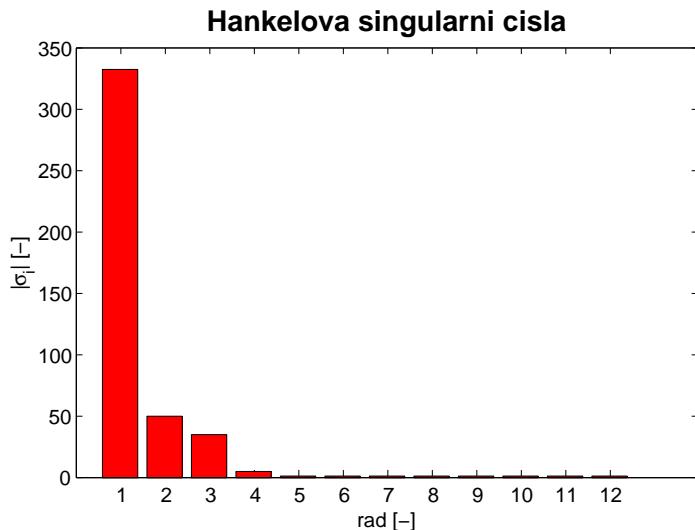
$K(\infty) = K_r(\infty) = D$. Pro \mathcal{H}_∞ -normu chyby mezi $K(s)$ a $K_r(s)$ se může psát horní odhad jako:

$$\|K - K_r\|_\infty \leq 2(\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_n). \quad (4.31)$$

Metoda **Hankelovy optimální redukce** postupuje takto: Pro daný stabilní $K(s)$ hledá regulátor redukovaného rádu K_h tak, že *Hankelova norma* approximační chyby $\|K - K_h\|_H$ je minimální. Hankelova norma jakékoli stabilní přenosové funkce $E(s)$ je definována:

$$\|E(s)\|_H \triangleq \sqrt{\rho(PQ)}, \quad (4.32)$$

kde P a Q je Gramián řiditelnosti respektive pozorovatelnosti $E(s)$. Je to také maximální Hankelovo singulární číslo $E(s)$. Pro odvození této approximace odkazujeme na [1]. Dále odkazujeme na help [9] k matlabovským funkcím `balancmr` a `hankelmr`, které byly použity v této práci.



Obrázek 4.14: Hankelova singulární čísla systému

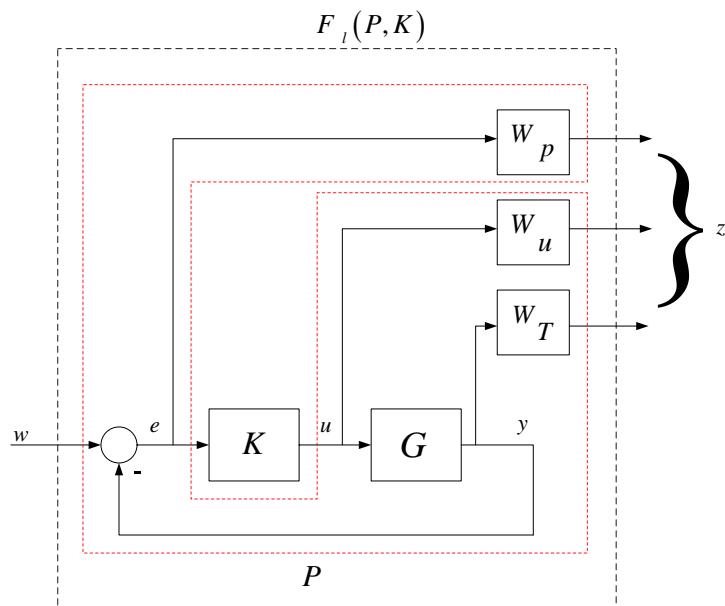
4.3.3 Smíšená citlivost (mixed-sensitivity)

Problém *smíšené citlivosti*⁷ spočívá ve váhování (tvarování) citlivostní funkce S a další či dalších přenosových funkcí uzavřené regulační smyčky. Kromě S se tvaruje také akční zásah KS a komplementární citlivostní funkce T . Akční zásah se váhuje kvůli nejlepší funkci \mathcal{H}_∞ -algoritmu, váhu ale volíme jen malou ($W_u = 0,01I$), aby nezhoršila kvalitu regulace. Komplementární citlivostní funkci T váhujeme z důvodu, aby byla splněna podmínka RS (3.31). Kvůli odhadu (3.28) zvolíme $W_T = W_O$ ⁸, kde W_O je váha z podkapitoly 3.5. Zobecněný model P je ve tvaru:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \\ W_T G \\ -G \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Zapojení pro řešení problému smíšené citlivosti je na Obrázku 4.15. Výpočtem podle (3.15) vychází:

$$F_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \\ W_T T \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$



Obrázek 4.15: Zobecněný regulační obvod pro problém smíšené citlivosti

Nyní se řeší \mathcal{H}_∞ -optimální problém pro tuto konfiguraci, hledá se tedy K , který min-

⁷Celkem existují 3 typy problémů: $S/KS \vee S/T \vee S/KS/T$ (v případě vodárny).

⁸ $\|W_O T_O\|_\infty < 1 \Rightarrow \mu_\Delta(W_O T_O) < 1$.

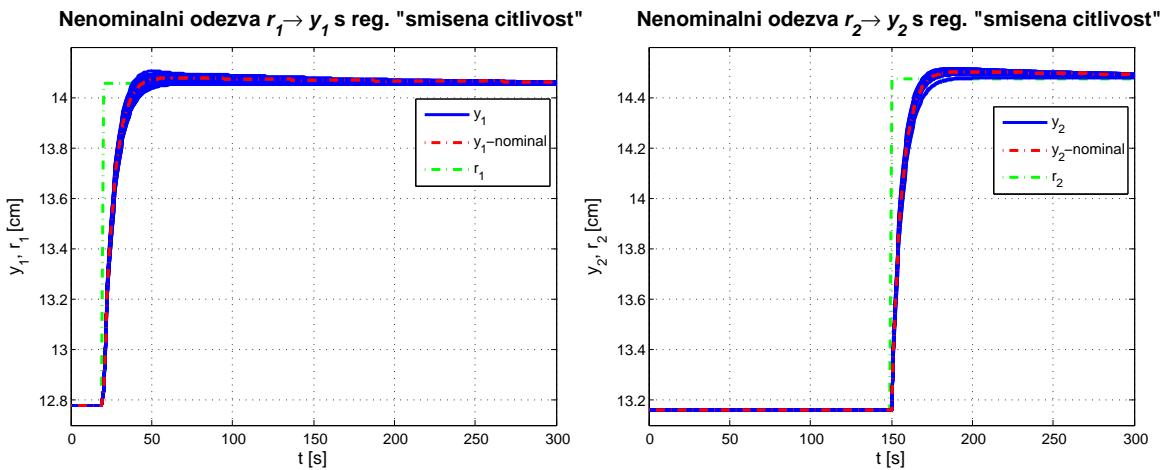
imalizuje γ pro:

$$\left\| \begin{array}{c} W_p S \\ W_u K S \\ W_T T \end{array} \right\|_\infty < \gamma. \quad (4.35)$$

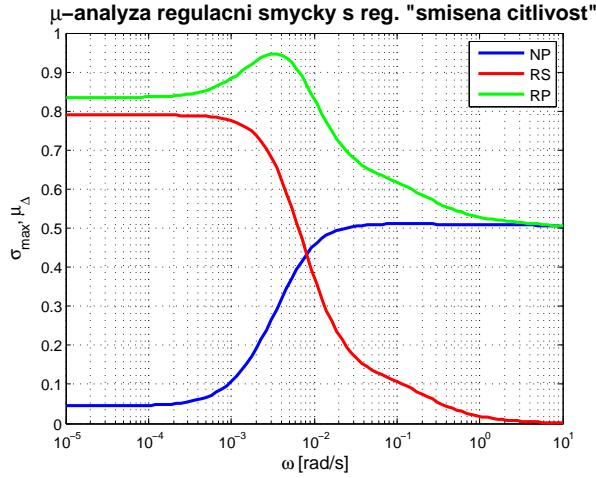
K výpočtu použijeme funkci v Matlabu `mixsyn`, která řeší (4.26).

4.3.3.1 Minimálně fázový model

Sub-optimální problém (4.26) byl vyřešen s $\gamma = 0,792$. Regulační obvod splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,95$), viz Obrázek 4.17, a dosažená šířka pásma $\omega_{RP}^* = 0,08$ rad/s. Žádné interakce nejsou přítomny. Navržený regulátor je rádu 8. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.16.



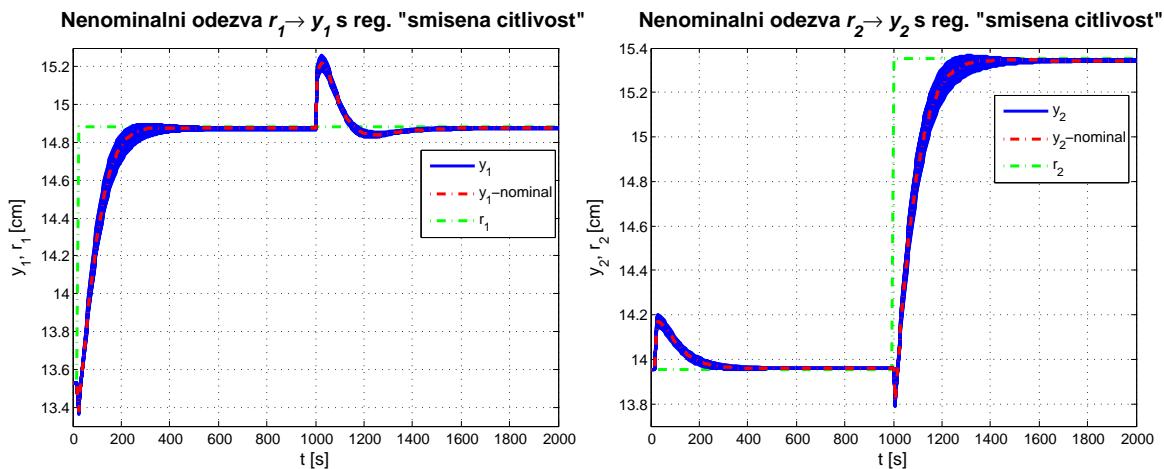
Obrázek 4.16: Časové odezvy s regulátorem ”smíšená citlivost” pro minimálně fázový model



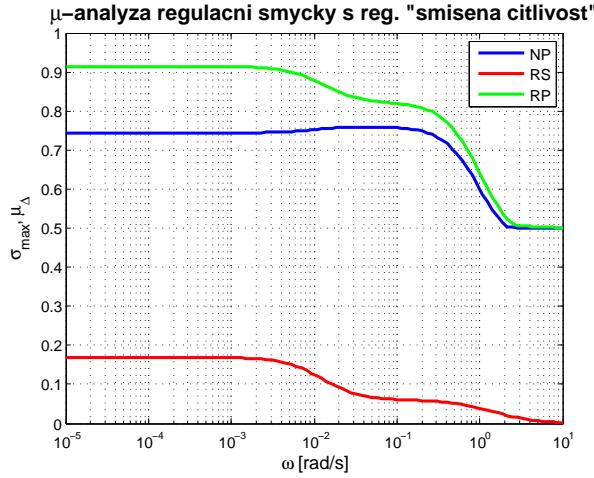
Obrázek 4.17: μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem "smíšená citlivost"

4.3.3.2 Neminimálně fázový model

Sub-optimální problém (4.26) byl vyřešen s $\gamma = 0,763$. RP je opět splněno ($\mu_\Delta = 0,91$), viz Obrázek 4.19. Interakce jsou viditelné. Dosažená šířka pásma $\omega_{RP}^* = 0,007$ rad/s. Původně navržený regulátor má rád 8, po redukci (useknutí balancované realizace) má regulátor rád 6. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.18.



Obrázek 4.18: Časové odezvy s regulátorem "smíšená citlivost" pro neminimálně fázový model



Obrázek 4.19: μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem "smíšená citlivost"

4.3.4 \mathcal{H}_∞ loop-shaping

Tato návrhová metoda⁹ je založena na kombinaci tvarování otevřené regulační smyčky (loop-shaping) s \mathcal{H}_∞ -robustní stabilizací [1]. Proces návrhu je tedy dvoustupňový. Nejprve je váhován model v otevřené smyčce (OL) prekompenzátorem a postkompenzátorem, aby získala singulární čísla otevřené smyčky požadovaný průběh. Poté je výsledný *tvarovaný model* robustně stabilizován pomocí \mathcal{H}_∞ -optimalizace. Velkou výhodou je, že se nemusí ve druhém kroku modelovat neurčitost ani vybírat váhy. Problém robustní stabilizace nevyžaduje pro své řešení γ -iteraci, a lze proto explicitně určit γ_{\min} a dostat řešení obecného \mathcal{H}_∞ -optimálního problému.

Nejprve odvodíme postup robustní stabilizace regulátoru. Vraťme se k Obrázku 3.8 z podkapitoly 3.5. Systém má tvar *normalizované levé nesoudělné podílové faktorizace* (normalized left coprime factorization):

$$G = \widetilde{M}^{-1} \widetilde{N}. \quad (4.36)$$

Pro faktory \widetilde{M} , \widetilde{N} platí:

$$\widetilde{M}\widetilde{M}^* + \widetilde{N}\widetilde{N}^* = I, \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix}^* = I, \quad (4.38)$$

kde operátor $*$ značí $M^*(s) = M^T(-s)$.

Pro výpočet faktorizace použijeme stavovou reprezentaci. Pokud je G v minimální stavové realizaci:

$$G \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

⁹Známá také po svých tvůrcích jako Glover-McFarlane metoda.

potom minimální stavová realizace normalizované levé nesoudělné podílové faktorizace je:

$$[\tilde{N}(s) \quad \tilde{M}(s)] \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & B + HD & H \\ \hline R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{array} \right], \quad (4.39)$$

kde:

$$H \triangleq -(BD^T + ZC^T)R^{-1}, \quad R \triangleq I + DD^T \quad (4.40)$$

a matice Z je jediné pozitivně definitní řešení algebraické Riccatiho rovnice:

$$(A - BS^{-1}D^TC)Z + Z(A - BS^{-1}D^TC)^T - ZC^TR^{-1}CZ + BS^{-1}B^T = 0, \quad (4.41)$$

kde $S \triangleq I + D^TD$ [1].

Lze si všimnout, že se rovnice (4.41) v případě striktně ryzího systému ($D = 0$) dosti zjednoduší.

I když se zdá tato konfigurace neurčitosti méně realistická, je dosti obecná, jelikož nepožaduje zachování nestabilních pólů u perturbovaného modelu, jako tomu je u jiných typů neurčitostí (multiplikativní, aditivní) [1]. FaktORIZovanou neurčitostí tedy lze zvětšit i zmenšit počet nestabilních pólů modelu. Navíc použití této neurčitosti vede na užitečný \mathcal{H}_∞ -problém robustní stabilizace, který nyní uvedeme.

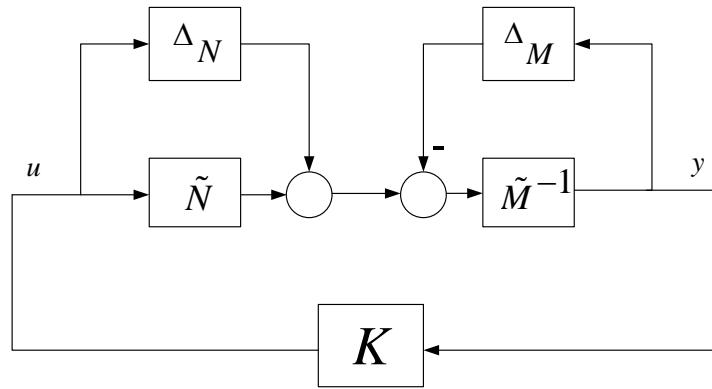
Rovnice pertubovaného modelu je:

$$\Pi_C : G_p = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N), \quad \|\Delta_M - \Delta_N\|_\infty \leq \epsilon, \quad (4.42)$$

kde $\epsilon > 0$ je bezpečnost stability a Δ_M a Δ_N jsou stabilní přenosové funkce.

Cílem robustní stabilizace je maximalizovat ϵ . Pro perturbovaný regulační obvod na Obrázku 4.20 odvodíme podmínu stability [1]. Z $M\Delta$ -struktury porovnáním určíme M :

$$M = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1}. \quad (4.43)$$



Obrázek 4.20: Problém \mathcal{H}_∞ robustní stabilizace

Perturbovaný regulační obvod je tedy stabilní právě tehdy, když nominální regulační obvod je stabilní a:

$$\gamma \triangleq \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.44)$$

Nejmenší dosažitelná hodnota γ_{\min} a s ní korespondující maximální míra stability ϵ_{\max} jsou dány [1]:

$$\gamma_{\min} = \epsilon_{\max}^{-1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_H^2}} > 1. \quad (4.45)$$

Cíl je tedy nalézt řešení problému:

$$\min_K \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty = \gamma_{\min}. \quad (4.46)$$

Robustní stabilizace samotná není v praxi příliš použitelná, protože nelze specifikovat žádné požadavky na kvalitu regulace [1]. Aby to bylo možné, užívá \mathcal{H}_∞ loop-shaping vážení modelu prekompenzátorem a postkompenzátorem, aby se vytvarovala singulární čísla otevřené regulační smyčky před robustní stabilizací takto tvarovaného modelu. Jeho rovnice je:

$$G_s = W_2 G W_1, \quad (4.47)$$

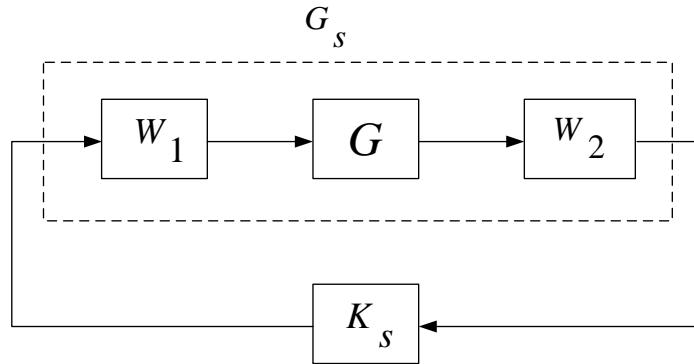
kde W_1 je prekompenzátor a W_2 je postkompenzátor. Situace je na Obrázku 4.21. Regulátor K_s je navržen řešením problému robustní stabilizace (4.46) pro tvarovaný model G_s s normalizovanou levou nesoudělnou podílovou faktorizací $G_s = \tilde{M}_s^{-1} \tilde{N}_s$. Zpětnovazební regulátor (kladná zpětná vazba) pro model G je potom:

$$K = W_1 K_s W_2. \quad (4.48)$$

Nyní se budeme zabývat volbou W_1 a W_2 . Oba kompenzátory volíme jako diagonální matice (pokud ovšem není obsaženo W_a). Postkompenzátor W_2 je brán většinou jako konstantní matice, která vyjadřuje poměrnou důležitost mezi řízenými výstupy systému a dalšími měřenými veličinami, které jsou vráceny zpětnou vazbou regulátoru. Pro model vodárný volíme $W_2 = I$, jelikož oba řízené výstupy mají stejnou důležitost.

Prekompenzátor W_1 se může skládat z několika káskadně zapojených částí:

$$W_1 = W_p W_a W_g. \quad (4.49)$$



Obrázek 4.21: Tvarovaný model s regulátorem

Element W_p zahrnuje dynamické tvarování: integrální akci na nízkých frekvencích, fázový předstih ω_I v oblasti *gain crossover frekvence* ω_c ¹⁰ a (pokud je třeba) fázové zpoždění pro větší strmost poklesu frekvenční charakteristiky na vysokých frekvencích. W_p má tedy tvar PI regulátoru:

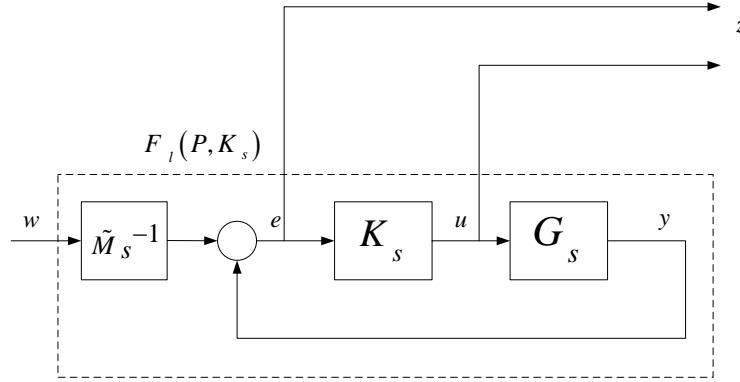
$$W_p = \text{diag} \left\{ \frac{s + \omega_{Ii}}{s} \right\}, i = 1, 2. \quad (4.50)$$

Matice W_a je volitelná a slouží k srovnání singulárních čísel v žádaném frekvenčním pásmu. Je to vlastně *rozvazbovací kompenzátor* (statický/dynamický)¹¹, neměl by být použit, pokud je systém *špatně podmíněný*¹². Konstantní matice W_g (volitelná) poskytuje kontrolu nad akčním zásahem (nepoužíváme ji).

Obecně platí, že pokud se při návrhu podaří docílit $\epsilon_{\max} \geq 0,3$ ($\gamma_{\min} \leq 3,3$), regulátor vykazuje dobré známky robustnosti. Pokud ne, je třeba změnit W_1 (případně W_2). Na Obrázku 4.22 je zapojení úlohy ve tvaru standardního \mathcal{H}_∞ -problému [5].

Zobecněný model má tvar:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{M}_s^{-1} \\ 0 \\ \widetilde{M}_s^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G_s \\ I \\ G_s \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$



Obrázek 4.22: Zobecněný regulační obvod pro problém \mathcal{H}_∞ loop-shaping

¹⁰Na této frekvenci $\bar{\sigma}(L(j\omega_c)) = 1$. Platí, že $\omega_c \approx \omega_B$.

¹¹Statický kompenzátor rozvazbuje (diagonalizuje) na určité frekvenci, například v pracovním bodě: $G^{-1}(0)G(0) = I$, $W_a = G^{-1}(0)$. Dynamický kompenzátor rozvazbuje na všech frekvencích, pro odvození odkazujeme na [10].

¹²Minimalizované číslo podmíněnosti $\gamma^*(G)$ je velké, neboli matice RGA(G) má velké prvky, což znamená citlivost systému vůči nestrukturované neurčitosti.

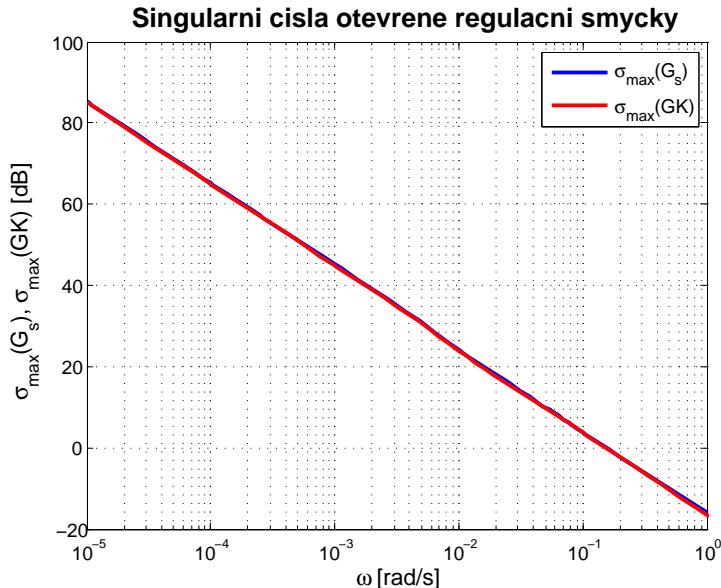
4.3.4.1 Minimálně fázový model

Volba kompenzátorů byla následující:

$$W_p = \text{diag}\left\{\frac{s+0,016}{s}\right\},$$

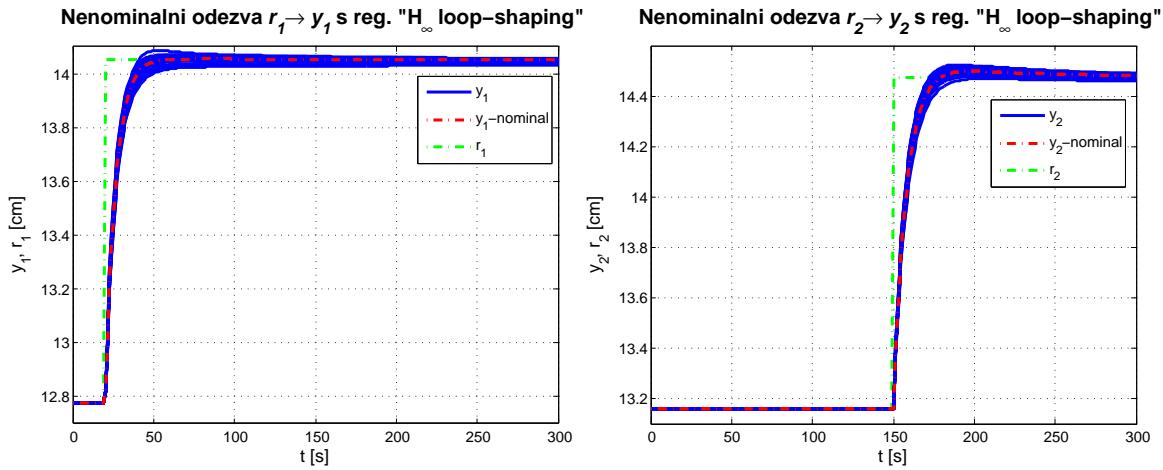
W_a – dynamický rozvazbovací kompenzátor.

Na Obrázku 4.23 je ukázáno, jak byl splněn úkol tvarování singulárních čísel otevřené smyčky, kde $\bar{\sigma}(G_s)$ je požadovaný tvar průběhu.

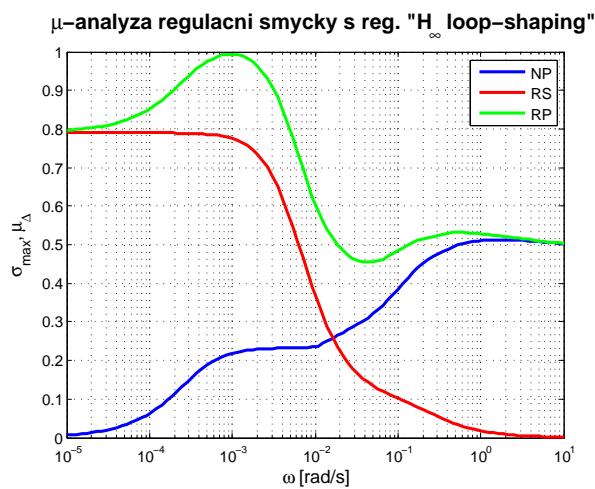


Obrázek 4.23: Výsledky tvarovaní OL singulárních čísel regulátorem pro minimálně fázový model

S tímto regulátorem bylo dosaženo $\epsilon_{\max} = 0,6955$. Regulační obvod splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,995$), viz Obrázek 4.25, a $\omega_{RP}^* = 0,036$ rad/s. Regulátor je původně rádu 7, po redukci (useknutí balancované realizace) rádu 5. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.24.



Obrázek 4.24: Časové odezvy s regulátorem " H_∞ loop-shaping" pro minimálně fázový model



Obrázek 4.25: μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem " H_∞ loop-shaping"

4.3.4.2 Neminimálně fázový model

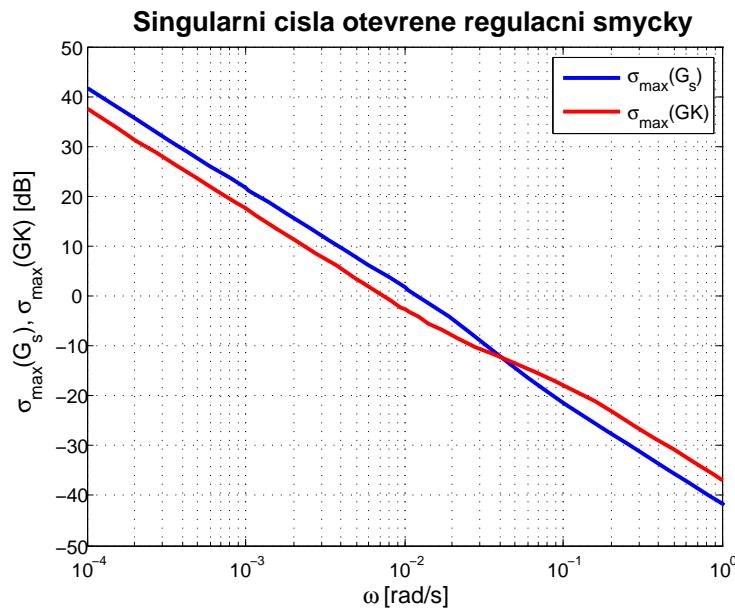
Volba kompenzátorů byla následující:

$$W_p = \text{diag}\left\{\frac{s+0,012}{s}\right\},$$

$$W_a = G^{-1}(0) \quad - \text{ statický rozvazbovací kompenzátor.}$$

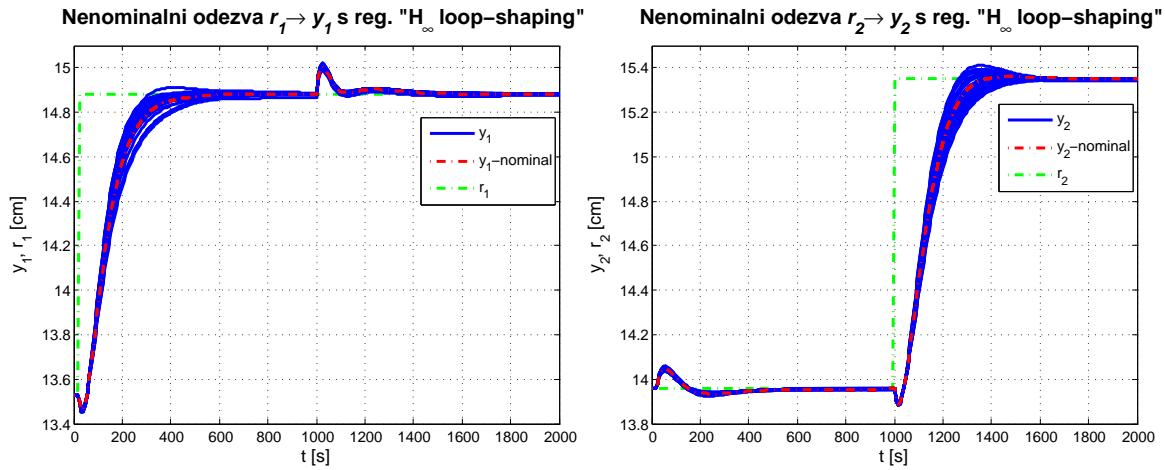
Dynamický rozvazbovací kompenzátor měl v tomto případě špatné výsledky, proto jsme použili statický rozvazbovací kompenzátor (neumí model plně rozvazbit).

Na Obrázku 4.26 lze vidět, jak byl splněn úkol tvarování OL singulárních čísel.

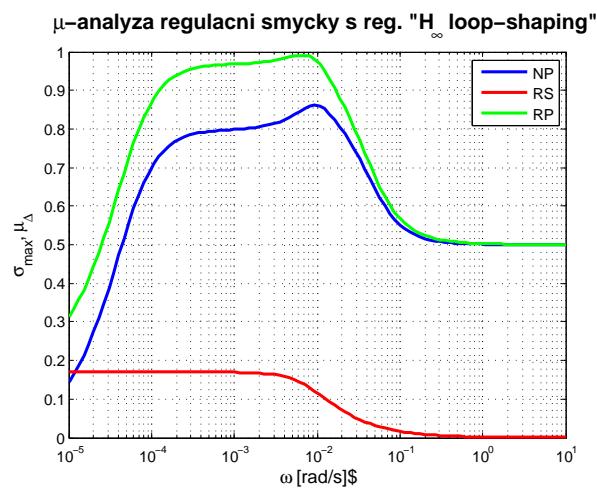


Obrázek 4.26: Výsledky tvarovaní OL singulárních čísel regulátorem pro neminimálně fázový model

S tímto regulátorem bylo dosaženo $\epsilon_{\max} = 0,498$. Regulační obvod splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,991$), viz Obrázek 4.28, a $\omega_{RP}^* = 0,0055$ rad/s. Regulátor je původně řádu 7, po redukci (Hankelova optimální redukce) řádu 5. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.27.



Obrázek 4.27: Časové odezvy s regulátorem " H_∞ loop-shaping" pro neminimálně fázový model



Obrázek 4.28: μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem " H_∞ loop-shaping"

4.3.5 D-K iterace

Strukturované singulární číslo μ_Δ je velmi efektivní nástroj pro analýzu RS a RP pro regulační obvod s daným regulátorem [1]. Dá se ovšem také využít pro problém μ -syntézy, která minimalizuje μ_Δ . V současné době ovšem neexistuje přímá metoda pro návrh μ -optimálního regulátoru¹³. Asi nejznámější používaná metoda je D-K iterace a v této práci ji použijeme pro návrh regulátorů. Kombinuje v sobě \mathcal{H}_∞ -syntézu a μ -analýzu a má často velmi dobré výsledky.

Odvození problému začneme odhadem horní hranice μ_Δ (3.28), tedy:

$$\mu_\Delta(H) \leq \bar{\sigma}(H) \quad (4.52)$$

a zaved'me matici D , která komutuje s Δ ($\Delta D = D\Delta$). Potom platí:

$$\mu_\Delta(DH) = \mu_\Delta(HD) \quad \text{a} \quad \mu_\Delta(DHD^{-1}) = \mu_\Delta(H). \quad (4.53)$$

Nyní definujme \mathcal{D} jako množinu matic D , které komutují s Δ . Potom plyne z (4.52) a (4.53):

$$\mu_\Delta(H) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DHD^{-1}). \quad (4.54)$$

Za obecnou přenosovou matici H dosadíme $H = N$, kde N je podle Obrázku 3.9, $N = F_l(\hat{V}, K)$, a dostaneme zjednodušený problém:

$$\min_K \underbrace{\left(\min_{D \in \mathcal{D}} \|DND^{-1}\|_\infty \right)}_{\geq \mu_{\overline{\Delta}}(N)}, \quad (4.55)$$

kde $\overline{\Delta}$ je rozšířená neurčitost podle (3.36). I tento zjednodušený problém se musí ovšem řešit approximativním postupem, tedy přes D-K iteraci [5].

Základem je minimalizace $\|DND^{-1}\|_\infty$ střídavě přes D a K (zatímco je druhé konstantní). Na začátku iteračního procesu $k = 0$ se vybere stabilní racionální přenosová matice $D^{(k)}(s)$ s vhodnou strukturou, $D^{(k)}(s) = I$ je často vhodnou počáteční volbou. D-K iterace poté pokračuje:

- **Iterační krok:** $k = k + 1$.
- **K-krok:** Řeší se \mathcal{H}_∞ -problém:

$$\min_{K^{(k)}} \|D^{(k-1)}F_l(\hat{V}, K^{(k)})(D^{(k-1)})^{-1}\|_\infty.$$

- **D-krok:** S vypočteným regulátorem $K^{(k)}(s)$ se řeší pro řadu frekvencí $\omega_i, i = 1, \dots, R$ minimalizační problém

$$\min_{D_i^{(k)} \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}[D_i^{(k)}F_l[\hat{V}(j\omega_i), K^{(k)}(j\omega_i)]((D_i^{(k)})^{-1})].$$

Pro danou diskrétní frekvenční oblast a regulátor $K^{(k)}(s)$ se tedy vypočte horní hranice $\mu_{\overline{\Delta}}[F_l(\hat{V}, K^{(k)})]$. Pokud je maximální hodnota menší než 1, cíle bylo dosaženo a iterace může být ukončena, pokud není, iterace pokračuje dalším bodem.

¹³Idea je minimalizovat $\max_{\omega} \mu_{\overline{\Delta}}(N(j\omega))$ přes všechny stabilizující regulátory. Jelikož nelze vypočít strukturované singulární číslo přesně, nemá tato úloha známé řešení.

- Řeší se interpolační problém a určuje se $D^{(k)}(s)$, které škálovací matici $D_i^{(k)}$ pro frekvence $\omega_i, i = 1, \dots, R$ approximují:

$$D^{(k)}(j\omega_i) \approx D_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, R.$$

Iterace pokračuje do doby, než $\|DND^{-1}\|_\infty < 1$ (RP je splněno), nebo hodnota \mathcal{H}_∞ -normy již dále neklesá [1].

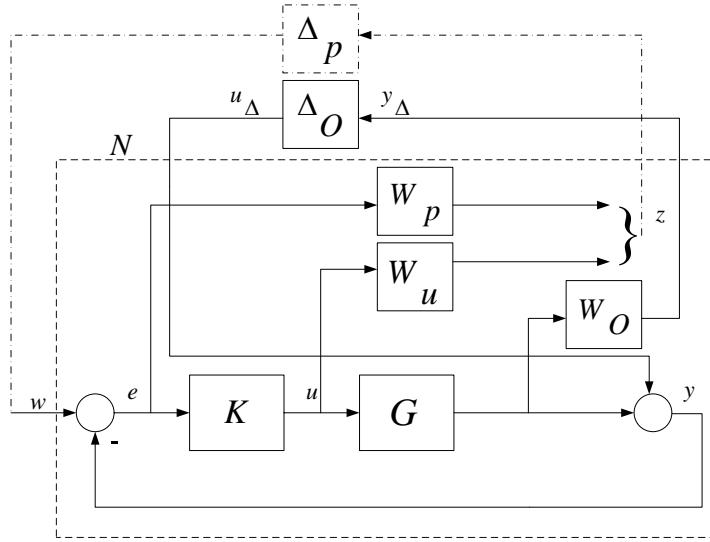
Zobecněný model \hat{V} má tvar:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_O G \\ \begin{bmatrix} -W_p \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \\ -G \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Na Obrázku 4.29 je zobecněný regulační obvod pro problém D-K iterace a N lze vyjádřit jako:

$$N = \begin{bmatrix} -W_O T_O & W_O T_O \\ \begin{bmatrix} -W_p S_O \\ -W_u K S_O \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} W_p S_O \\ W_u K S_O \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Jako u dvou předchozích metod musíme pro dobré výsledky algoritmu výpočtu regulátoru zařadit váhu W_u . Volíme ji opět malou, $W_u = 0,01I$, aby nezhoršila kvalitu dosažené regulace.

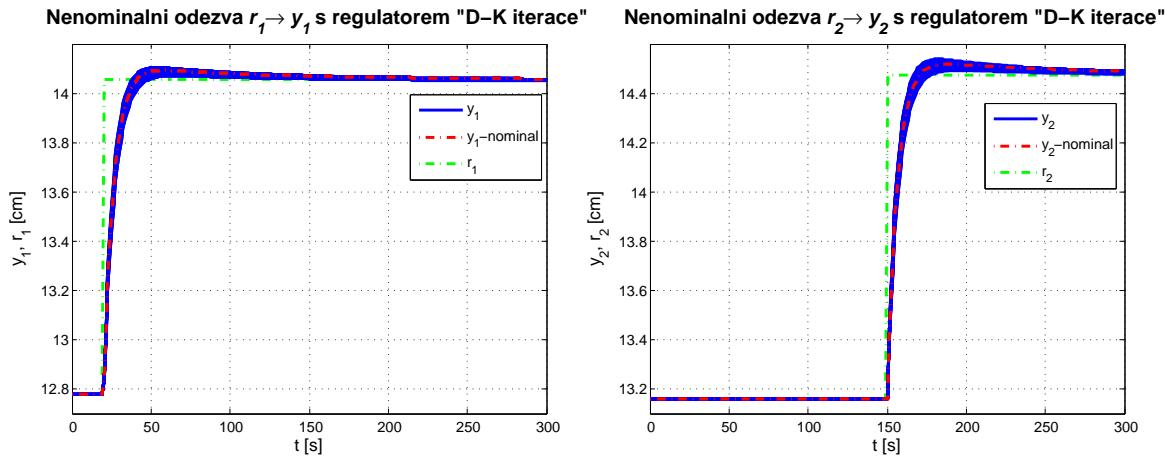


Obrázek 4.29: Zobecněný regulační obvod pro problém D-K iterace

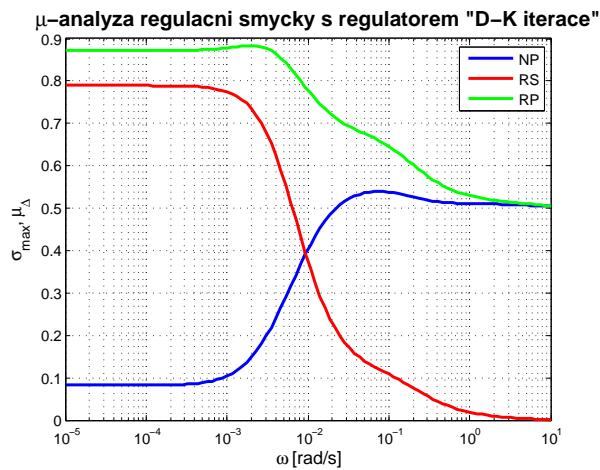
Oproti problému smíšené citlivosti a \mathcal{H}_∞ loop-shapingu se u D-K iterace použije pro návrh regulátoru přímo perturbovaný model s výstupní multiplikativní neurčitostí. Pro výpočet regulátoru používáme matlabovskou funkci `dksyn`.

4.3.5.1 Minimálně fázový model

Regulátor byl navržen po 2 iteracích, splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,89$), viz Obrázek 4.31, a dosažená šířka pásma je $\omega_{RP}^* = 0,078$ rad/s. Původně navržený regulátor je řádu 12, po redukci (Hankelova optimální redukce) je regulátor řádu 8. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.30.



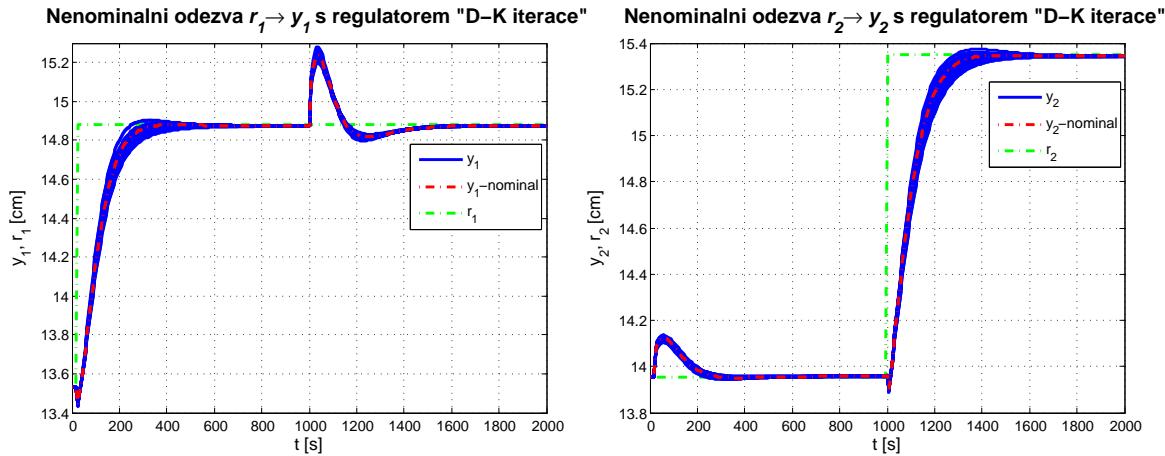
Obrázek 4.30: Časové odezvy s regulátorem "D-K iterace" pro minimálně fázový model



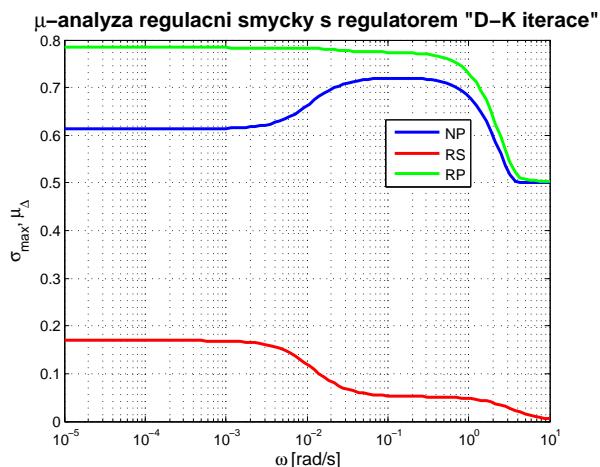
Obrázek 4.31: μ -analýza regulačního obvodu s minimálně fázovým modelem a regulátorem "D-K iterace"

4.3.5.2 Neminimálně fázový model

Regulátor byl navržen po 4 iteracích, splňuje RP ($\mu_\Delta = 0,79$), viz Obrázek 4.33, a dosažená šířka pásma je $\omega_{RP}^* = 0,0053$ rad/s. Původně navržený regulátor má řád 8, po redukci (useknutí balancované realizace) je regulátor řádu 6. Časové průběhy regulace jsou na Obrázku 4.32.



Obrázek 4.32: Časové odezvy s regulátorem "D-K iterace" pro neminimálně fázový model

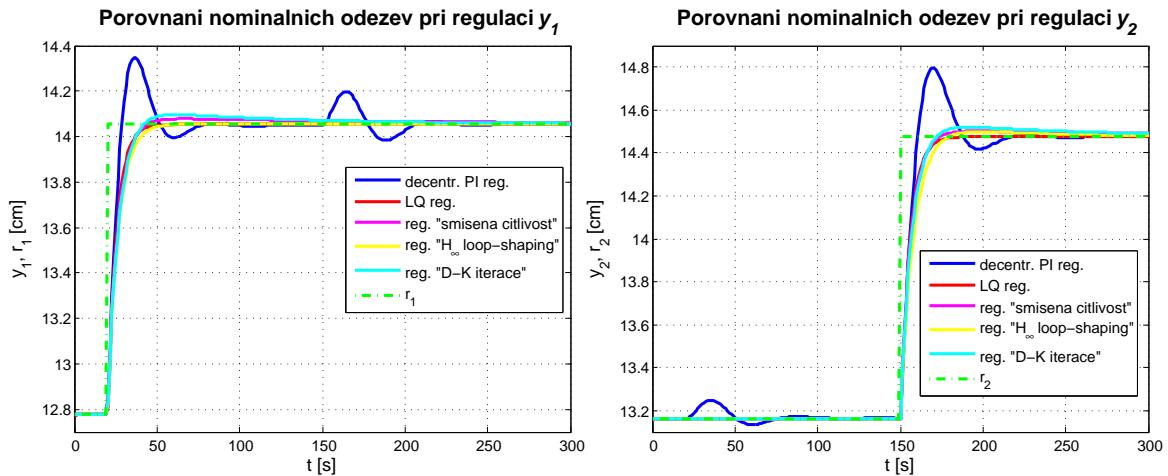


Obrázek 4.33: μ -analýza regulačního obvodu s neminimálně fázovým modelem a regulátorem "D-K iterace"

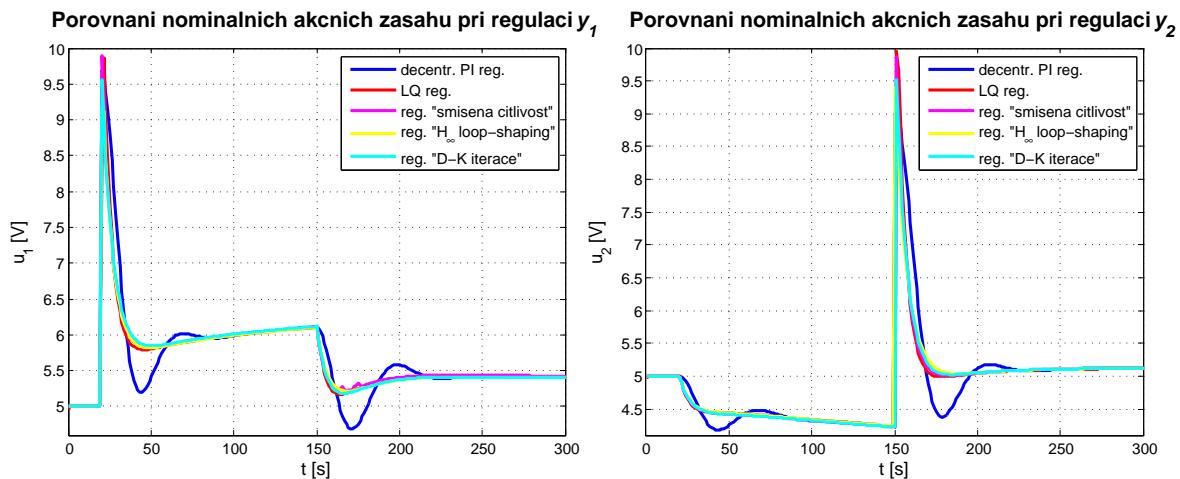
4.4 Porovnání nominálních odezv a zhodnocení výsledků

4.4.1 Minimálně fázový model

Na Obrázku 4.34 je porovnání regulace všech regulátorů a na Obrázku 4.35 je porovnání akčních zásahů regulátorů. V Tabulce 4.1 a 4.2 jsou parametry regulace jednotlivých regulátorů.



Obrázek 4.34: Porovnání nominálních časových odezv pro minimálně fázový model



Obrázek 4.35: Porovnání nominálních akčních zásahů regulátorů pro minimálně fázový model

Regulátor	p [%]	t_s [s]	$ interakce _{max}$ [%]	u_{1max} [V]	ω_{RP}^* [rad/s]
decentr. PI reg.	24	48,5	11,5	9,7	0,075
LQ reg.	0	20,5	0	9,9	0,17
reg. "smíšená citlivost"	1,9	20	0	9,9	0,08
reg. " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"	0	24,8	0	9,2	0,036
reg. "D-K iterace"	3,3	96,1	0	9,6	0,078

Tabulka 4.1: Řízení výšky hladiny v prvním válci pro minimálně fázový model

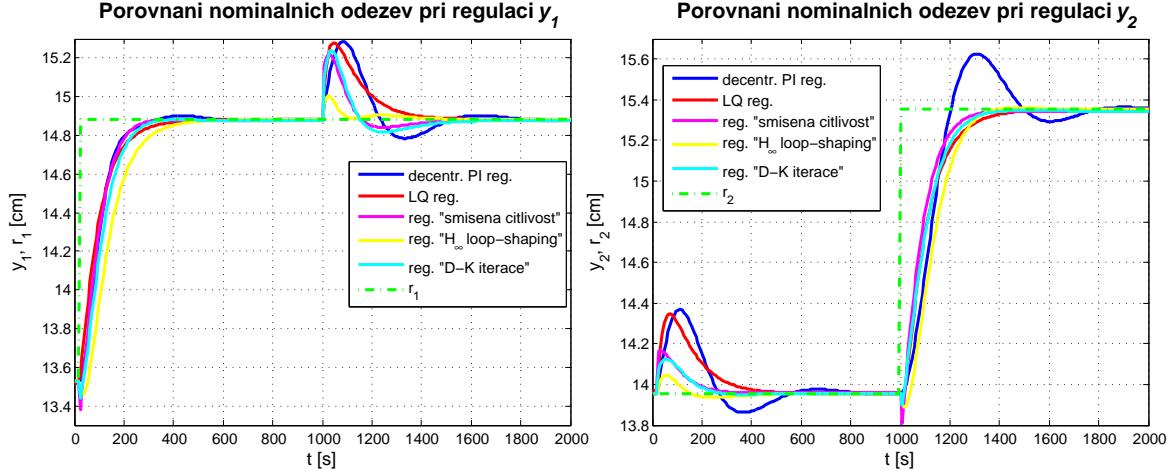
Regulátor	p [%]	t_s [s]	$ interakce _{max}$ [%]	u_{2max} [V]
decentr. PI reg.	25,7	60	0,8	9
LQ reg.	0	21,5	0	9,96
reg. "smíšená citlivost"	2	20	0	9,9
reg. " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"	1,8	24,7	0	9,4
reg. "D-K iterace"	3,4	96,2	0	9,5

Tabulka 4.2: Řízení výšky hladiny ve druhém válci pro minimálně fázový model

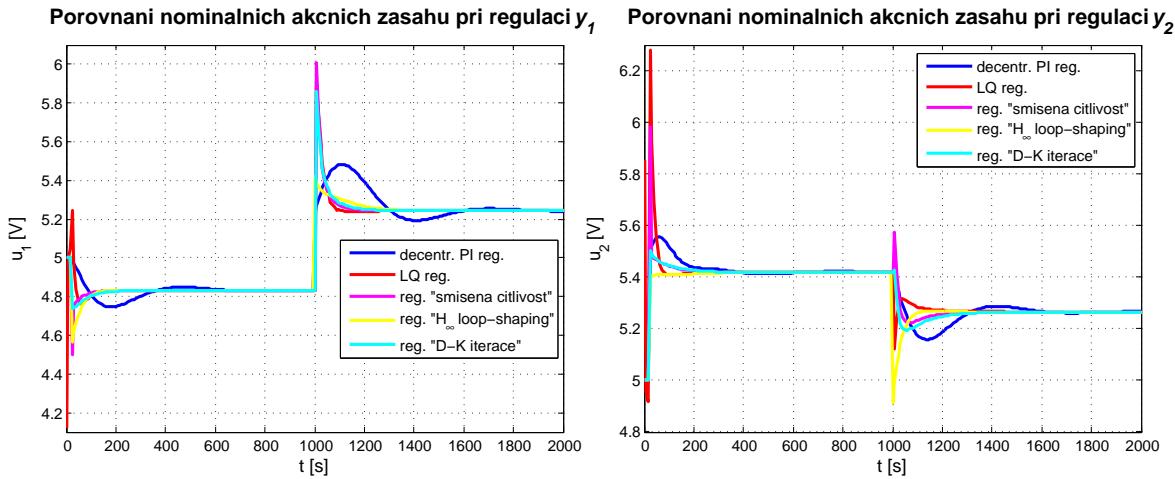
Z ukazatelů v tabulkách a z časových průběhů (nominálních/nenominálních) vychází, že nejlepších výsledků dosáhl LQ regulátor s pozorovatelem. Doba regulace je sice o něco delší než u regulátoru "smíšená citlivost", ale dosahuje výrazně větší (více jak dvojnásobně) šířky pásma ω_{RP}^* pro RP. Pomylné druhé místo zaujal regulátor "smíšená citlivost". Regulátor " \mathcal{H}_∞ loop-shaping" dosahuje podle grafů dobrých výsledků, ale ω_{RP}^* je asi poloviční než u ostatních regulátorů. Regulátor "D-K iterace" dosahuje poněkud pomalé odezvy, ale interakce nejsou viditelné. Decentralizovaný PI regulátor dosahuje rychlejší odezvy, ale jsou viditelné interakce, které jsou nežádoucí. LQ regulátor byl nejméně citlivý na neurčitost (pás kolem nominálního průběhu byl nejužší).

4.4.2 Neminimálně fázový model

Na Obrázku 4.36 je porovnání regulace všech regulátorů a na Obrázku 4.37 je porovnání akčních zásahů regulátorů. V Tabulce 4.3 a 4.4 jsou parametry regulace jednotlivých regulátorů.



Obrázek 4.36: Porovnání nominálních časových odezv pro neminimálně fázový model



Obrázek 4.37: Porovnání nominálních akčních zásahů regulátorů pro neminimálně fázový model

Těžko se dá rozhodnout, který regulátor je nejvhodnější. Co se týče potlačení interakcí, tak jednoznačně nejlepších výsledků dosahuje regulátor " H_{∞} loop-shaping" (interakce jsou několikrát menší než u ostatních regulátorů). Nejrychlejší odezvy a největší ω_{RP}^* dosáhl regulátor "smíšená citlivost". Nejhorší výsledky měl decentralizovaný PI regulátor, který nedosáhl RP a interakce při regulaci byly největší (ale stále v mezích požadavků na regulaci). LQ regulátor byl opět nejméně citlivý na neurčitost (nejvíce robustní), ovšem kvůli horší nominální kvalitě řízení, nebylo dosaženo větší ω_{RP}^* .

Regulátor	p [%]	t_s [s]	$ interakce _{max}$ [%]	u_{1max} [V]	ω_{RP}^* [rad/s]
decentr. PI reg.	1,4	260	29,7	5,5	-
LQ reg.	-5,3	345	29,2	5,9	0,0063
reg. "smíšená citlivost"	-11	242	24,8	6	0,007
reg. " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"	-5	393	9,1	5,4	0,0055
reg. "D-K iterace"	-6,7	269	26	5,9	0,0053

Tabulka 4.3: Řízení výšky hladiny v prvním válci pro neminimálně fázový model

Regulátor	p [%]	t_s [s]	$ interakce _{max}$ [%]	u_{2max} [V]
decentr. PI reg.	19,6	712	29,6	5,6
LQ reg.	-1,6	379	27,1	6,3
reg. "smíšená citlivost"	-10,4	291	15,3	6
reg. " \mathcal{H}_∞ loop-shaping"	-4,8	326	6,6	5,4
reg. "D-K iterace"	-4,1	319	12	5,5

Tabulka 4.4: Řízení výšky hladiny ve druhém válci pro neminimálně fázový model

Kapitola 5

Závěr

V této práci byl použit k regulaci lineární matematický model čtyřválcové vodárny, do kterého byla zavedena neurčitost, aby takovýto model lépe odpovídal chování reálného systému. Dále byla definována kritéria pro ověřování robustnosti a kvality řízení regulačního obvodu pomocí μ -analýzy - analytický nástroj \mathcal{H}_∞ -řízení. Poté byl proveden návrh regulátorů pro minimálně a neminimálně fázový režim modelu. Nejprve byly použity metody klasického návrhu - decentralizovaný PI regulátor a LQ regulátor s pozorovatelem redukovaného rádu. Poté byly představeny a použity robustní \mathcal{H}_∞ -metody syntézy - smíšená citlivost, \mathcal{H}_∞ loop-shaping a D-K iterace. U každé metody byly provedeny simulace na nominálním i perturbovaném modelu a μ -analýza.

Minimálně fázový model vodárny je citlivější na neurčitost (79 %) než neminimálně fázový model (17 %). Na nenominálních simulacích se ale ukazuje, že rozptyl kolem nominálních průběhů je u neminimálně fázového modelu větší než u minimálně fázového modelu, regulátory jsou tedy v tomto případě výrazně citlivější na neurčitost. Z analýzy časových průběhů i μ -analýzy plyne, že nejrobustnější je LQ regulátor. V případě minimálně fázového režimu dosahuje největší šířky pásma robustní kvality řízení a doba regulace je jen o trochu delší než u regulátoru "smíšená citlivost".

U neminimálně fázového modelu nelze jednoznačně rozhodnout, který regulátor byl nejlepší. Nejlépe potlačoval interakce a relativně dobrou dobu regulace měl regulátor " \mathcal{H}_∞ loop-shaping". Největší šířku pásma robustní kvality řízení a nejkratší dobu regulace dosáhl regulátor "smíšená citlivost". Nejhorské výsledky měl decentralizovaný PI regulátor, který nedosáhl robustní kvality řízení a interakce byly při regulaci největší.

I když byl LQ regulátor v obou režimech modelu nejrobustnější, u neminimálně fázového modelu vykazoval horší vlastnosti než \mathcal{H}_∞ -metody. Navíc u volby rychlých vlastních čísel pozorovatele se mohl perturbovaný regulační obvod stát nestabilním (robustní stabilita by nebyla splněna). Decentralizovaný PI regulátor byl strukturou a návrhem nejjednodušší. Interakce byly při regulaci méně potlačeny než u ostatních regulátorů. Z nenominálních průběhů vyplývá, že jeho robustnost byla dobrá, nebyla výrazně horší než u robustních \mathcal{H}_∞ -metod. U této metody také nelze zaručit robustní stabilitu spolu s vyhovující kvalitou řízení. Robustní \mathcal{H}_∞ -metody naopak zaručují robustní stabilitu regulačního obvodu (D-K iterace zaručuje přímo robustní kvalitu řízení) a snoubí v sobě dobrou nominální kvalitu řízení s robustností, protože do návrhu zavádí neurčitost modelu. Tyto metody jsou ovšem výpočetně náročnější a generují regulátory vyššího rádu,

KAPITOLA 5. ZÁVĚR

proto je často třeba jejich řád redukovat.

Literatura

- [1] S.Skogestad and I.Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Chichester, UK: Wiley, second ed., 2005.
- [2] L. Rollins, “Robust control theory.” http://www.ece.cmu.edu/~koopman/des_s99/control_theory/, Spring 1999. [online]. [cit. 10/03/2011].
- [3] J.Zakucia, “Řízení čtyřválcové vodárny,” Master’s thesis, FEL ČVUT, Praha, ČR, January 2009.
- [4] K.H.Johannson, “The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero,” *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol. 8, May 2000.
- [5] J. Raisch, *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. München, BD: Oldenbourg, 1994.
- [6] R. Vadigepalli, E. P. Gatzke, and F. J. D. III, “Robust control of a multivariable experimental four-tank system,” *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 40, no. 8, pp. 1916–1927, 2001.
- [7] E. Rakhshani and J. Sadeh, “Reduced-order observer control for two-area system after deregulation,” *Control and Intelligent Systems*, vol. 38, no. 4, 2010.
- [8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [9] “Matlab - documentation.” <http://www.mathworks.com/help/techdoc/>. [online]. [cit. 20/03/2011].
- [10] J. Melichar, “Decentralizované a hierarchické řízení, učební text.” <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/dhr/DHR%20Ucebni%20texty%202010.pdf>, ZČU Plzeň, 2010. [online]. [cit. 15/03/2011].

Příloha A

Obsah přiloženého CD

K této práci je přiloženo CD, kde jsou zdrojové kódy práce, simulační schémata a výpočetní skripty. CD obsahuje dva adresáře:

- MATLAB_Simulink/: Matlabovské skripty .m, simulační schémata .mdl
- DP_LaTeX/: Elektronická verze diplomové práce v .pdf a zdrojový kod pro zpracování systémem LaTeX.