ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2008 **Jiří Chuman**

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
KATEDRA ŘÍDÍCÍ TECHNIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Aplikace moderních metod řízení na modelu Vodárna TQ

2008 **Jiří Chuman**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou (bakalářskou) práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne 17. 1. 2008 .....

Chuman
.....
Jiří Chuman

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval především mému vedoucímu diplomové práce Ing. Jiřímu Roubalovi, Ph.D. za poskytnutí konzultací při řešení této práce. Dále bych rád poděkoval svým rodičům za podporu na studiu a všem, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout.

Abstrakt

Tato práce se zabývá identifikací modelu vodárna TQ a návrhem kvadraticky optimálního prediktivního MPC (Model Based Predictive Control) regulátoru. Při identifikaci dostaneme všechny parametry potřebné k vytvoření matematického modelu potřebného pro návrh regulačních prvků. Prediktivní regulátor řeší úlohu kvadraticky optimálního řízení, kde návrh regulátoru je formulován jako optimalizační problém. Návrh optimálního regulátoru spočívá v nastavení parametrů vhodně zvoleného optimalizačního kritéria. Vzhledem k tomu, že měření výstupů na reálném systému je zatíženo velkou chybou, použijeme pro odhad stavů rozšířený Kalmanův filtr jako optimálního pozorovatele stavu a přidáme ho do regulační smyčky s regulátorem. Navržené regulační prvky porovnáme s klasickými metodami návrhu, s regulátorem typu PID (proporcionálně-integračně-derivační).

Abstract

This work deals with the identification of watertank model TQ and with the project of quadratic optimal predictive MPC (Model Based Predictive Control) controller . During identification we get all parametrs needed to creating mathematics model which is useful for concept of control members. Predictive controller solves a task quadratic optimal proceeding, where concept of controller is formulated as optimalizating problem. The concept of optimal controller rests in configuration of properly elected optimalizating criteriums of parameters. Considering the fact, that observation outputs of real system is loaded by big error, we will use extended Kalman filter as optimal state observer for assessement of states and we add it to control loop with controller. We compare designed control members with clasic methods of the concept, with type controller PID (proportional-integral-derivative).

České vysoké učení technické v Praze - Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky *Školní rok:* 2006/2007

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Bc. Jiří Chuman

Obor: Technická kybernetika

Název tématu: Aplikace moderních metod řízení na modelu Vodárna TQ

Zásady pro vypracování:

1. Proveďte identifikaci laboratorního modelu a ověřte její správnost.
2. Navrhněte několik pokročilých algoritmů řízení a otestujte je na simulinkovém modelu.
3. Aplikujte pokročilejší řízení na reálný laboratorní model.

Seznam odborné literatury:

[1] Havlena, V.: *Moderní teorie řízení – Doplňkové skriptum*. Praha 2002.
[2] Roubal, J.; Pekař, J.; Pachner, D.; Havlena, V.: *Moderní teorie řízení - Cvičení*. Praha 2005.
[3] Franklin, G.F.; Powel,J.D.; Emami-Naeini,A.: *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 2006.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Jiří Roubal, Ph.D.

Termín zadání diplomové práce: zimní semestr 2006/2007

Termín odevzdání diplomové práce: leden 2008

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

v zast.
prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.
děkan

V Praze dne 21.02.2007

Obsah

1 Úvod **1**

2 Vodárna TQ – popis systému **2**
2.1 Matematický model vodárny ... 3
2.2 Identifikace systému ... 5
2.2.1 Určení konstant k_1, k_c a k_d ... 5
2.2.2 Identifikace konstant k_p a k_v ... 7
2.2.3 Úprava nelineárního modelu ... 8
2.3 Linearizace modelu systému ... 8

3 MPC regulátor **16**
3.1 Numerický tvar MPC regulátoru ... 19
3.2 Analýza návrhu MPC regulátoru ... 19
3.2.1 MPC regulátor vážící změnu řízení ... 23
3.2.2 MPC regulátor s integračním členem ... 24
3.2.3 MPC regulátor s diskrétním integrátorem ... 27

4 Regulace vodárny TQ **34**
4.1 PID regulátor ... 34
4.2 Návrh MPC regulátoru ... 36
4.3 Porovnání MPC regulátoru s PID regulátorem ... 44
4.4 Návrh MPC regulátoru s Kalmanovým filtrem ... 46
4.4.1 Kalmanův filtr ... 46
4.4.2 Formulace problému ... 46
4.4.3 Rozšířený Kalmanův filtr ... 47

6 Závěr **51**

Literatura **54**

A Obsah přiloženého CD **55**

Seznam obrázků

2.1 Obecné schéma Vodárny TQ 2
2.2 Vodárna TQ – reálný fyzikální model 3
2.3 Simulinkové schéma nelineárního modelu vodárny 5
2.4 Statická převodní charakteristika čerpadla 6
2.5 Převodní charakteristika snímače hladiny h_1 6
2.6 Převodní charakteristika snímače hladiny h_2 7
2.7 Lineární a nelineární model vodárny v Simulinku v Matlabu 10
2.8 Změna vstupního napětí u_{10} = 5,7 V 11
2.9 Odezva hladiny v prvním válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm 11
2.10 Odezva hladiny v druhém válci na změnu vstupu pro pracovní bod u10 = 5,7 V, h10 = 12,2 cm, h20 = 5 cm 12
2.11 Změna vstupního napětí u_{10} = 5,985 V 12
2.12 Odezva hladiny v prvním válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm 13
2.13 Odezva hladiny v druhém válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm 13
2.14 Přechodové charakteristiky lineárních modelů s přenosy G_{P1} a G_{P2} 14
2.15 Vliv rozběhu čerpadla 15
2.16 Vliv rozběhu čerpadla v detailu 15

3.1 Simulační schéma systému s MPC regulátorem 21
3.2 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem vážící amplitudu akčního zásahu 21
3.3 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem vážící amplitudu akčního zásahu 22
3.4 Průběh regulační odchylky 22
3.5 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem vážící změnu akčního zásahu 23
3.6 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem vážící změnu akčního zásahu 24
3.7 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a integrátorem vážící amplitudu akčního zásahu 25
3.8 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a integrátorem vážící amplitudu akčního zásahu 25
3.9 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a integrátorem vážící změnu akčního zásahu 26
3.10 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a integrátorem vážící změnu akčního zásahu 26
3.11 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu 28
3.12 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu 29

3.13 Průběh regulační odchylky s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu 29
3.14 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu 30
3.15 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu 31
3.16 Průběh regulační odchylky s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu 31
3.17 Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky při omezení rychlosti změny akční veličiny 32
3.18 Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky při omezení rychlosti změny akční veličiny 32

4.1 Regulační obvod vodárny TQ s PID regulátorem 35
4.2 Akční zásah PID regulátoru 35
4.3 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s PID regulátorem 35
4.4 Regulační obvod vodárny TQ s MPC regulátorem 36
4.5 Akční zásah s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$ 37
4.6 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$ 37
4.7 Akční zásah s MPC regulátorem vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$, $\Delta u=10$ 38
4.8 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$, $\Delta u=10$ 38
4.9 Akční zásah s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ a $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{se}}=10^1$ 39
4.10 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ a $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{se}}=10^1$ 39
4.11 Porovnání akčního zásahu s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ 40
4.12 Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ 40
4.13 Akční zásah s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$, $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{se}}=10^{-1,57}$ 41
4.14 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$, $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{se}}=10^{-1,57}$ 41
4.15 Porovnání akčního zásahu s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$ 42
4.16 Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$ 42

4.17 Akční zásah s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny pro $\boldsymbol{Q}=10^3$ a $\boldsymbol{Q_{se}}=10^0$ 43
4.18 Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny pro $\boldsymbol{Q}=10^3$ a $\boldsymbol{Q_{se}}=10^0$ 43
4.19 Průběh akčního zásahu regulátorů 44
4.20 Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci 44
4.21 Průběh akčního zásahu regulátorů 45
4.22 Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci 45
4.23 Regulační obvod vodárny TQ s MPC regulátorem a pozorovatelem stavu 48
4.24 Akční zásah s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící amplitudu akční veličiny 49
4.25 Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící amplitudu akční veličiny 49
4.26 Akční zásah s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící změnu akční veličiny 50
4.27 Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící změnu akční veličiny 50

5.1 Průběh akčního zásahu regulátorů 52
5.2 Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátory a PID regulátorem 52

Kapitola 1

Úvod

Pod pojmem regulace se skrývá mnoho významů. S tímto pojmem se setkáváme v různých oborech a má jeden společný význam a to je udržování, usměrňování stálých hodnot objektu. Objektem může být jak živý organismus, subjekt a nebo technologický proces. V přírodě se vyskytuje velké množství přírodním pochodů, které představují regulační proces, intuitivně o nich víme, ale nepřemýšlíme o nich. Přemýšlet o nich až v případě, dostaneme-li za úkol něco regulovat a nebo řídit. My se zaměříme na regulaci vodní hladiny ve dvou nádržích.

Úkolem této práce je identifikace modelu vodárna TQ a následný návrh pokročilých metod řízení pro zadaný model. Model je umístěn v laboratoři K26 katedry řídicí techniky fakulty elektrotechnické. Pro návrh regulátorů vycházíme z matematického modelu systému, který získáme identifikací modelu popsaného v kapitole 2. Po získání všech parametrů matematického modelu provedeme linearizaci ve zvoleném pracovním bodě a porovnáme vytvořený matematický model s reálným modelem.

Po identifikaci dostaneme stavový popis systému, který využijeme pro návrh MPC regulátoru (prediktivního) [8], [9], popsaný v kapitole 3. Tento regulátor patří do oblasti kvadraticky optimálního řízení, kde návrh regulátoru je formulován jako optimalizační problém. Návrh optimálního regulátoru spočívá v nastavení parametrů optimalizačního kritéria. V teorii řízení je nejčastěji používané kvadratické kritérium, protože úlohy jsou poměrně snadno řešitelné a regulátory mají dobré vlastnosti i z hlediska robustnosti. Volba tvaru kritéria závisí na požadované úloze řešení a je třeba ho formulovat tak, aby optimalizační úloha byla řešitelná v reálném čase, a aby vlastnosti regulátoru odpovídaly praktickému použití. V této kapitole se také zaměříme na analýzu návrhu při použití na nelineárním systému.

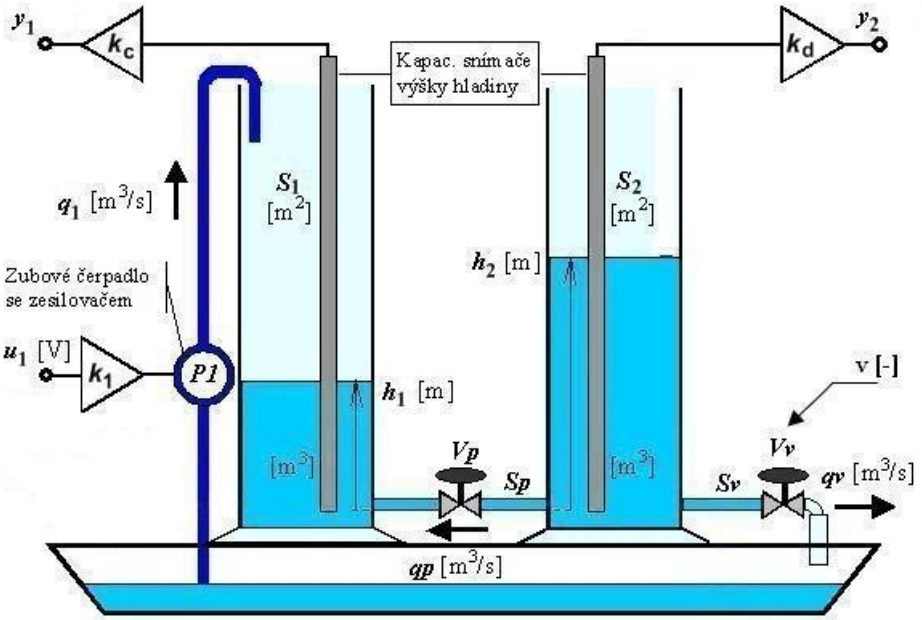
Protože výstupy reálného modelu jsou silně ovlivněny šumem a akční zásah navržených regulátorů je silně ovlivněn poruchou, navrhneme rozšířený Kalmanův filtr [8], [14] jako optimální pozorovatel stavu pro nelineární systémy. Touto problematikou se budeme zabývat v kapitole 4. Při návrhu je důležité mít dobře identifikovaný model, aby odhad stavů systému Kalmanovým filtrem byl přesný a lze ho použít na reálném modelu vodárny. V této kapitole také porovnáme výsledky všech navržených regulátorů s PID regulátorem na reálném modelu a porovnáme použití MPC regulátoru s Kalmanovým filtrem.

Pro modelování systému a návrhu regulačních prvků budeme používat Realtime Toolbox v Matlabu, kterým je připojen model k PC a Simulink pro Matlab. To vše od firmy MathWorks.

Kapitola 2

Vodárna TQ – popis systému

Fyzikální model Vodárna TQ na obr. 2.1 představuje systém pro řízení výšek hladin h_1 a h_2 ve dvou zásobnících o konstantním průřezu $S_1 = S_2$ při proměnném přítoku a odběru kapaliny. Přítok kapaliny do prvního (levého) zásobníku je ovládán vstupním čerpadlem, z prvního zásobníku odtéká kapalina přepouštěcím ventilem V_p do druhého zásobníku, odtud je vypouštěna výtokovým ventilem V_v ven ze systému.



Obr.2.1: Obecné schéma Vodárny TQ

Výšky obou hladin h_1 a h_2 jsou snímány ultrazvukovými snímači a převáděny na napěťové signály, které lze měřit po převedení A/D převodníkem RT Toolboxem Matlabu jako bezrozměrná čísla. . Výstupem ze systému je výška hladin h_1 a h_2 v zásobnících. Zásobníky jsou opatřeny stupnicí a proto lze hladinu odečítat přímo na fyzikálním modelu obr. 2.2 v centimetrech.

Vstupem do systému je napětí u_1[V] v rozsahu $\langle 0;10 \rangle$ V ovládající zesilovač motoru čerpadla. Tuto hodnotu lze nastavit zadáním bezrozměrného čísla v rozsahu $\langle 0;1 \rangle$ pomocí RT Toolboxu Matlabu [1], kde je převedeno D/A převodníkem a přivedeno na zesilovač k_1 motoru čerpadla.

Pro základní popis systému budeme předpokládat ideální model vodárny. Čerpadlo přivádí kapalinu do prvního válce, kde na základě toho dochází ke zvyšování výšky hladiny h_1. Z první nádrže přitéká kapalina přepouštěcím ventilem V_p do druhé nádrže, ve které měříme výšku hladiny h_2. Za běžného provozu je výška v prvním zásobníku větší než ve druhém. Výtok z druhého válce je řízen výpustním ventilem V_v. Oba dva ventily jsou ovládány ručně. Přepouštěcí ventil lze popsat koeficientem k_p, ve kterém je zahrnuta plocha ventilu, tvarový koeficient ventilu, viskozita kapaliny (v našem případě vody) a ideální rychlost kapaliny. Stejným způsobem lze popsat i výtokový ventil koeficientem k_v. Oba koeficienty určíme experimentálně měřením.

Pokud bude vstupní napětí zesilovače čerpadla konstantní a na model vodárny nebudou působit žádné další vnější vlivy, dojde po odeznění přechodových dějů k uvedení systému do rovnovážného stavu – pracovního bodu, kdy výšky hladin v obou nádržích se nemění a přítok z první nádrže se rovná odtoku z druhé nádrže. Detailnější popis lze nalézt např. v [1]. Obr. 2.1 byl převzat ze zadání laboratorní úlohy Vodárna TQ z předmětu X35SRI (FUKA, J. et al., http://dce.felk.cvut.cz/sari/).

Obr. 2.2: Vodárna TQ – reálný fyzikální model

2.1 Matematický model vodárny

V předchozím odstavci jsme popsali námi zkoumaný systém a na základě toho odvodíme matematický model. Tento model byl vytvořen v rámci bakalářské práce viz [2], ale provedeme ověření pro získání přesnějšího modelu. K vytvoření popisu vyjdeme ze zákona zachování hmotnosti a zákona zachování energie pro hydraulické systémy [3].

Pro objemové toky q_1[m^3/s], q_p[m^3/s] a q_v[m^3/s] podle [3] platí

$$q_1(t) = k_1 u_1(t), \tag{2.11}$$

$$q_p(t) = k_p \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \qquad \text{pro} \qquad h_1(t) > h_2(t), \tag{2.12}$$

$$q_v(t) = k_v v(t) \sqrt{h_2(t)}, \tag{2.13}$$

kde k_1[m^3/Vs] je konstanta čerpadla, u_1[V] je vstupní napětí a v[-] představuje otevření výstupního ventilu V_v. Pro hodnotu $v = 0$ je ventil zcela uzavřen a pro hodnotu $v = 1$ je ventil otevřen. Význam konstant k_p a k_v byl vysvětlen v předchozí kapitole. Pro výstupní hladiny h_1[-] a h_2[-] platí

$$y_1(t) = k_c h_1(t) + o_1,$$
$$y_2(t) = k_d h_2(t) + o_2,$$

kde y_1[cm], y_2[cm] jsou výstupní hladiny v nádržích a konstanty k_c[cm] a k_d[cm] přepočítávají bezrozměrné výšky hladin odečtené ze senzorů jednotlivých zásobníků na hodnotu udávanou přímo na stupnici reálného modelu v centimetrech. Proměnné o_1[cm] a o_2[cm] jsou offsety obou snímačů hladin. Jedná se o poruchové veličiny, které je třeba před každým měřením zohlednit na reálném modelu.

Nyní vyjádříme změnu objemového toku pro obě nádrže takto

$$\frac{\Delta V_1(t)}{\Delta t} = q_1(t) - q_p(t),$$
$$\frac{\Delta V_2(t)}{\Delta t} = q_p(t) - q_v(t).$$

Pro $\Delta t \to 0$ lze rovnice přepsat na diferenciální tvar. Dosadíme-li za objemové toky z rovnic (2.11), (2.12) a (2.13) a konstantním průřezy obou nádrží započítáme do konstant k_p a k_v, dostáváme stavové rovnice systému pro výšku hladin

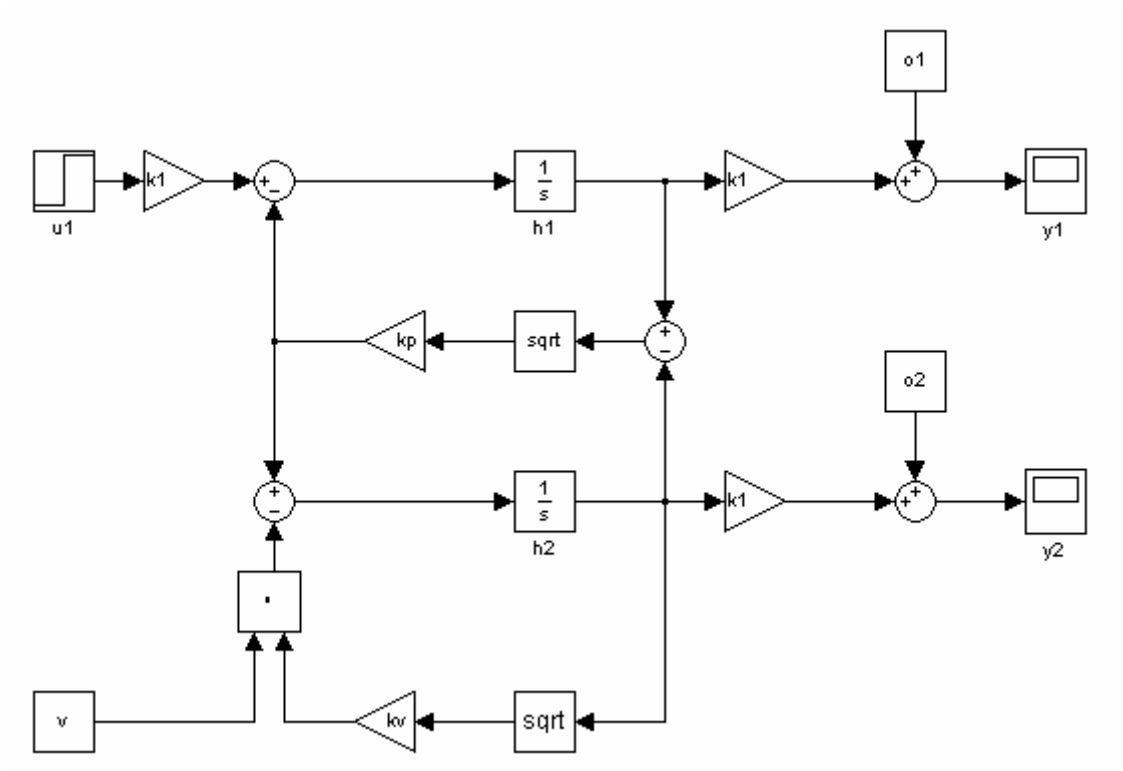
$$\dot{h}_1(t) = -k_p \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + k_1 u_1(t), \tag{2.14}$$

$$\dot{h}_2(t) = k_p \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_v v(t) \sqrt{h_2(t)}, \tag{2.15}$$

$$y_1(t) = k_c h_1(t) + o_1, \tag{2.16}$$

$$y_2(t) = k_d h_2(t) + o_2. \tag{2.17}$$

Stavové rovnice nám říkají, že se jedná o nelineární model druhého řádu se vstupním vektorem $\boldsymbol{u} = [u_1 \ v]^T$, stavovým vektorem $\boldsymbol{x} = [h_1 \ h_2]^T$ a výstupním vektorem $\boldsymbol{y} = [y_1 \ y_2]^T$. Pomocí těchto stavových rovnic můžeme zkonstruovat matematický model pomocí Simulinku v Matlabu, viz obr. 2.3.



Obr. 2.3: Simulinkové schéma nelineárního modelu vodárny

Pro ověření správnosti námi vytvořeného modelu musíme určit konstanty k_1, k_c, k_d, k_p a k_v tak, aby matematický model odpovídal modelu reálnému. Určení konstant k_1, k_c, k_d, k_p a k_v bude popsáno v další kapitole.

2.2 Identifikace systému

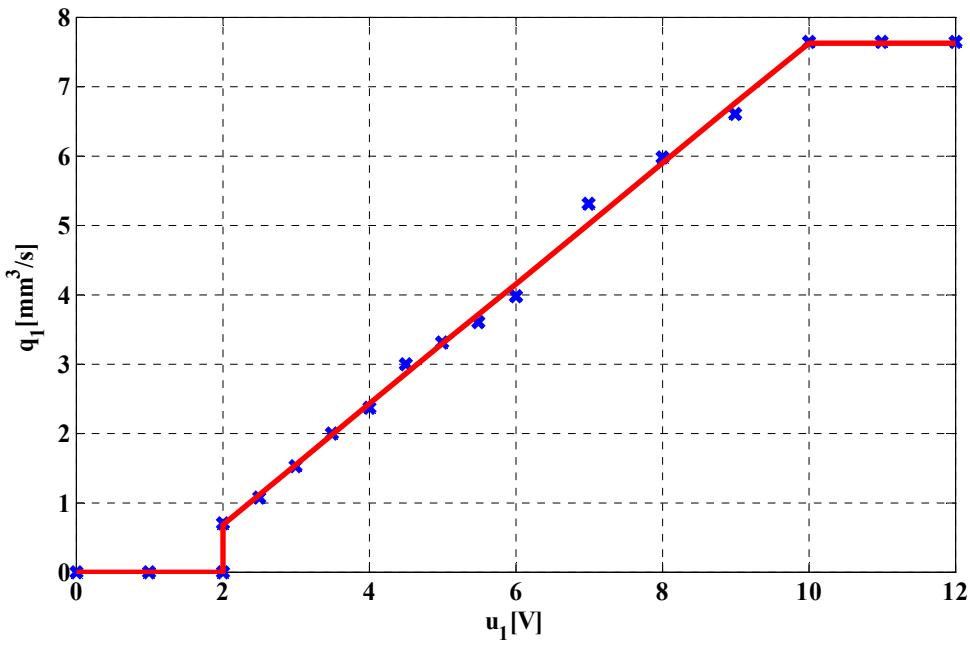
V této kapitole popíšeme způsob určení konstant nelineárního modelu. Při identifikaci se na model díváme jako na systém s jedním vstupem u_1 a jedním výstupem y_2, jelikož nás zajímá výška ve druhém zásobníku h_2. Námi vytvořený nelineární model porovnáme s reálným modelem v prostředí Simulink v Matlabu, kde můžeme porovnat vlastnosti námi vytvořeného matematického modelu s modelem reálným.

2.2.1 Určení konstant k_1, k_c a k_d

Pro určení konstanty čerpadla k_1 musíme zjistit závislost mezi množstvím přitékající kapaliny na vstupním napětí čerpadla. Množství přitékající kapaliny určíme jako poměr změny hladiny v prvním zásobníku za určitou časovou jednotku.

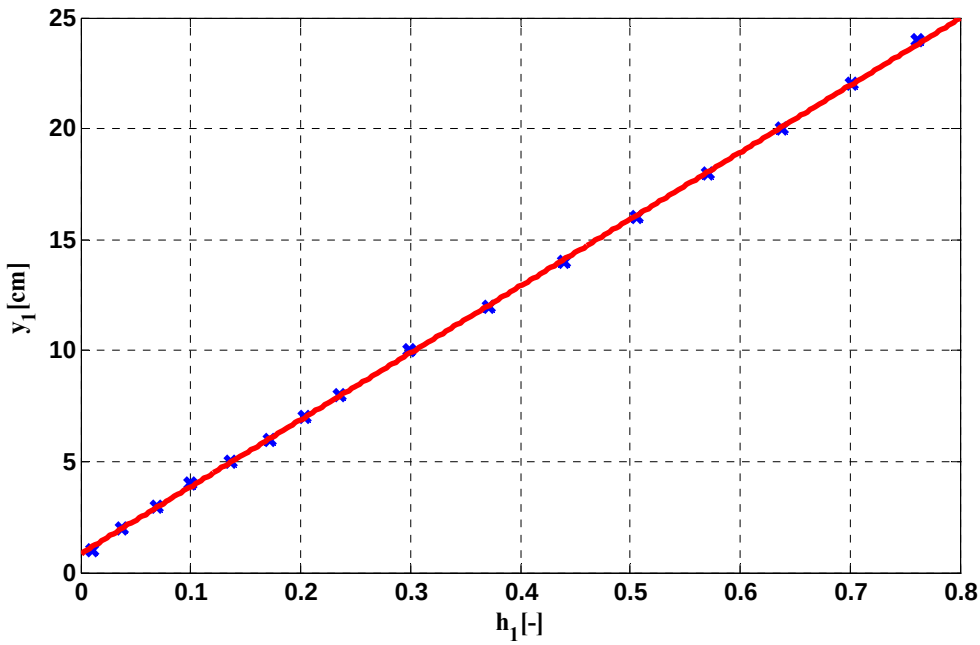
Při měření se ukázalo, že čerpadlo má pásmo necitlivosti v intervalu $\langle 0;2 \rangle$ V . Ze statické převodní charakteristiky, kterou jsme aproximovali lineární regresní přímkou obr. 2.4, jsme z rovnice regresní přímky zjistili hodnotu konstanty čerpadla

$$k_1 = 0{,}0280 \text{ m}^3/\text{Vs}.$$

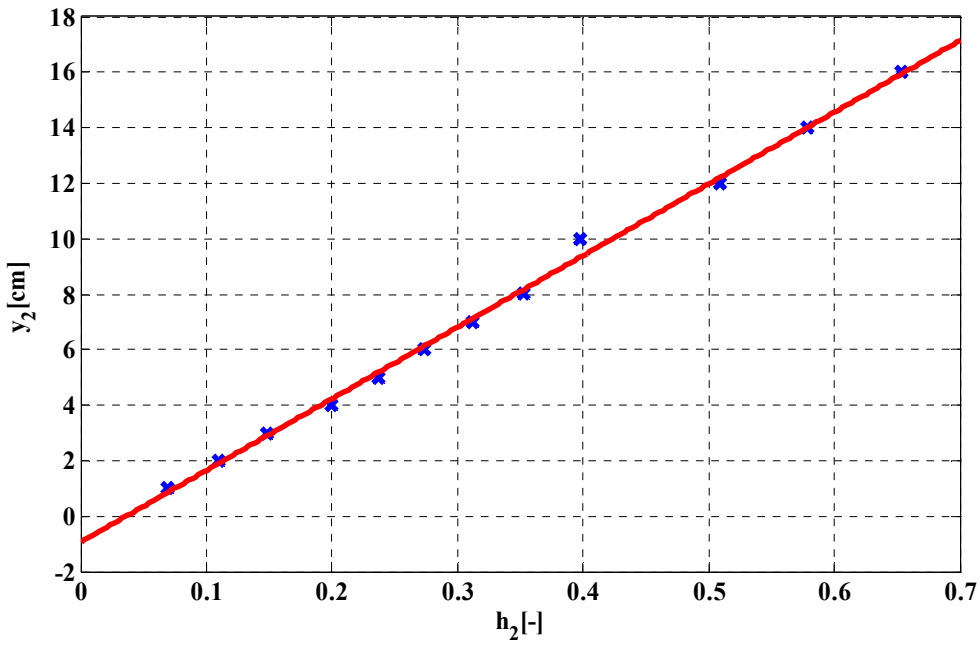


Obr. 2.4: Statická převodní charakteristika čerpadla

Převodní charakteristika snímačů hladin h_1 a h_2 udává závislost bezrozměrné výšky hladiny odečtené pomocí snímačů na výšce hladiny odečtené na stupnici reálného modelu. Při jejím změření se ukázalo, že vodárna má nenulové hladiny pro nulové hodnoty odečtené pomocí snímačů. Proto je nutné tuto hodnotu zohlednit v konstantách o_1 a o_2 pro obě hladiny. Toho lze dosáhnout proložením převodní charakteristiky lineární regresní přímkou viz obr. 2.5 a obr.2.6.



Obr. 2.5: Převodní charakteristika snímače hladiny h_1



Obr. 2.6: Převodní charakteristika snímače hladiny h_2

Po této úpravě dostáváme konstanty obou snímačů

$$k_c = 31{,}541 \text{ cm}, \quad o_1 = 0{,}86 \text{ cm},$$
$$k_d = 26{,}051 \text{ cm}, \quad o_2 = -0{,}93 \text{ cm}.$$

2.2.2 Identifikace konstant k_p a k_v

Konstanty lze identifikovat dvěma způsoby měření. Pro obě měření nastavíme přepouštěcí ventil V_p na hodnotu 5 a odtokový ventil V_v na hodnotu 3.

První způsob je měření n rovnovážných stavů u_{10}, h_{10} , h_{20}. Po dosazení do rovnic (2.14) a (2.15) vypočítáme pro každý rovnovážný stav konstanty k_{pi} a k_{vi} a následně určíme jejich průměr pro určení výsledných konstant k_p a k_v.

$$k_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{pi}}{n}, \qquad k_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_{vi}}{n}.$$

Druhá metoda spočívá v měření výtokových charakteristik. Pro identifikaci konstanty k_p vyprázdníme druhou nádrž, naplníme první při uzavřených ventilech V_p a V_v. Poté vypneme čerpadlo (u_1 = 0) a nastavíme přepouštěcí ventil V_p do polohy 5 a měříme průběh výšek hladin h_1 a h_2. Z naměřených hodnot určíme konstantu k_p.

Pro určení konstanty k_v budeme postupovat obdobným způsobem. Napustíme druhou nádrž, uzavřeme ventil V_p a ventil V_v otevřeme do polohy 3. Změříme průběh výšky hladiny h_2 a po dosazení do rovnice (2.15) pro k_p=0 dostaneme hledanou konstantu k_v.

Pro náš systém dostáváme

$$k_p = 0{,}0360 \text{ m}^{2,5}/\text{s},$$
$$k_v = 0{,}0152 \text{ m}^{2,5}/\text{s}.$$

Výhodou první metody je její větší přesnost oproti druhé metodě, ale za cenu větší časové náročnosti. Druhá metoda je podstatně rychlejší a výsledné konstanty lze vyladit na samotném matematickém modelu v Simulinku tak, aby odpovídaly skutečnému modelu.

2.2.3 Úprava nelineárního modelu

Po dosazení konstant do nelineárního modelu a porovnání s reálným systémem zjistíme, že námi vytvořený model neodpovídá skutečnému systému vodárny. Výsledné průběhy budou od sebe vzájemně posunuty a i experimentálním laděním konstant nedosáhneme požadovaných vlastností nelineárního modelu s reálným.

To je zapříčiněno tím, že při identifikaci jsme předpokládali, že všechny prvky vodárny jsou ideální. Experimentálně bylo zjištěno, že otvor pro výtok z druhé nádrže je příliš malý a dochází k jeho zahlcení a voda z něho nevytéká rovnoměrně. Proto je nutné počítat s tím, že výpustní ventil V_v se chová jako "zdroj odtoku" viz [2].

Tuto změnu musíme zahrnout i do stavové rovnice (2.15). Zdroj odtoku budeme aproximovat konstantou h_{2v}, jejíž hodnota byla experimentálně stanovena na h_{2v}=0,8. Stavová rovnice (2.15) se změní na

$$\dot{h}_2(t) = k_p\sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - k_v v(t)\sqrt{h_2(t) + h_{2v}}\,.$$

Změna stavové rovnice se samozřejmě projeví i na výsledném matematickém modelu vytvořeném v Simulinku v Matlabu. Po této úpravě dostaneme nelineární model odpovídající reálnému systému. Hodnota konstanty h_{2v} závisí na otevření ventilu V_v.

2.3 Linearizace modelu systému

Po identifikaci nelineárního systému určíme pracovní bod, ve kterém provedeme linearizaci modelu a najdeme stavové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ lineárního modelu. Pomocí těchto matic vyjádříme přenos mezi vstupním napětím čerpadla a výškou hladiny ve druhé nádrži h_2.

Lineární model systému dostaneme linearizací nelineárního modelu v námi zvoleném pracovním bodě u_{10}, h_{10} , h_{20}, v_0. Pracovní bod nevolíme v extrémních stavech systému, ale volíme takové hodnoty, kterých je systém schopen dosáhnout za běžných provozních podmínek. Linearizaci nelineárního modelu provedeme podle [4], [5] a vysledné rovnice dostáváme ve tvaru

$$\Delta\dot{h}_1(t) = -\frac{k_p}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}\Delta h_1(t) + \frac{k_p}{2\sqrt{h_{10} - h_{20}}}\Delta h_2(t) + k_1\Delta u(t), \qquad (2.18)$$

$$\Delta\dot{h}_2(t) = \frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}\Delta h_1(t) - \left(\frac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} + \frac{k_v v_0}{2\sqrt{h_{20}+h_{2v}}}\right)\Delta h_2(t), \tag{2.19}$$

$$\Delta y_1(t) = k_c \Delta h_1(t), \tag{2.20}$$

$$\Delta y_2(t) = k_d \Delta h_2(t), \tag{2.21}$$

kde $\Delta h_1(t) = h_1(t) - h_{10}$, $\Delta h_2(t) = h_2(t) - h_{20}$ a $\Delta u(t) = u_1(t) - u_{10}$.

Při linearizaci nelineárního modelu bereme v úvahu konstantní nastavení výstupního ventilu V_v, proto v rovnici (2.19) neuvažujeme proměnnou $v(t)$ za proměnnou, ale za konstantu v_0. Konstantu pro otevření ventilu v_0 nebudeme dále uvádět jako samostatný vstup, ale zahrneme ji do konstanty k_p.

Z předchozích rovnic dostáváme matici systému $\boldsymbol{A}$ a matici řízení $\boldsymbol{B}$ pro vnitřní popis systému

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & \dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} \\ \dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} & -\dfrac{k_p}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}} - \dfrac{k_v v_0}{2\sqrt{h_{20}+h_{2v}}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Výstupní matice mají tvar

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & k_d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Z těchto matic je možné vyjádřit vnější popis systému pomocí přenosu mezi vstupním napětím čerpadla u_1 a výstupní výškou hladiny h_2. Přenosová funkce $\boldsymbol{G}(s)$ je definována jako

$$G(s) = \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta U_1(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{C}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})} + \boldsymbol{D}, \tag{2.23}$$

$$G(s) = \frac{\dfrac{k_d k_p k_1}{2\sqrt{h_{10}-h_{20}}}}{s^2 + \left(\dfrac{k_p}{\sqrt{h_{10}-h_{20}}} + \dfrac{k_v v_0}{2\sqrt{h_{20}+h_{2v}}}\right)s + \dfrac{k_p k_v v_0}{4\sqrt{h_{20}+h_{2v}}\sqrt{h_{10}-h_{20}}}}.$$

Dosadíme-li do vzorce (2.23) pracovní bod u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm, dostaneme výsledný přenos ve tvaru

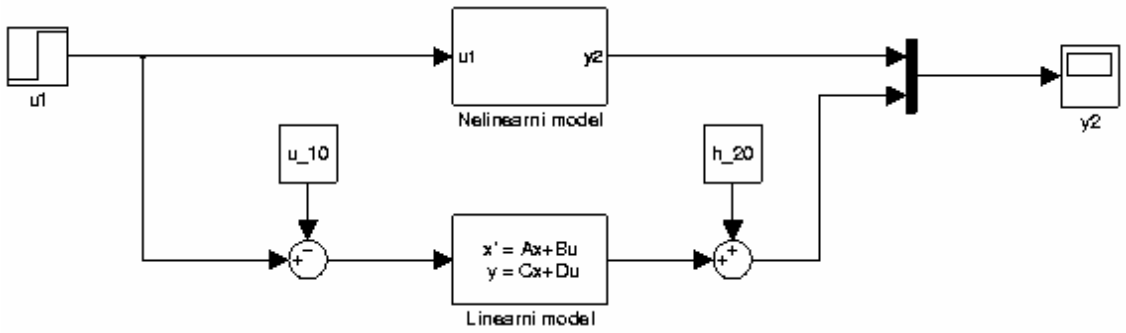
$$G_{P_1}(s) = \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{90,616}{3046,9s^2 + 272,97s + 1}. \tag{2.24}$$

Pro pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm dostaneme výsledný přenos ve tvaru

$$G_{P_2}(s) = \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{95,104}{3353,5s^2 + 286,49s + 1}. \tag{2.25}$$

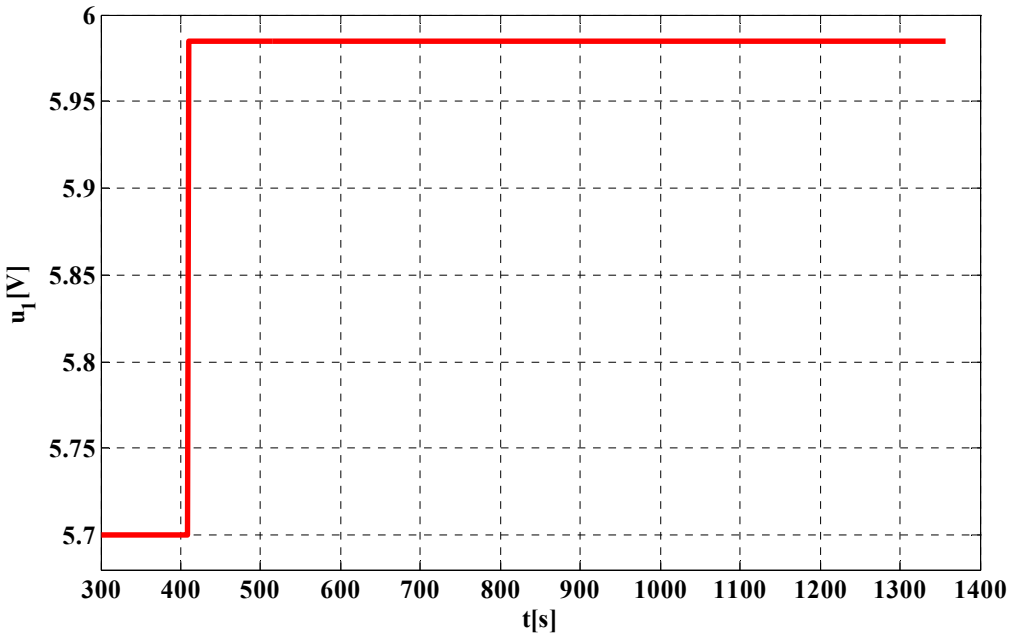
Z rovnic (2.24) a (2.25) je patrno, že přenosy pro různé pracovní body se od sebe liší. Každý přenos charakterizuje systém pouze v jednom pracovním bodě. Ve výsledných přenosech je také započtena konstanta k_d, kterou můžeme výsledný přenos vydělit a počítat v bezrozměrných jednotkách. Tuto konstantu zohledníme v samotném výstupu při měření výšek hladin v centimetrech.

Pro porovnání jsme zvolili dva pracovní body. Lineární model v těchto pracovních bodech budeme realizovat pomocí Simulinku v Matlabu obr. 2.7 a porovnáme jeho vlastnosti s nelineárním modelem a skutečným systémem.

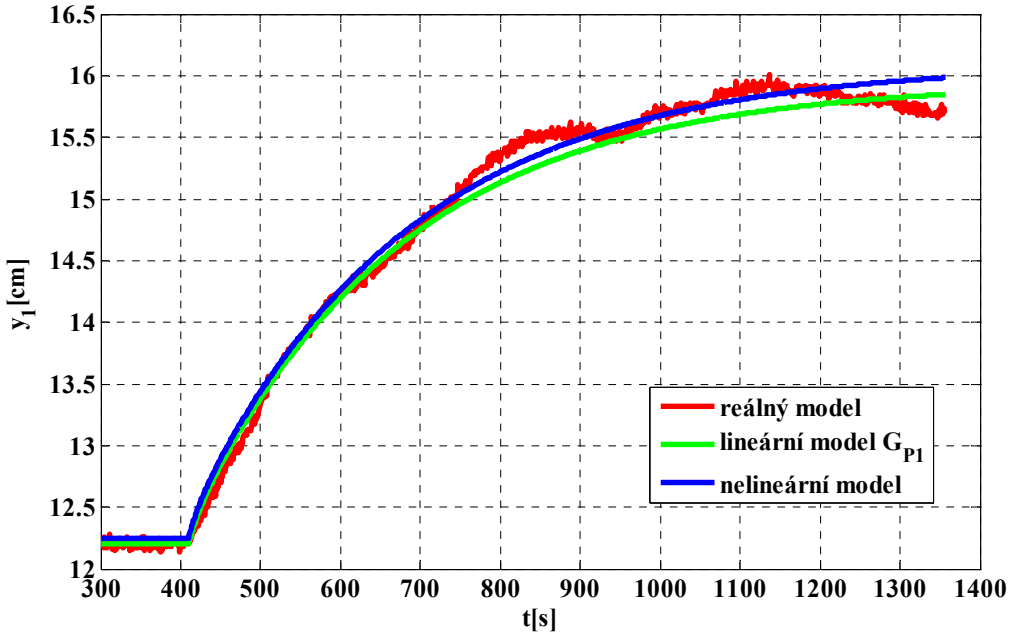


Obr. 2.7: Lineární a nelineární model vodárny v Simulinku v Matlabu

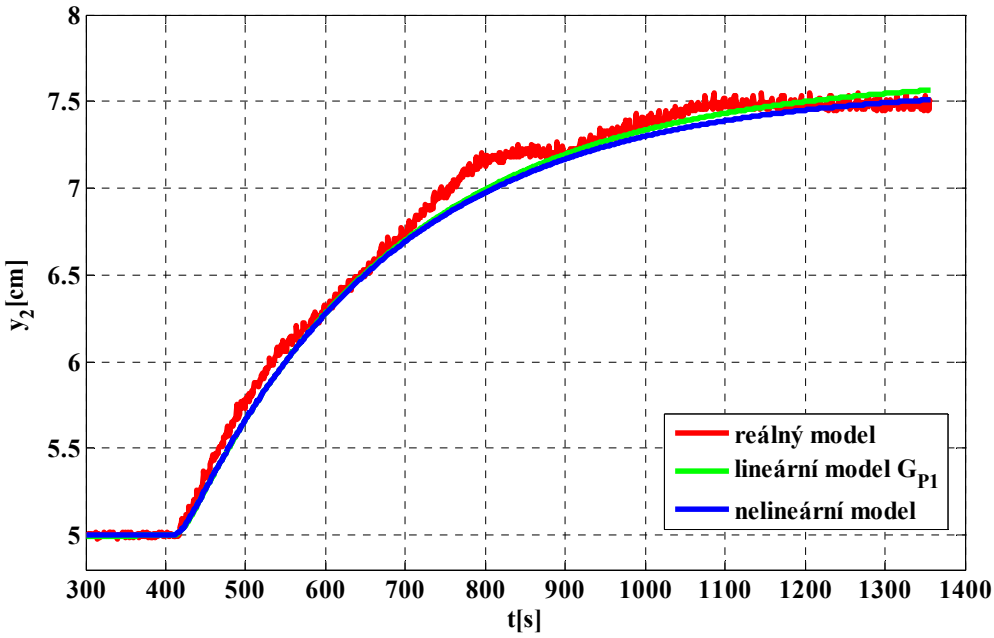
Výsledky na odezvu pro změnu vstupního napětí o 5% z pracovního bodu u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm lze porovnat na následujících obrázcích. Porovnávat budeme výstupní hladiny h_1 a h_2 v obou nádržích.



Obr. 2.8: Změna vstupního napětí u_{10} = 5,7 V

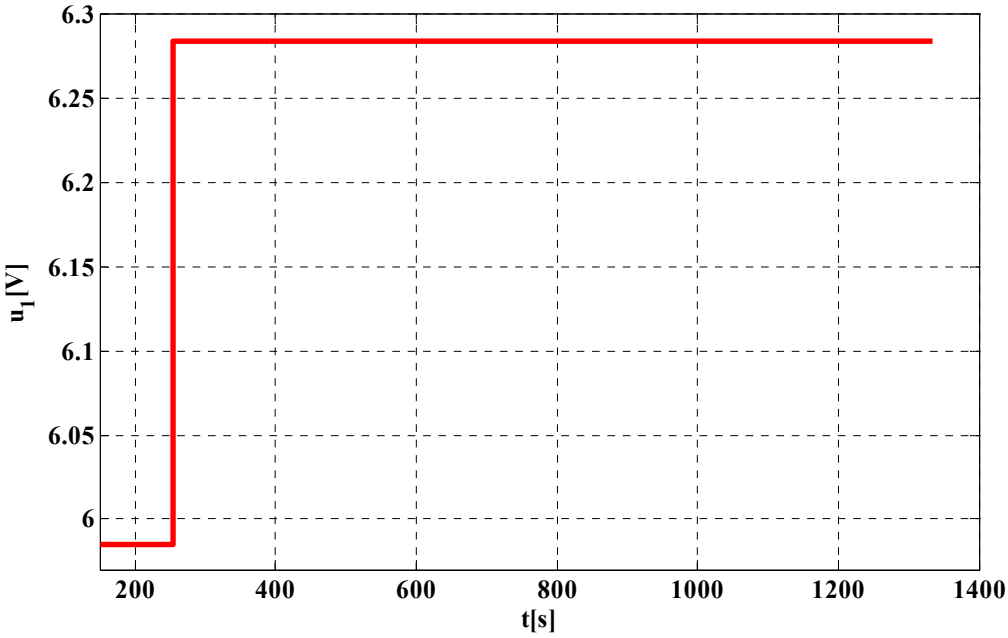


Obr. 2.9: Odezva hladiny v prvním válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm

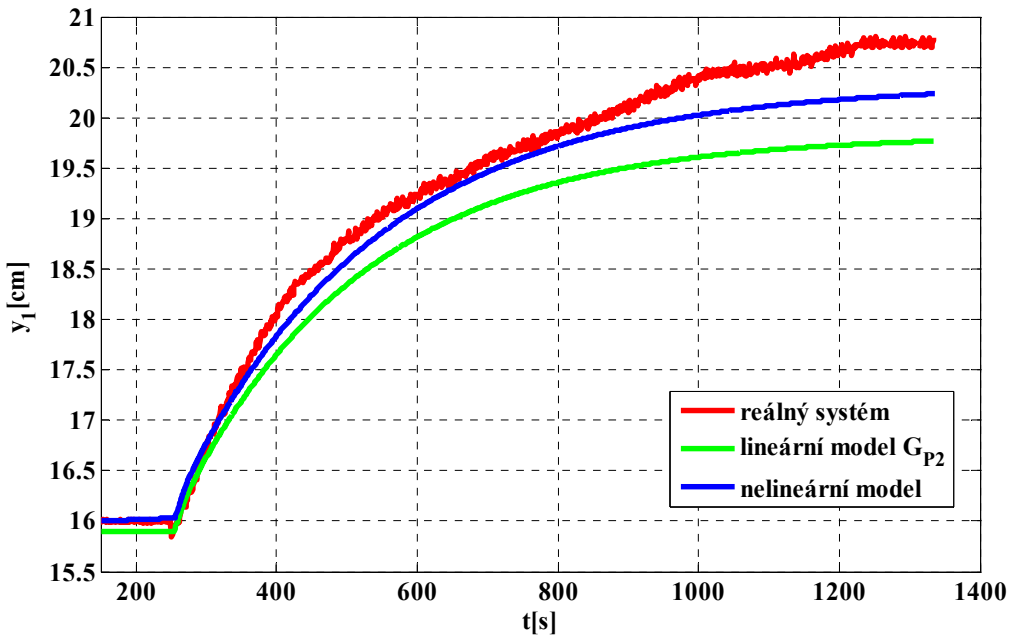


Obr. 2.10: Odezva hladiny v druhém válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm

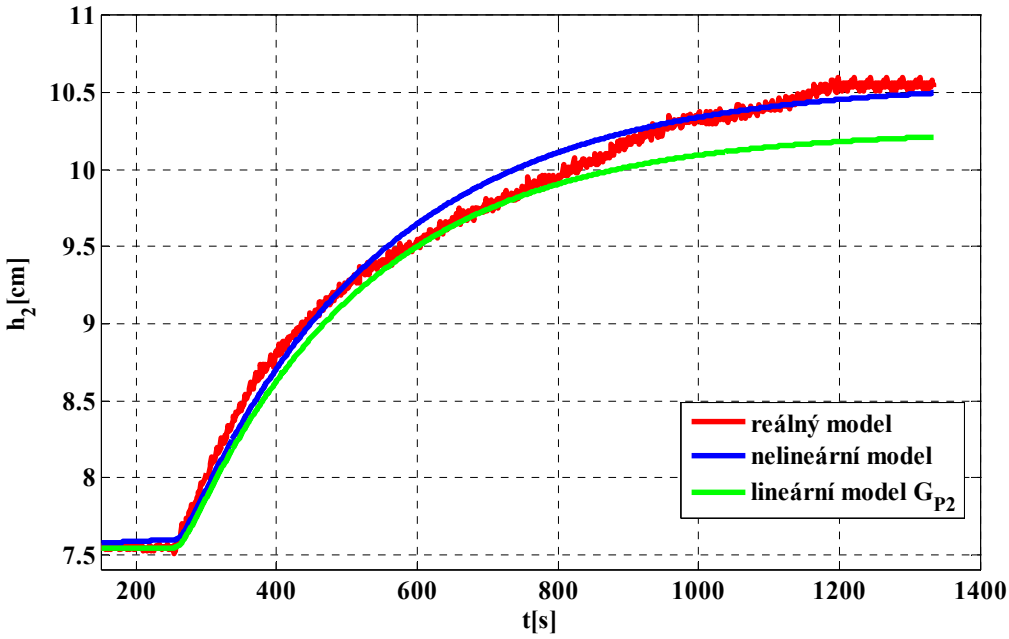
Nyní provedeme porovnání pro jiný pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm. Porovnání budeme provádět opět pro změnu vstupního napětí o 5% z pracovního bodu u_{10}.



Obr. 2.11: Změna vstupního napětí u_{10} = 5,985 V

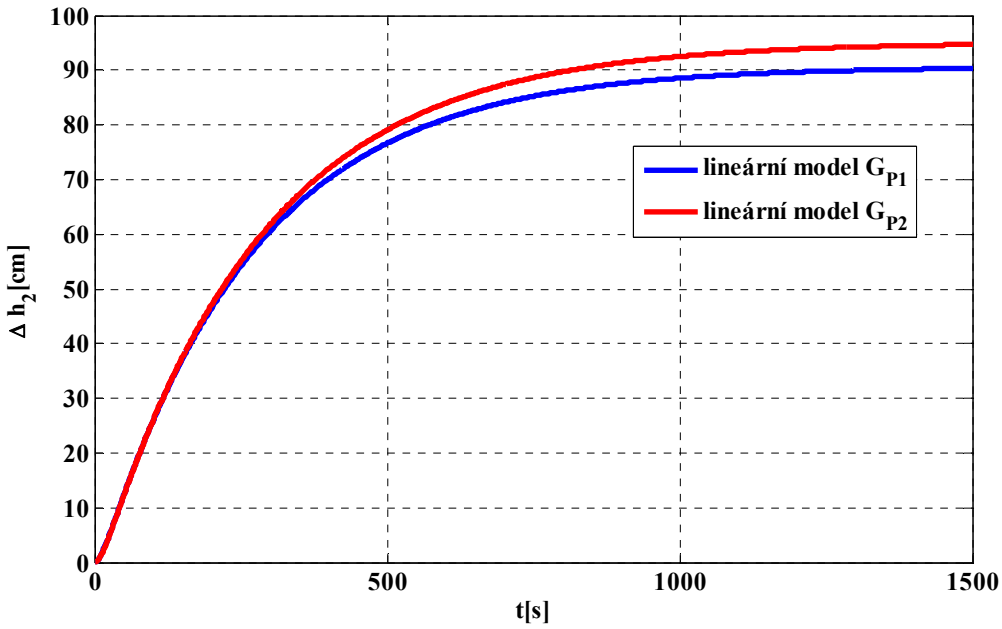


Obr. 2.12: Odezva hladiny v prvním válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm



Obr. 2.13: Odezva hladiny v druhém válci na změnu vstupu pro pracovní bod u_{10} = 5,985 V, h_{10} = 15,9 cm, h_{20} = 7,55 cm

Na obr. 2.14 můžeme porovnat přechodové charakteristiky obou výsledných lineárních modelů popsaných přenosy (2.24) a (2.25). Je patrné, že přechodové charakteristiky pro oba zmíněné lineární nejsou zcela stejné, což je způsobeno tím, že reálný systém vodárny je nelineární.



Obr. 2.14: Přechodové charakteristiky lineárních modelů s přenosy G_{P1} a G_{P2}

Z závěru ještě porovnáme vliv rozběhu čerpadla na chování celého systému, tak jak je doporučeno v popisu pro vodárnu viz [1]. Při měření se ukázalo, že při návrhu lze zanedbat vliv rozběhu čerpadla vzhledem na pomalou dynamiku celého systému, jak ukazuje analýza na nelineárním modelu na obr. 2.15 a na obr.2.16 v detailu.

V této kapitole se podařilo identifikovat systém s dostatečnou přesností, jak ukazuje obr. 2.9 a obr. 2.10. Pro získání matematického modelu jsme určili konstantu čerpadla

$$k_1 = 0{,}0280 \text{ m}^3/\text{Vs},$$

konstantu přepouštěcího a vypouštěcího ventilu

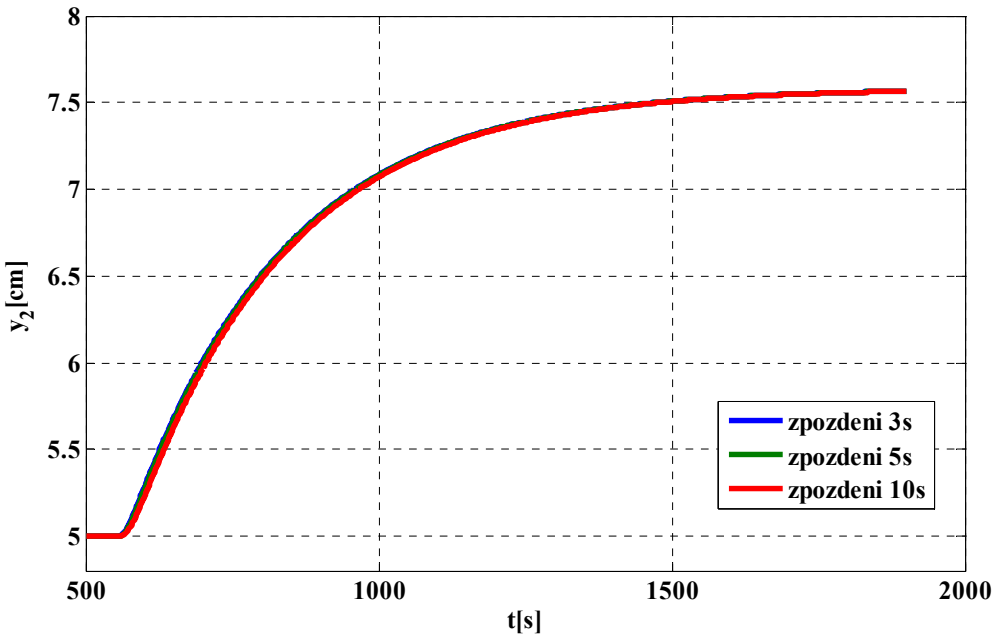
$$k_p = 0{,}0360 \text{ m}^{2,5}/\text{s},$$
$$k_v = 0{,}0152 \text{ m}^{2,5}/\text{s}$$

a konstanty obou snímačů hladin h_1 a h_2 s příslušnými offsety

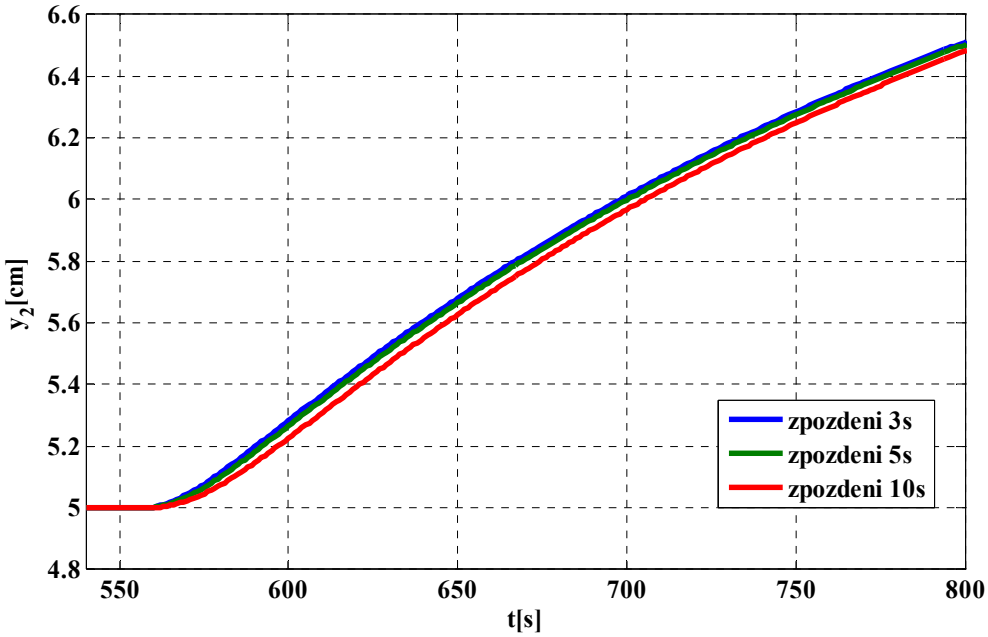
$$k_c = 31{,}541 \text{ cm}, \quad o_1 = 0{,}86 \text{ cm},$$
$$k_d = 26{,}051 \text{ cm}, \quad o_2 = -0{,}93 \text{ cm}.$$

Po získání matematického modelu jsme linearizovali nelineární model v pracovním bodě a získali přenos popsaný rovnicí (2.24), který použijeme při dalších návrzích regulačních prvků.

Při identifikaci se ukázal jako důležitý prvek při měření správné nastavení ventilů. Malá změna v nastavení otevření ventilů znamená velkou změnu v chování celého systému a má vliv i na určení výsledných parametrů nelineárního modelu. Tato změna do značné míry má vliv i při samotném návrhu regulačních prvků pro reálný systém.



Obr. 2.15: Vliv rozběhu čerpadla



Obr. 2.16: Vliv rozběhu čerpadla v detailu

Kapitola 3

MPC regulátor

V této kapitole popíšeme problematiku MPC regulátoru a provedeme analýzu pro využití na nelineární systémy. Zaměříme se především na úpravu minimalizačního kritéria regulátoru, který vychází z návrhu pro lineární systémy.

Při řešení regulačních úloh se často prosazují úlohy prediktivního řízení [6], [7]. Technologie souhrnně nazývaná Model Based Predictive Control (MPC) nepopisuje konkrétní řídicí strategii, ale velmi širokou množinu metod zpracování signálu, které jsou založené na optimalizaci zvolené kriteriální funkce stanovující cíle úlohy. Předností této metody je její jednoduchost, možnost použití na jednoduché i složitější procesy, systémy s jednoduchou dynamikou až po systémy s velkým časovým zpožděním. Nejdůležitější vlastností ale zůstává možnost zahrnout požadavky na veličiny v řízeném procesu, jako je rychlost změny, velikost amplitudy apod. Nejčastěji se tato metoda používá pro sledování budoucí referenční trajektorie. Pokud neznáme žádanou trajektorii po dobu predikce, můžeme ji modelovat jako náhodnou procházku, více lze nalézt např. v [8], [9], [10].

Při návrhu MPC regulátoru vycházíme ze stavového popisu diskrétního systému

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k), \end{aligned} \tag{3.11}$$

kde $\boldsymbol{x}(k)$ je stavový vektor, $\boldsymbol{u}(k)$ a $\boldsymbol{y}(k)$ je vstup a výstup systému, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{D}$ jsou matice systému.

Úlohou MPC regulátoru je najít takovou řídicí posloupnost $\boldsymbol{u}(k)$ na horizontu predikce délky T_p minimalizující kritérium

$$J = \sum_{i=k}^{k+Tp-1} \left\{ \boldsymbol{Q}(i)\left[\boldsymbol{w}(i) - \boldsymbol{y}(i)\right]^2 + \boldsymbol{R}(i)\left[\boldsymbol{u}(i)\right]^2 \mid \boldsymbol{x}(0) \right\}. \tag{3.12}$$

kde $\boldsymbol{Q}(i)$ je váha regulační odchylky v čase i, $\boldsymbol{R}(i)$ je váha řídicí veličiny a $\boldsymbol{w}(i)$ je referenční signál v čase i. Výraz

$$\boldsymbol{e}(i) = \boldsymbol{w}(i) - \boldsymbol{y}(i) \tag{3.13}$$

představuje regulační odchylku v čase i.

Horizont predikce T_p udává dobu, po kterou regulátor hledá optimální řídicí posloupnost podle kritéria (3.12). Volba závisí na konkrétní aplikaci použití a musíme brát ohled na to, že s rostoucí hodnotou rostou výpočetní nároky na řídicí systém. Na druhé straně zvolení malé hodnoty může vést ke ztrátě stability regulačního obvodu.

Pro správnou činnost regulátoru musí horizont predikce být dostatečně dlouhý viz [8] a [10].

Predikci stavů systému (3.11) na horizontu predikce T_p můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k) &= \boldsymbol{x}(k),\\
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k),\\
\boldsymbol{x}(k+2) &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k+1) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+1) = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+1),\\
\boldsymbol{x}(k+3) &= \boldsymbol{M}^3\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+1) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+2),\\
&\vdots\\
\boldsymbol{x}(k+T_p-1) &= \boldsymbol{M}^{Tp-1}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{M}^{Tp-2}\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{M}\boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+T_p-3) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k+T_p-2).
\end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme dosadit do výstupu systému a vyjádřit v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}, \tag{3.14}$$

kde první člen v rovnici (3.14) představuje odezvu systému na počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(k)$ a druhý člen je odezva systému na posloupnost řízení na horizontu predikce T_p a platí

$$\boldsymbol{y}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(k) \\ \boldsymbol{y}(k+1) \\ \boldsymbol{y}(k+2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(k+Tp-1) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{u}(k+1) \\ \boldsymbol{u}(k+2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(k+Tp-1) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{Tp-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & & & & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{D} & & & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{D} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}^{Tp-2}\boldsymbol{N} & & & \boldsymbol{C}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

.

Dosazením vztahu (3.14) do kritéria (3.12) dostáváme

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \mid \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}\right) = \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^T \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right) + \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}, \tag{3.15}$$

kde matice $\boldsymbol{Q}$ je váha regulační odchylky a matice $\boldsymbol{R}$ je váha řídicí veličiny a $\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}$ je posloupnost žádané hodnoty výstupu na horizontu predikce ve tvaru

$$\boldsymbol{w}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \\ \vdots \\ w(k+T_p-1) \end{bmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{Q}$ je pozitivně semidefinitní symetrická matice a $\boldsymbol{R}$ je pozitivně definitní symetrická matice. Na horizontu predikce mají matice tvar

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}(k) & & & \\ & \boldsymbol{Q}(k+1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{Q}(k+T_p-1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(k) & & & \\ & \boldsymbol{R}(k+1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{R}(k+T_p-1) \end{bmatrix}.$$

Obvykle se v kritériu (3.12) neváží přímo akční veličina $\boldsymbol{u}(k)$, ale její změna $\Delta\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{u}(k\text{-}1)$. Kritérium má pak tvar

$$J = \sum_{i=k}^{k+Tp-1} \left\{ \boldsymbol{Q}(i)\left[\boldsymbol{w}(i) - \boldsymbol{y}(i)\right]^2 + \boldsymbol{R}(i)\left[\Delta\boldsymbol{u}(i)\right]^2 \mid \boldsymbol{x}(0) \right\}. \tag{3.16}$$

Dosazením vztahu (3.14) do kritéria (3.16) dostáváme

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} \mid \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{w}_{\mathbf{k}}\right) = \left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}\right)^T \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}\right) + \Delta\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}^T \boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}, \tag{3.17}$$

kde $$\Delta\boldsymbol{u}_k = \tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{k}},$$

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & & & \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(k-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice příslušných rozměrů.

Nyní máme systém připraven pro samotné řešení MPC regulátoru. Řešení lze nalézt ve dvojím tvaru, a to v analytickém nebo numerickém tvaru [11]. V případě použití analytického tvaru nelze do řešení zahrnout omezení pro jednotlivé veličiny a tím přicházíme o hlavní výhodu MPC regulátoru. Proto je výhodnější použít pro řešení numerický výpočet.

3.1 Numerický tvar MPC regulátoru

Při numerickém výpočtu můžeme zahrnout omezující podmínky pro jednotlivé veličiny. Nejčastěji používané jsou omezení na amplitudu akčního zásahu

$$\boldsymbol{u}_{\min} \le \boldsymbol{u}(t) \le \boldsymbol{u}_{\max}\,, \tag{3.18}$$

omezení na velikost změny akční veličiny

$$\Delta\boldsymbol{u}_{\min} \le \Delta\boldsymbol{u}(t) \le \Delta\boldsymbol{u}_{\max}\,, \tag{3.19}$$

nebo omezení amplitudy výstupu

$$\boldsymbol{y}_{\min} \le \boldsymbol{y}(t) \le \boldsymbol{y}_{\max}\,. \tag{3.20}$$

Po zahrnutí těchto podmínek do minimalizačního kritéria vede úloha na optimalizační problém, ve kterém se v každém kroku počítá optimální řídicí posloupnost na horizontu predikce. V každém kroku prediktivního algoritmu vypočteme posloupnost řízení $\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}$, která minimalizuje kritérium (3.12) respektive (3.16) na horizontu predikce T_p. Posuneme se v čase o krok dál a výpočet opakujeme. Tento postup je znám jako výpočet s klouzavým horizontem [9], [10], minimalizující kritérium

$$\min_{\boldsymbol{u}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}\right) \tag{3.21}$$

s omezujícími podmínkami

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{min}} \le \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} \le \boldsymbol{u}_{\mathbf{max}}\,, \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} \le \boldsymbol{\beta}\,.$$

Tato úloha je standardní úlohou kvadratického programování QP [8] a její implementaci lze nalézt např. i v Matlabu pod příkazem *quadprog*.

3.2 Analýza návrhu MPC regulátoru

Při návrhu MPC regulátoru je zajímavé porovnat jaký vliv mají omezující podmínky na výsledný průběh regulovaných veličin, a jak ovlivní výsledný tvar kritéria.

Pro analýzu vyjdeme ze stavového popisu spojitého systému

$$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t) + bu(t) + l\,, \\ y(t) &= cx(t) + du(t), \end{aligned} \tag{3.22}$$

kde l je konstanta, která představuje konstantu u_{10} vzniklou po linearizaci systému vodárny, viz předchozí kapitola. Tento typ modelu volíme proto, že při návrhu MPC regulátoru na model vodárny uvažujeme linearizovaný model nelineárního systému vytvořený v jednom konkrétním pracovním bodě. Po regulátoru však chceme, aby byl použitelný v širším okolí pracovního bodu.

V našem případě zvolíme konstanty systému ve tvaru

$$a = -0{,}1, \quad b = 2, \quad c = 1, \quad d = 0, \quad l = 2 .$$

Po linearizaci systému (3.22) v pracovní bodě $u_0 = 0$, $x_0 = 90$, $y_0 = 20$ dostáváme systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned} \Delta x(t+1) &= a\Delta x(t) + b\Delta u(t), \\ \Delta y(t) &= c\Delta x(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Provedeme diskretizaci systému (3.22) a výsledný MPC regulátor budeme navrhovat pro diskrétní tvar stavových matic. Predikci výstupu systému na horizontu predikce můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}, \tag{3.24}$$

kde matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{S}$ mají tvar popsaný výše.

Pro požadavek, aby regulátor sledoval konstantní referenci s omezením amplitudy akční veličiny volíme kritérium ve tvaru (3.12). Do tohoto kritéria dosadíme vztah (3.24) a po roznásobení dostáváme

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \mid \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}\right) = \\ &\quad = \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^T \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right) + \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} = \\ &\quad = \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T \left(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T \left(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)\right) - \\ &\qquad - \left(\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} + k . \end{aligned}$$

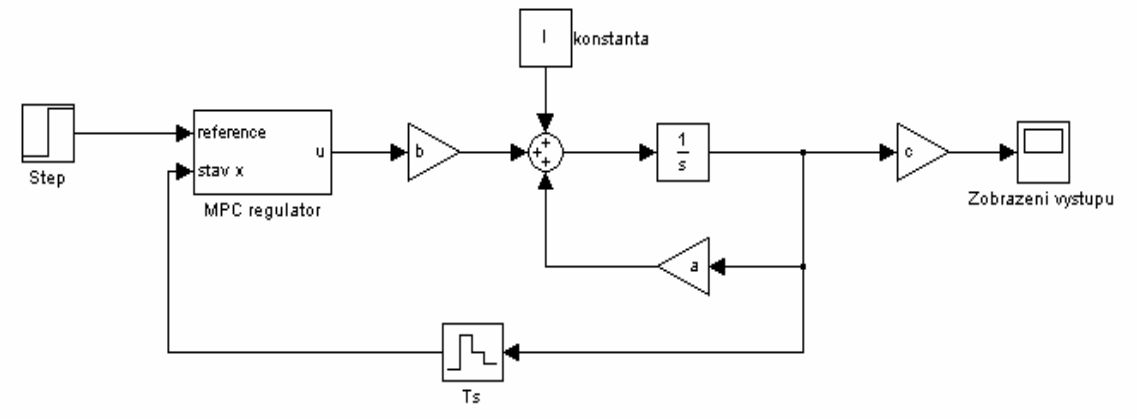
Pro úlohu kvadratického programování minimalizující vztah (3.21) dostáváme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{f}^T &= \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

s omezeními

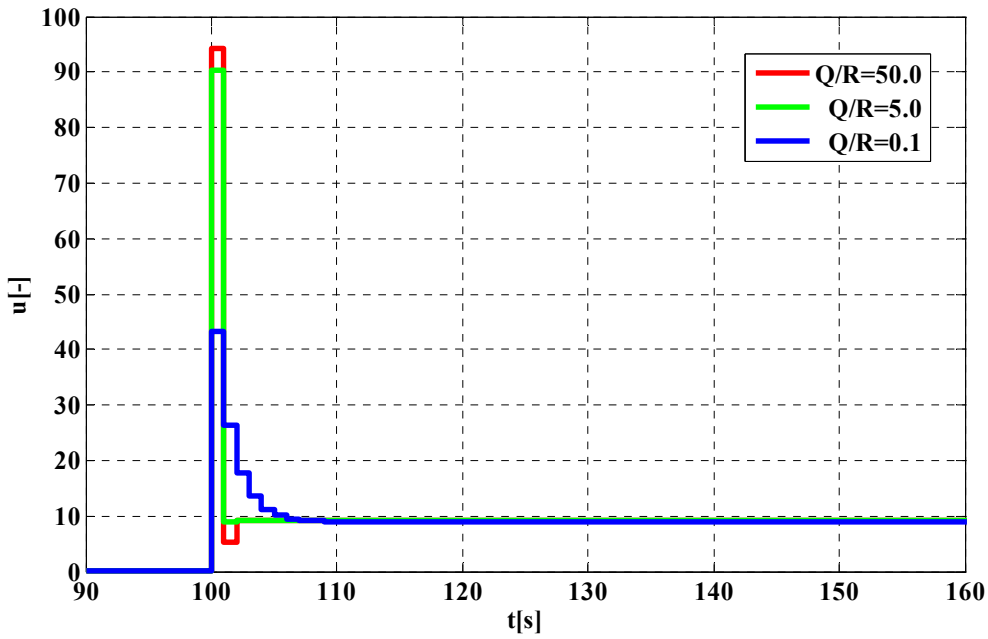
$$\boldsymbol{u}_{\min} \le \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{u}_{\max}, \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{\beta} .$$

Výsledný návrh budeme realizovat v prostředí Simulink v Matlabu podle následujícího schématu obr. 3.1.

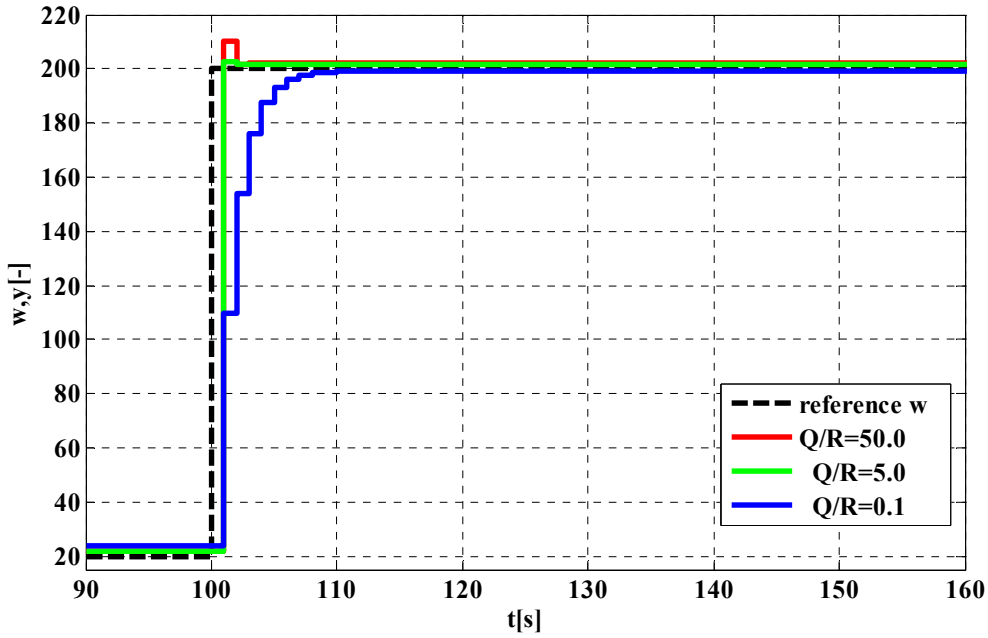


Obr. 3.1: Simulační schéma systému s MPC regulátorem

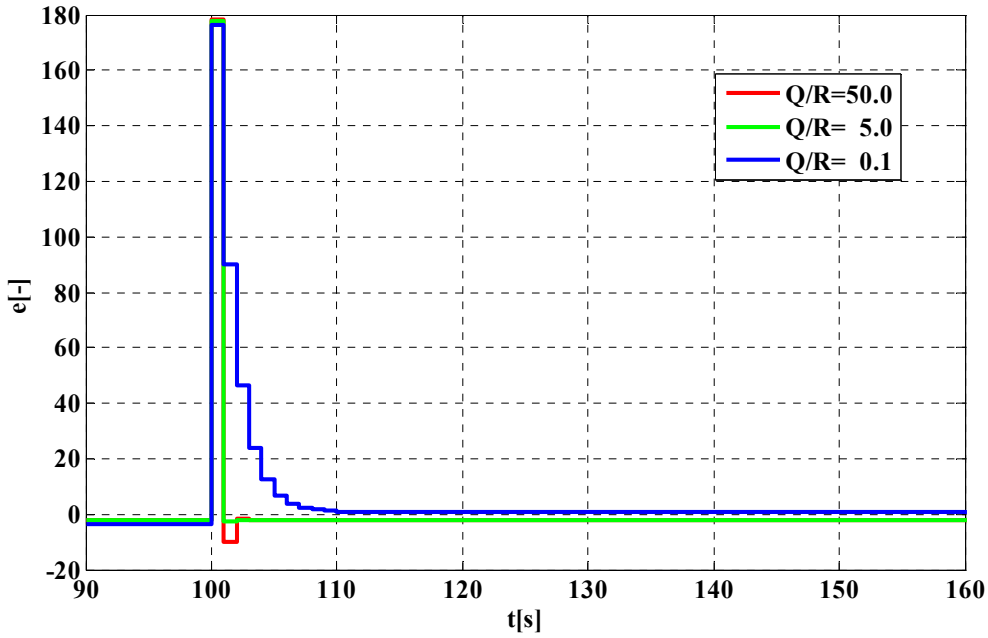
Na obr. 3.3 můžeme porovnat odezvu systému na akční zásah z obr. 3.2 pro různé poměry váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ a pro dobu predikce T_p = 20 s.



Obr. 3.2: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem vážící amplitudu akčního zásahu



Obr. 3.3: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem vážící amplitudu akčního zásahu



Obr. 3.4: Průběh regulační odchylky

Na obr. 3.4 vidíme, že regulační odchylka popsaná vztahem (3.13) není nulová. Regulátor se snaží sledovat konstantní referenční signál, ale nulové regulační odchylky nedosáhne, pouze se k nulové hodnotě přibližuje.

3.2.1 MPC regulátor vážící změnu řízení

Nyní nebudeme vážit akční veličinu u_k, ale její změnu Δu_k podle kritéria (3.16). Dosazením vztahu (3.24) do kritéria (3.16) a roznásobením dostáváme

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \mid \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}\right) = \\
&\quad = \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^T \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right) + \Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T \boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} = \\
&\quad = \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^T \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right) + \\
&\qquad + \left(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}\right)^T \boldsymbol{R}\left(\tilde{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}\right) = \\
&\quad = \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T\left(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{I}}^T\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^T\left(\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right) + \tilde{\boldsymbol{I}}^T\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}\right) - \\
&\qquad - \left(\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}^T\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} + k
\end{aligned}$$

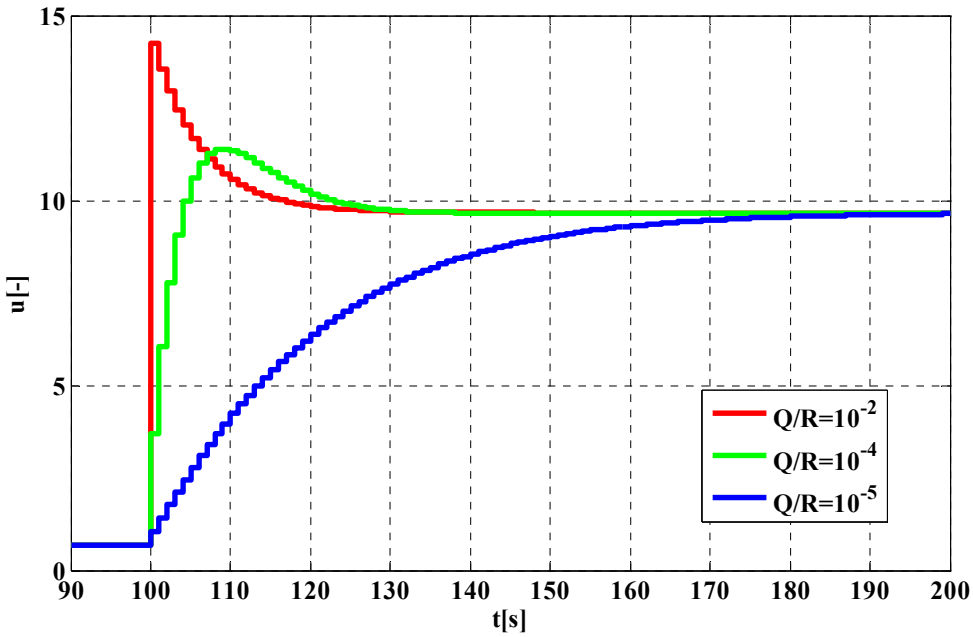
a pro vztah (3.21) dostáváme rovnice

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{I}}^T\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}}\,, \\
\boldsymbol{f}^T &= (\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k))^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}^T\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}}
\end{aligned}$$

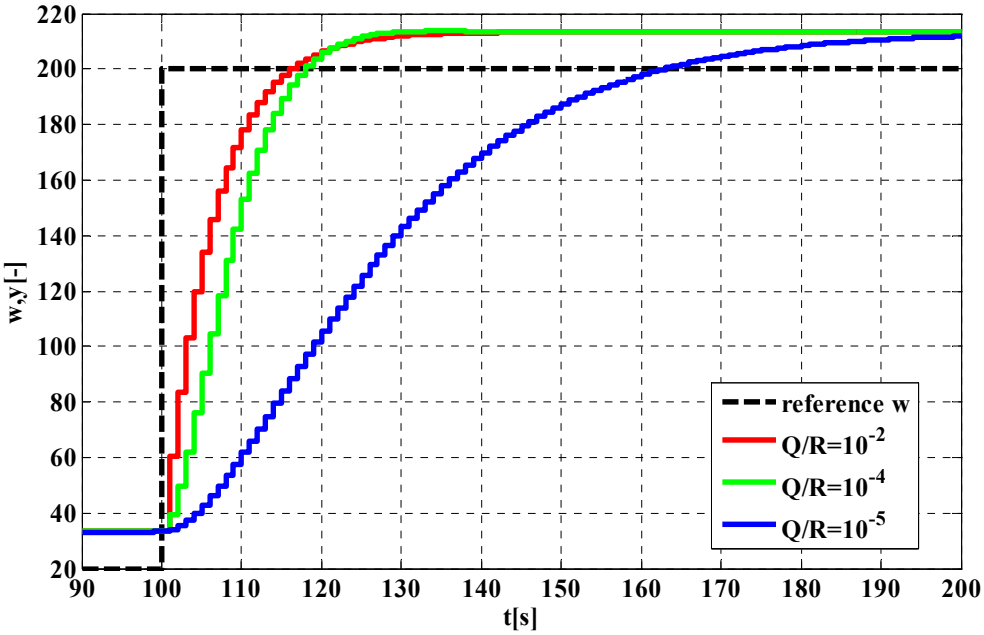
s omezeními

$$\boldsymbol{u}_{\min} \le \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{u}_{\max}\,, \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{\beta}\,.$$

Na následujících průbězích můžeme porovnat vliv změny váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ na výsledný průběh výstupu. Na rychlost změny akčního zásahu jsme nekladli žádná omezení. Jak je z obr. 3.6 vidět, ani MPC regulátor vážící změnu řízení nedosáhl nulové regulační odchylky, naopak její hodnota se zvýšila v porovnání s obr. 3.3.



Obr. 3.5: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem vážící změnu akčního zásahu



Obr. 3.6: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem vážící změnu akčního zásahu

3.2.2 MPC regulátor s integračním členem

Sledování konstantního referenčního signálu lze dosáhnout u systému, který má integrační charakter. Nemá-li systém integrační složku, lze rozšířit řízenou soustavu o integrátor tak, že zavedeme integraci do akčního zásahu regulátoru.

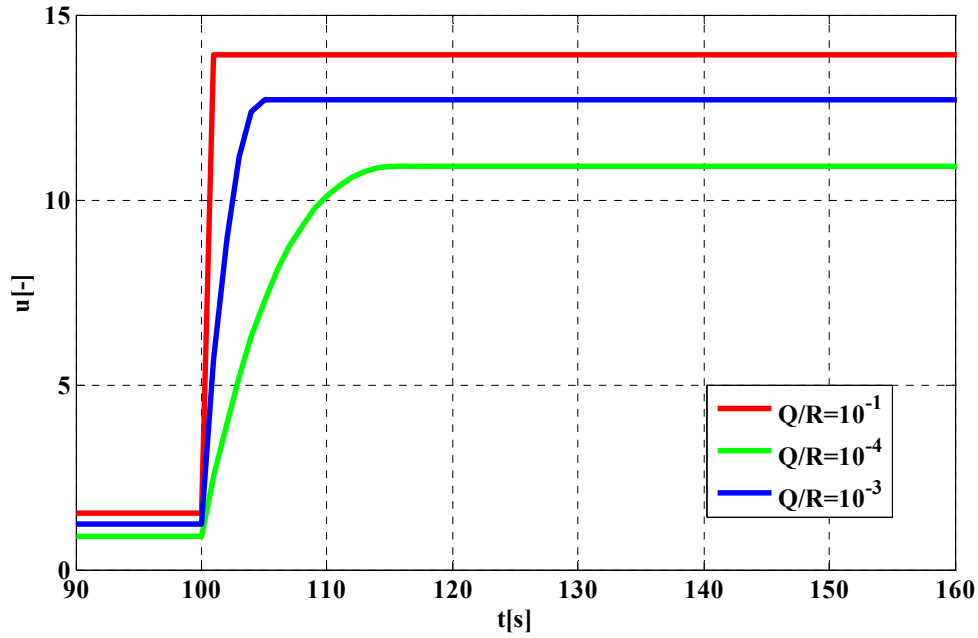
Náš systém popsaný rovnicí (3.22) rozšíříme o integrační člen s přenosem

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

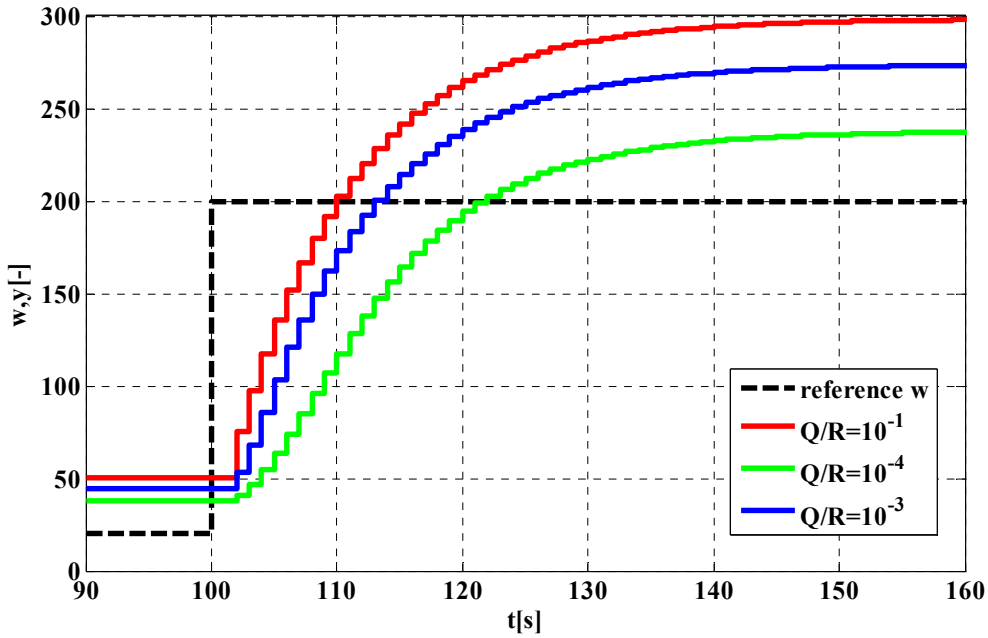
Tím dostaneme systém druhého řádu s maticemi ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = [0].$$

Systém nyní má integrační charakter a porovnáme jeho chování z hlediska sledování referenčního signálu. Po dosazení rozšířeného systému do obou výše zmiňovaných kritérií dostáváme stejné rovnice minimalizující vztah (3.21). Výsledné průběhy výstupu na příslušné odezvy vstupního signálu znázorňují následující obrázky.



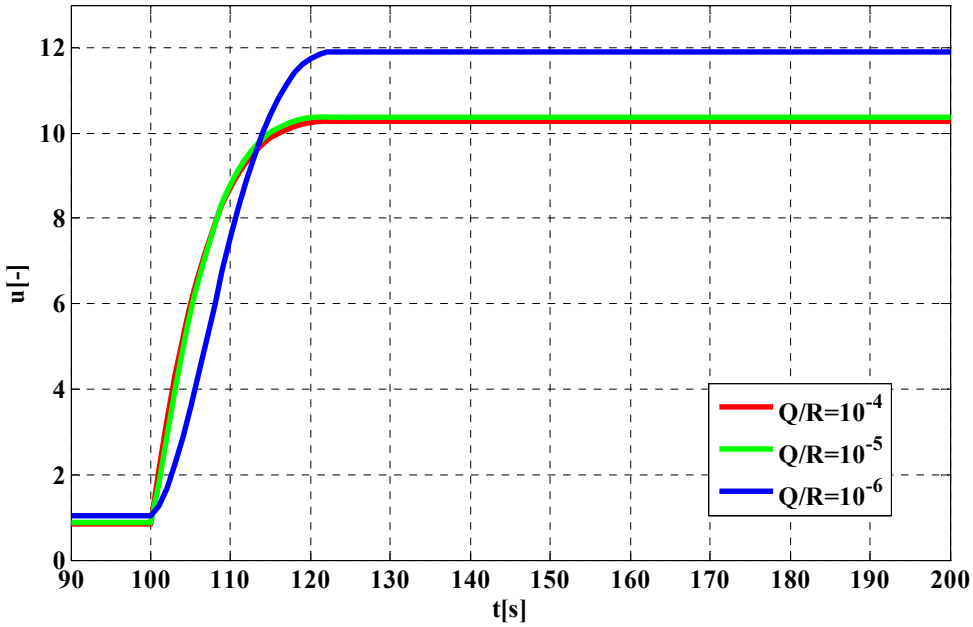
Obr. 3.7: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a integrátorem vážící amplitudu akčního zásahu



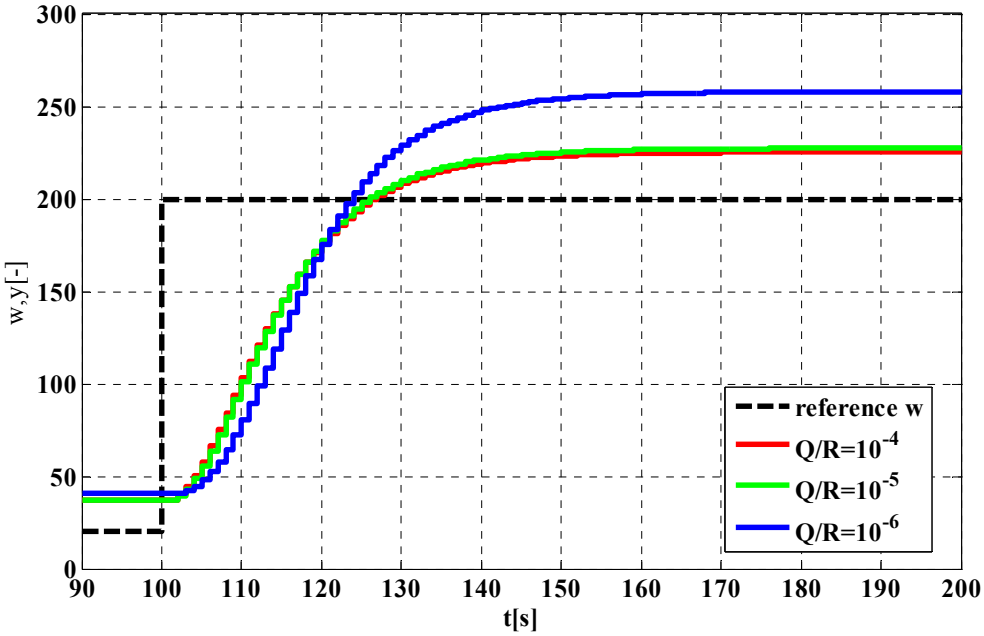
Obr. 3.8: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a integrátorem vážící amplitudu akčního zásahu

Z obr. 3.8 je patrné, že pro regulační odchylka (3.13) se při zmenšujícím poměru váhových matic $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{R}$ snižuje, ale nulovou hodnotu ani v tomto případě nedostáváme. Pro MPC regulátor vážící změnu řízení také nedostáváme požadovanou nulovou

regulační odchylku viz obr. 3.10. Ani úpravou pomocí integrátoru jsme nedosáhli požadovaných vlastností regulátoru pro sledování reference.



Obr. 3.9: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a integrátorem vážící změnu akčního zásahu



Obr. 3.10: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a integrátorem vážící změnu akčního zásahu

3.2.3 MPC regulátor s diskrétním integrátorem

Řešení úlohy kvadraticky optimálního sledování referenční trajektorie závisí také na tom, jakým způsobem je tato referenční trajektorie definována. Předpokládejme, že referenční signál je generován lineárním dynamickým systémem jako odezva na jeho počáteční podmínky. Pro referenční signál ve tvaru skoku s libovolnou amplitudou je takovým systémem sumátor (diskrétní integrátor). Tato úloha je označována pod názvem optimální servomechanismus viz [8] a [9].

Zavedeme proto do algoritmu pro regulátor sumátor regulační odchylky popsaný rovnicí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{se}(k+1) &= \boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{w}(k) - \boldsymbol{y}(k), \\ \boldsymbol{y}_{se}(k) &= \boldsymbol{x}_{se}(k) \end{aligned} \tag{3.25}$$

a rozšíříme kritérium (3.12) na tvar

$$J = \sum_{i=k}^{k+Tp-1} \left\{ \boldsymbol{Q}(i)\left[\boldsymbol{w}(i) - \boldsymbol{y}(i)\right]^2 + \boldsymbol{R}(i)\left[\boldsymbol{u}(i)\right]^2 + \boldsymbol{Q}_{\mathbf{se}}(i)\left[\boldsymbol{y}_{se}(i)\right]^2 \mid \boldsymbol{x}(0) \right\}. \tag{3.26}$$

Odezvu systému (3.25) na horizontu predikce lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{se}(k) &= \boldsymbol{x}_{se}(k), \\ \boldsymbol{y}_{se}(k+1) &= \boldsymbol{x}_{se}(k+1) = \boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{w}(k) - \boldsymbol{y}(k), \\ \boldsymbol{y}_{se}(k+2) &= \boldsymbol{x}_{se}(k+1) + \boldsymbol{w}(k+1) - \boldsymbol{y}(k+1) = \boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{w}(k) - \boldsymbol{y}(k) + \\ &\qquad + \boldsymbol{w}(k+1) - \boldsymbol{y}(k+1), \\ &\vdots \\ \boldsymbol{y}_{se}(k+T_p-1) &= \boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{w}(k) + \ldots + \boldsymbol{w}(k+T_p-2) - \boldsymbol{y}(k) - \ldots - \boldsymbol{y}(k+T_p-2). \end{aligned}$$

V maticovém zápisu a dosazením z rovnice (3.24) vypadá soustava takto

$$\boldsymbol{y}_{\mathbf{se}} = \hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{I}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{w}_{\mathbf{k}} - \boldsymbol{I}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{y}_{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}(k) + \boldsymbol{I}_{\mathbf{v}}\left(\boldsymbol{w}_{\mathbf{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}\right), \tag{3.27}$$

kde matice $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{S}$ byly popsány výše a

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \boldsymbol{I} & 0 & & \\ \boldsymbol{I} & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} \\ \vdots \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Po dosazení rovnice (3.27) do kritéria (3.26) a roznásobení dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \mid \boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}\right)= \\
&\quad=\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^{T} \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)+\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^{T} \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}+ \\
&\qquad+\left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)^{T} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}} \times\left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}\right)= \\
&\quad=\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^{T}\left(\boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}^{T}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}- \\
&\qquad-\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}^{T}\left(\boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{w}_{k}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)+\boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}^{T}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}\left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)\right)\right)- \\
&\qquad-\left(\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^{T} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}+\left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)\right)^{T} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}}+k\,.
\end{aligned}
$$

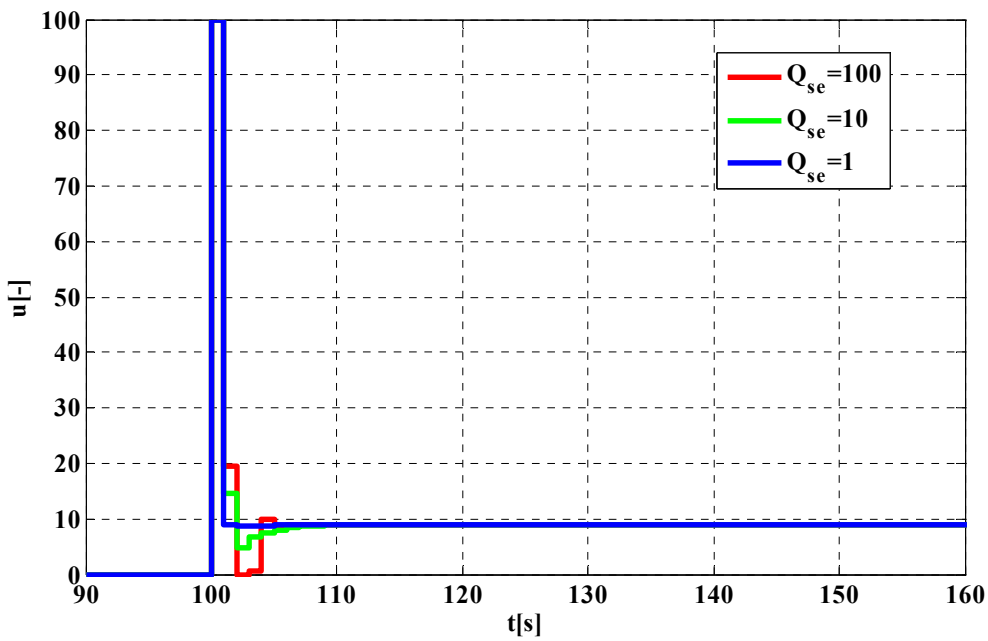
Pro minimalizaci kritéria (3.21) dostáváme vztahy

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}^{T}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}^{T}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}\,, \\
\boldsymbol{f}^{T} &= \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^{T} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}+\left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)\right)^{T} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{S}
\end{aligned}
$$

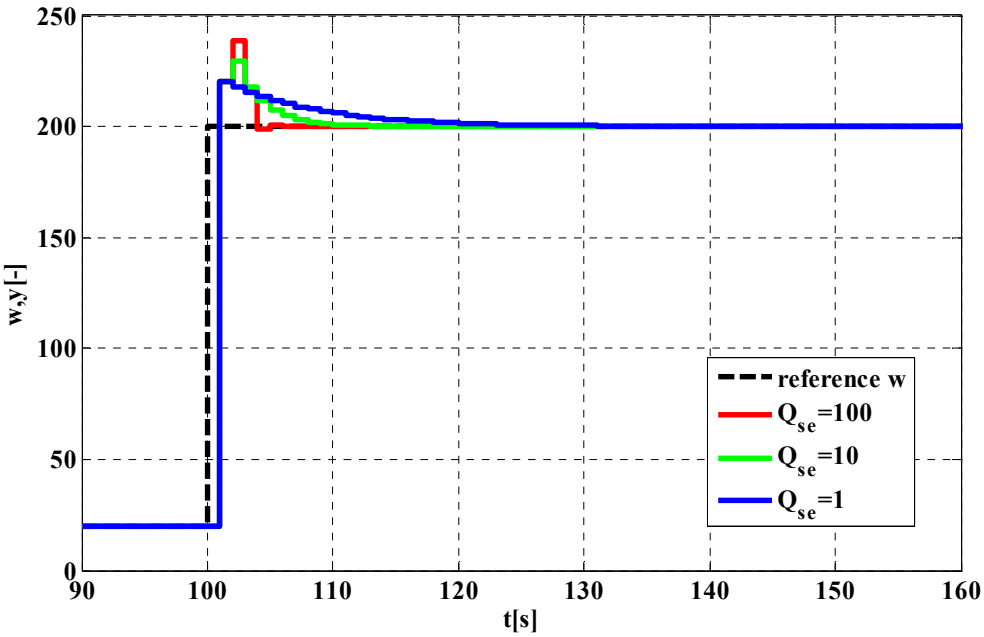
s omezeními

$$
\boldsymbol{u}_{\min} \leq \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \leq \boldsymbol{u}_{\max}\,, \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \leq \boldsymbol{\beta}\,.
$$

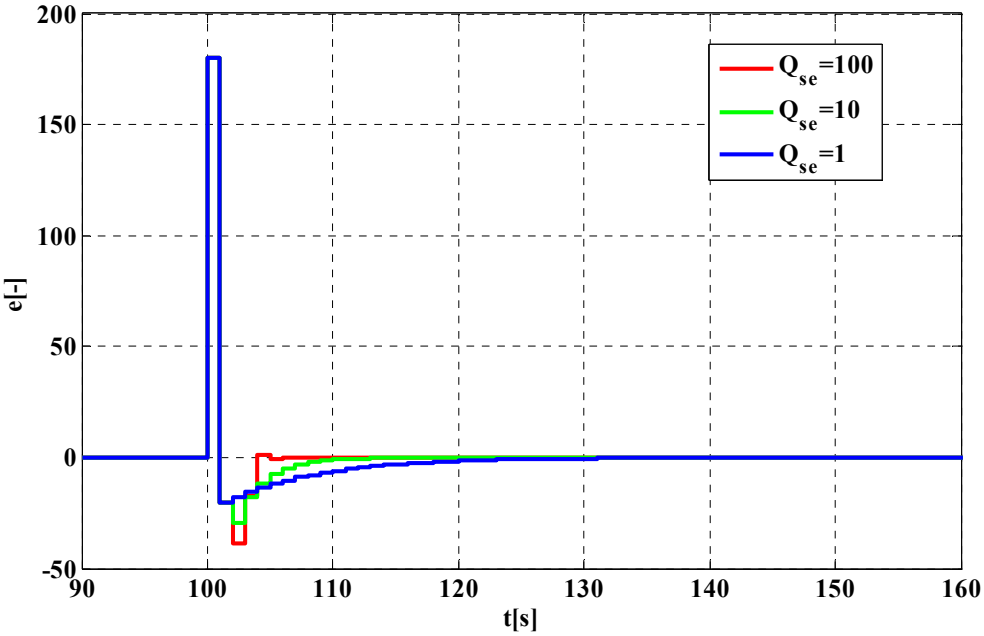
Na obr. 3.11 a obr. 3.12 jsou výsledné průběhy pro různé nastavení hodnoty váhové matice $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}$ a pro stejný poměr váhových matic $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}$=50. Z průběhů vidíme, že daný regulátor sleduje konstantní referenční trajektorii s nulovou regulační odchylkou jak ukazuje obr. 3.13.



Obr. 3.11: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu



Obr. 3.12: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu



Obr. 3.13: Průběh regulační odchylky s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akčního zásahu

Stejný postup provedeme pro MPC regulátor vážící změnu řízení. Rozšíříme kritérium (3.16) o sumátor regulační odchylky (3.24). Po roznásobení a úpravách dostáváme výsledné vztahy

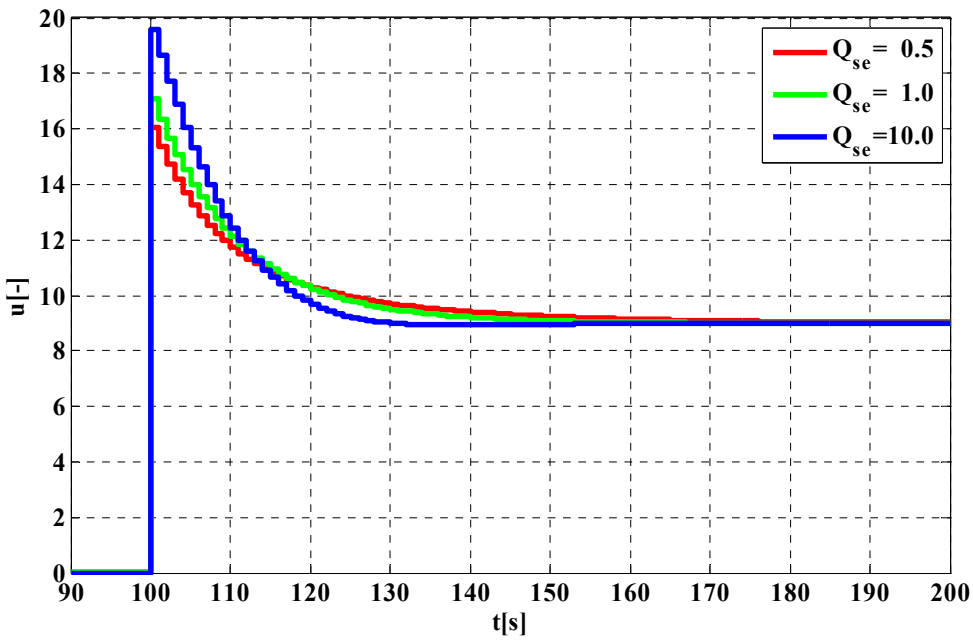
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{I}}^T \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}^T \boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{S} ,$$

$$\boldsymbol{f}^T = \left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)^T \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S} + \left(\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_{se} + \boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{w}_{\mathrm{k}} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(k)\right)\right)^T \boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{v}} \boldsymbol{S} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{k}}^T \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{I}} .$$

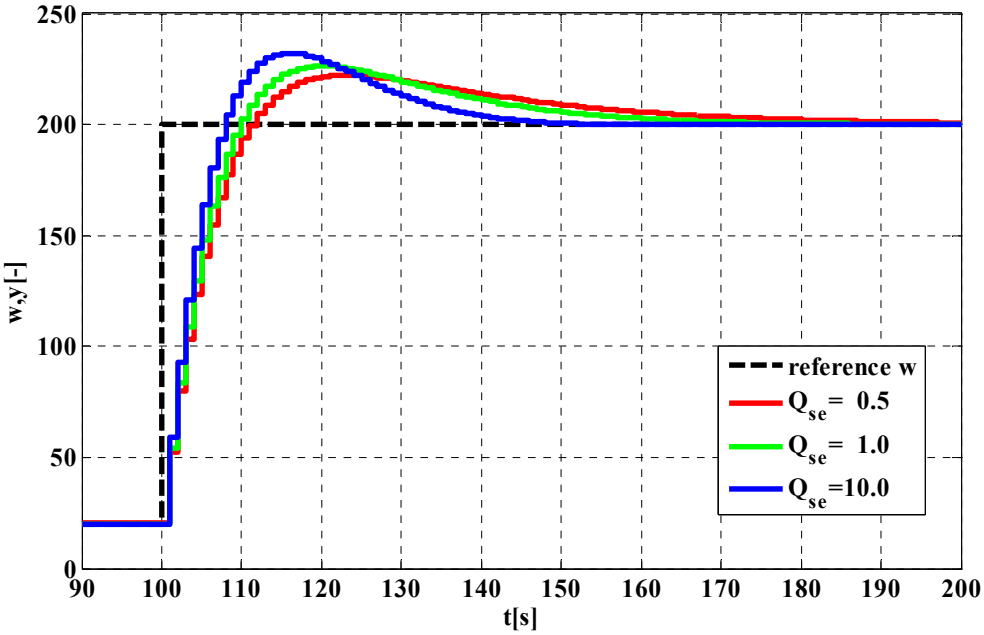
s omezeními

$$\boldsymbol{u}_{\min} \le \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{u}_{\max} , \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} \le \boldsymbol{\beta} .$$

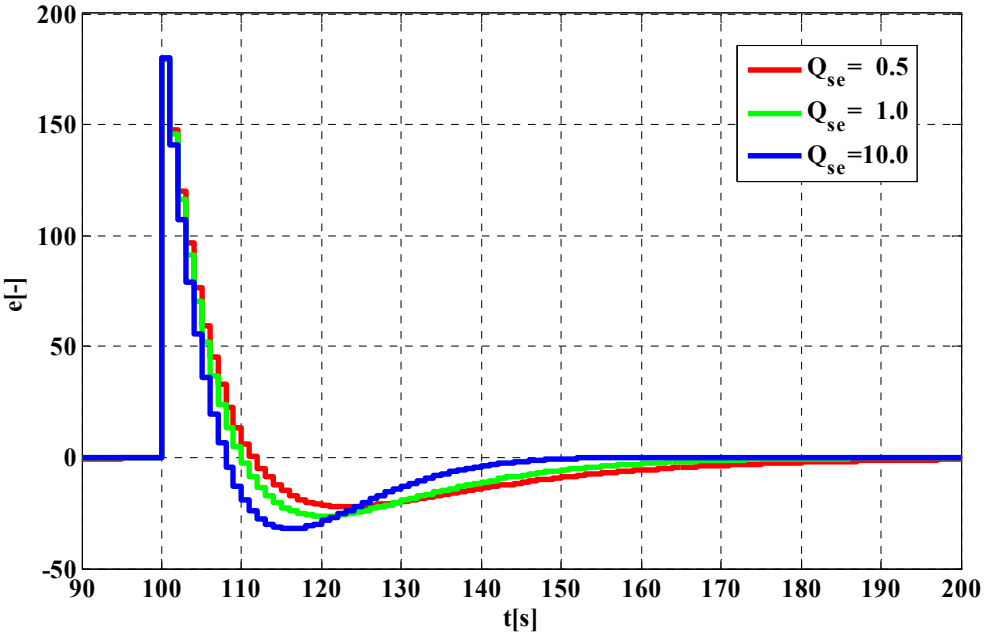
Na obr. 3.14 a 3.15 jsou průběhy MPC regulátoru vážící změnu akční veličiny pro různé nastavení hodnoty váhové matice $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{se}}$ a pro stejný poměr váhových matic $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}$=50. Na rychlost změny akčního zásahu jsme nekladli žádná omezení. Z průběhů vidíme, že daný regulátor sleduje konstantní referenční trajektorii s nulovou regulační odchylkou jak ukazuje obr. 3.16.



Obr. 3.14: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu

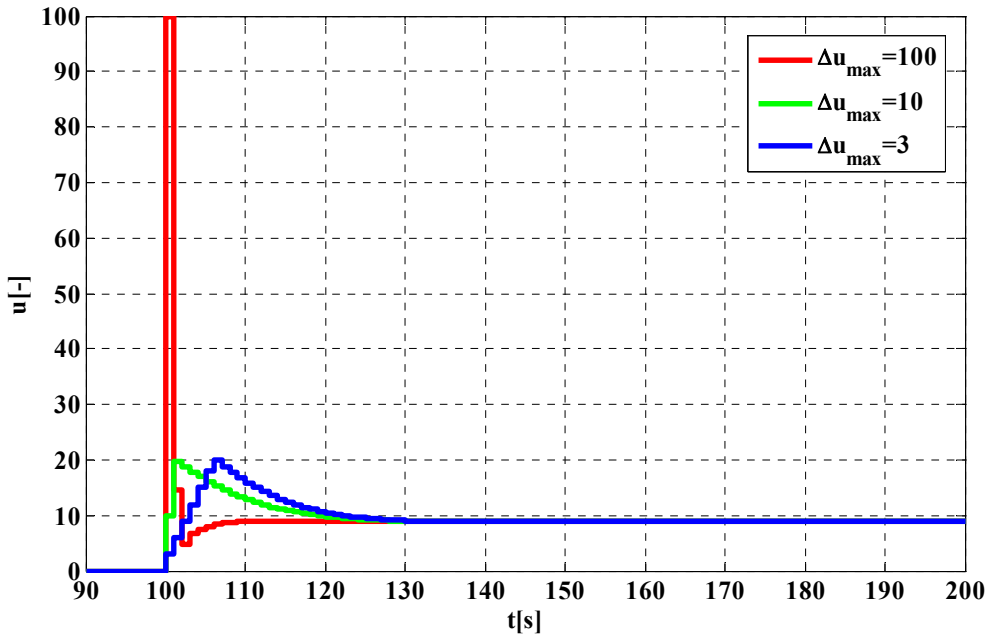


Obr. 3.15: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu

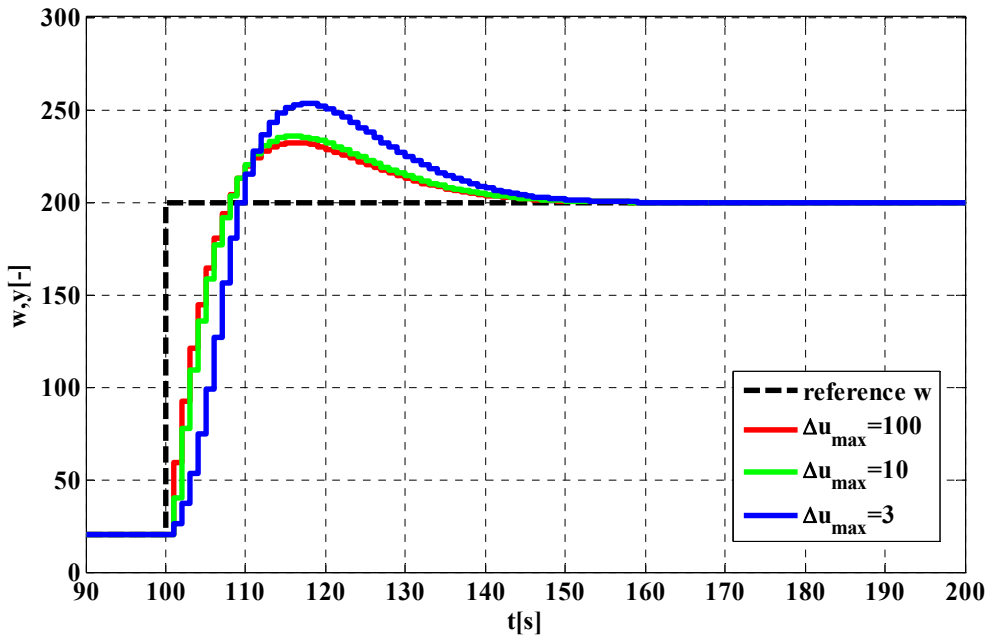


Obr. 3.16: Průběh regulační odchylky s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akčního zásahu

Na obr. 3.17 a obr. 3.18 můžeme porovnat akční zásah a výstup systému při zavedení omezení na rychlost změny akčního zásahu regulátoru při konstantních váhových maticích $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}$=50, $\boldsymbol{Q}_{se}$=10. Omezení akčního zásahu má vliv jak na samotnou amplitudu akční veličiny, tak i na rychlost ustálení výstupu systému.



Obr. 3.17: Průběh akční veličiny s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky při omezení rychlosti změny akční veličiny



Obr. 3.18: Průběh výstupu systému s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky při omezení rychlosti změny akční veličiny

V této kapitole jsme ukázali, že použití klasické metody návrhu MPC regulátoru je omezeno čistě na lineární systémy a pro jen málo odlišný systém je třeba zajistit robustnost regulátoru, a to z hlediska sledování konstantní reference, vhodnými úpravami. Po regulátoru chceme, aby byl schopen dosáhnout požadovaného výstupu i při konečné změně vlastností řízené soustavy nebo v případě působení konstantních poruchových signálů. Této vlastnosti využijeme pro návrh regulátoru na reálný model vodárny TQ.

Při porovnání všech výsledných rozšíření MPC regulátoru se ukázala jako nejlepší volba rozšíření s diskrétním integrátorem, který zajistí nulovou regulační odchylku viz obr. 3.13 a obr. 3.16.

Kapitola 4

Regulace vodárny TQ

V této kapitole se zaměříme na regulaci reálného systému vodárny TQ a porovnáme ji s návrhy na lineárním a nelineárním modelu. Porovnáme výsledné chování různých MPC regulátorů na reálném systému. Porovnání také provedeme s klasickým PID regulátorem, který je pro svou jednoduchost návrhu a dobrým vlastnostem stále používán v regulačních úlohách.

Pro návrh budeme vycházet z pracovního bodu u_{10} = 5,7 V, h_{10} = 12,2 cm, h_{20} = 5 cm a příslušným přenosem popsaným rovnicí (2.24).

4.1 PID regulátor

PID je kombinaci PI a PD regulátorů. Do akční veličiny $u(k)$ zavádí vedle regulační odchylky její integrál, tím umožňuje dosažení vyšší přesnosti regulace v ustáleném stavu viz [12] a [13]. Přenos ideálního PID regulátoru je dán vztahem

$$C_{\mathrm{PID}}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s, \tag{4.11}$$

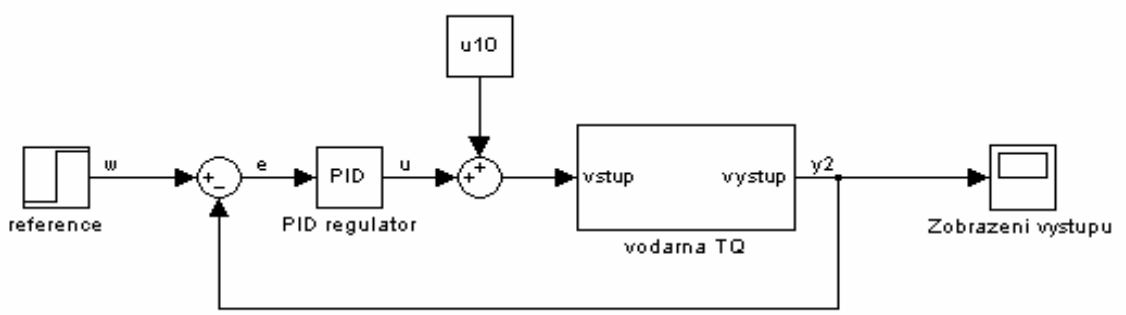
kde k_P je zesílení proporcionální části, k_D je zesílení derivační složky a k_I je zesílení integrační složky.

Pro praktickou realizaci rozšíříme ideální PID regulátor o jeden reálný stabilní pól, který filtruje derivační nulu. Při praktické realizaci to znamená omezení zisku derivační složky na vyšších frekvencích. Výsledný regulátor navrhneme pomocí metody geometrického místa kořenů GMK pro pracovní bod uvedený výše s přenosem (2.24) tak, aby doba regulace nepřesáhla 100s a s přihlédnutím na maximální amplitudu akčního zásahu. Přenos regulátoru dostáváme ve tvaru

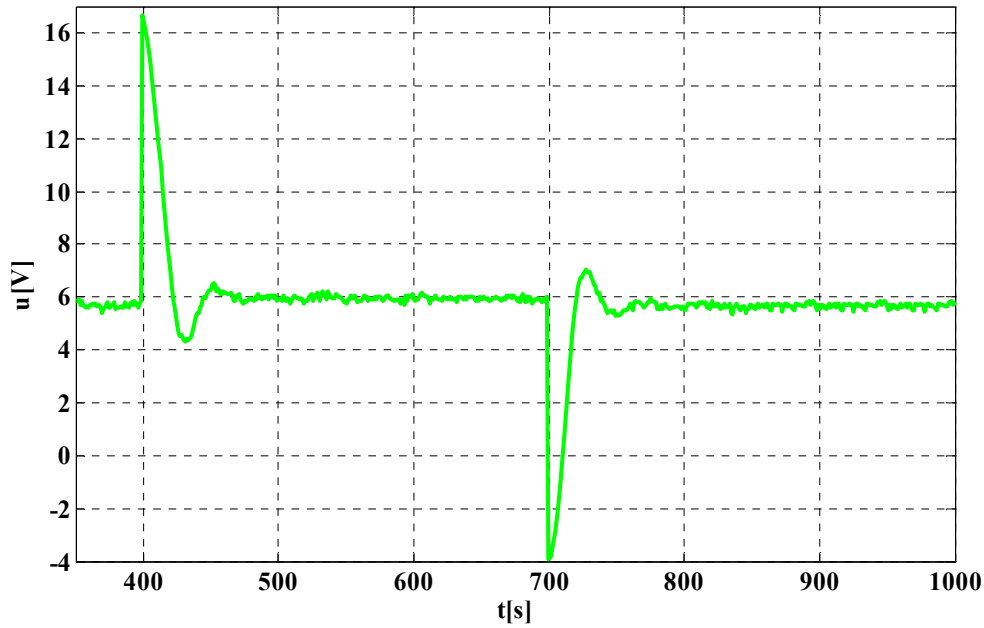
$$C_{\mathrm{PID}}(s) = \frac{10(s+0,25)(s+0,0056)}{s(s+0,27)}. \tag{4.12}$$

Regulátor budeme modelovat v prostředí Simulink v Matlabu podle následujícího schématu obr. 4.1.

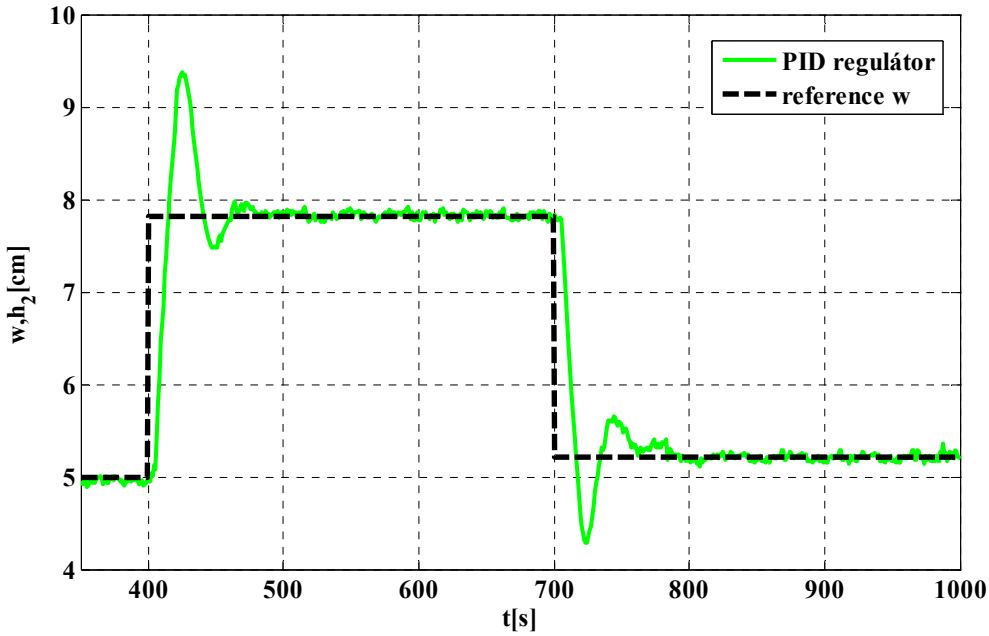
Na obr. 4.2 vidíme, že amplituda akčního zásahu je vyšší než udává rozsah vstupního napětí čerpadla na vodárně, ale vzhledem k celkové době regulace můžeme tuto skutečnost zanedbat. Na obr. 4.3 je znázorněn průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci. Z výsledného průběhu můžeme vidět, že PID regulátor sleduje referenční trajektorii s nulovou regulační odchylkou a doba regulace odpovídá našemu požadavku.



Obr. 4.1: Regulační obvod vodárny TQ s PID regulátorem



Obr. 4.2: Akční zásah PID regulátoru



Obr. 4.3: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s PID regulátorem

4.2 Návrh MPC regulátoru

Pro návrh vyjdeme z pracovního bodu uvedeného výše se stavovými maticemi ***A***, ***B***, ***C*** a ***D*** ve tvaru

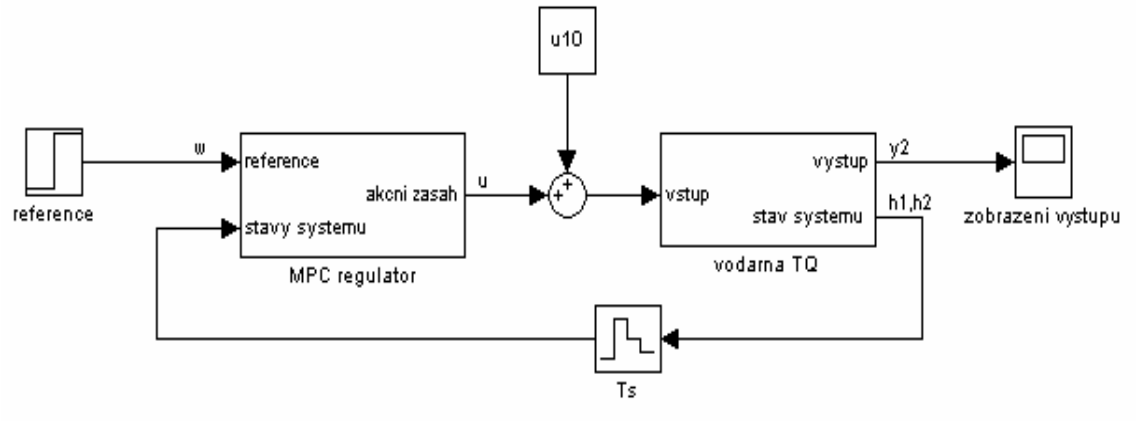
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.04077 & 0.0477 \\ 0.04077 & -0.04882 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.028 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Pro diskretizaci jsme zvolili periodu vzorkování T_s=1s a návrh budeme realizovat pro diskrétní tvar stavových rovnic.

Při návrhu MPC regulátoru vyjdeme z kritéria (3.12) respektive (3.16) a použijeme numerický tvar s možností zahrnout omezující podmínky na akční veličinu. Velikost akčního zásahu budeme volit s ohledem na omezení reálného modelu takto

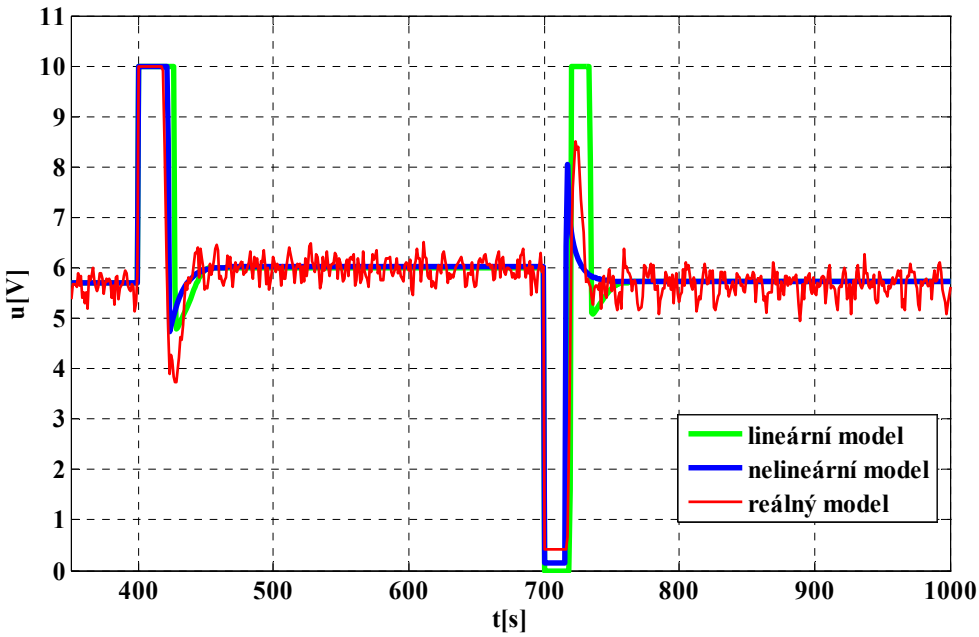
$$\boldsymbol{u}_{\min} = 0\ V, \qquad \boldsymbol{u}_{\max} = 10\ V.$$

Regulátor budeme realizovat v prostředí Simulink v Matlabu podle následujícího schématu obr. 4.4. Porovnávat budeme oba typy regulátorů pro sledování konstantního referenčního signálu ve tvaru skoku.

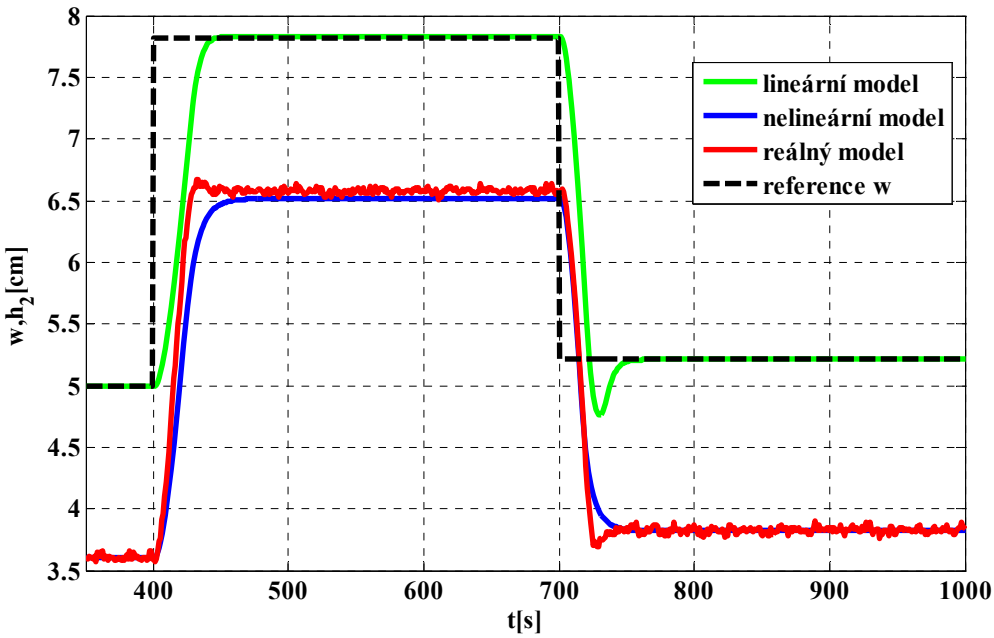


Obr. 4.4: Regulační obvod vodárny TQ s MPC regulátorem

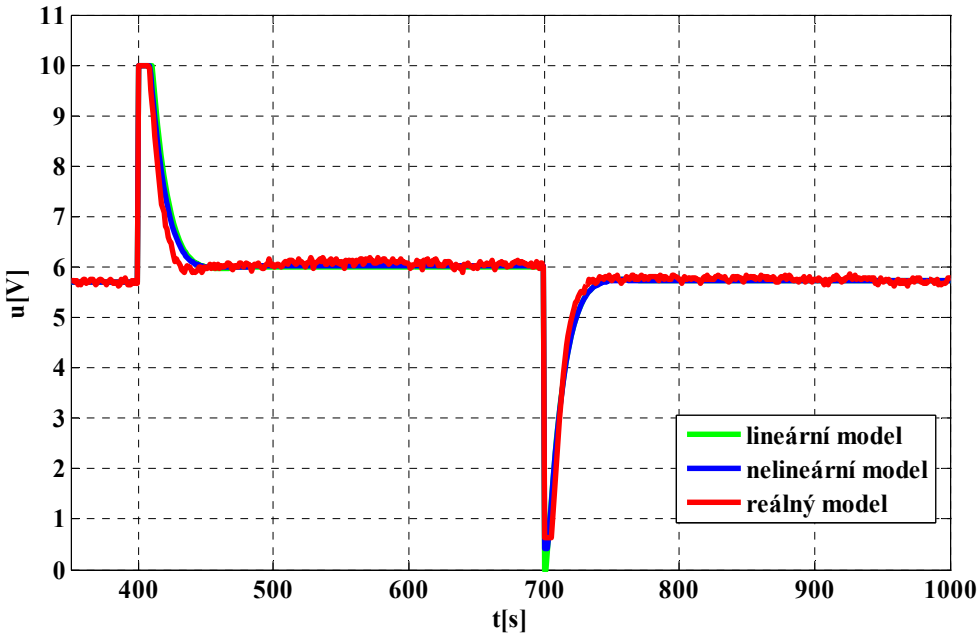
Na následujících obrázcích je ukázán návrh MPC regulátoru pro lineární a nelineární model s porovnáním se skutečným modelem vodárny TQ. Na obr. 4.5 a obr. 4.6 je ukázán návrh pro MPC regulátor vážící amplitudu akční veličiny, na obr. 4.7 a obr. 4.8 je ukázán návrh MPC regulátoru vážící změnu řízení.



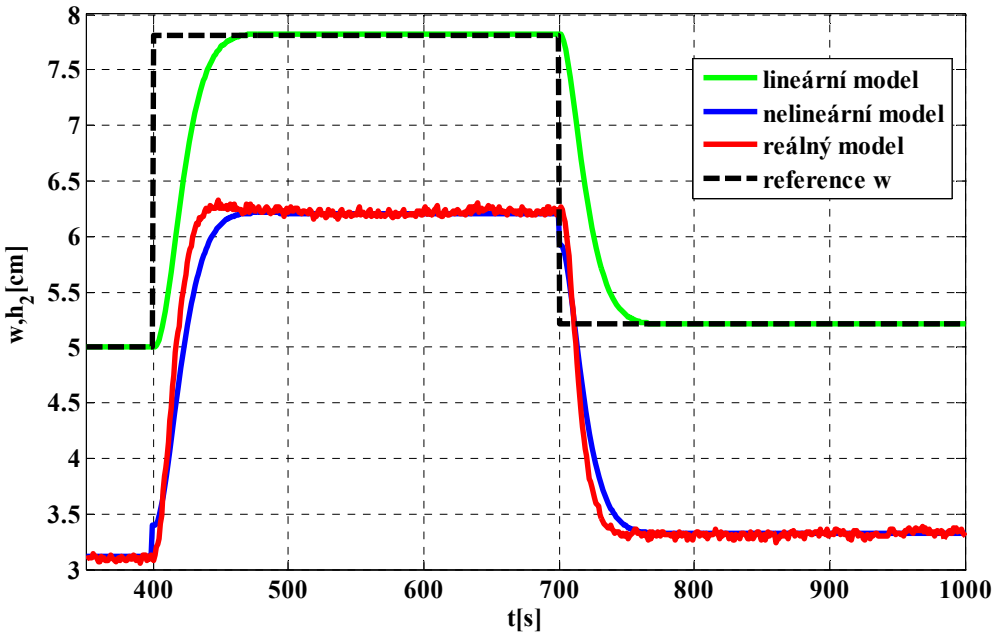
Obr. 4.5: Akční zásah s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$



Obr. 4.6: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$



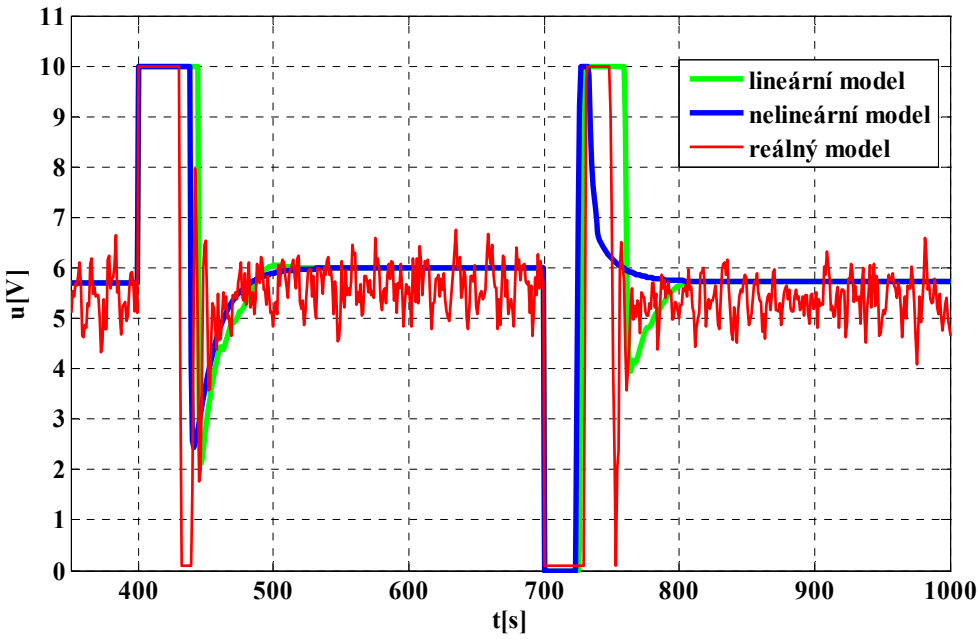
Obr. 4.7: Akční zásah s MPC regulátorem vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$, $\Delta u=10$



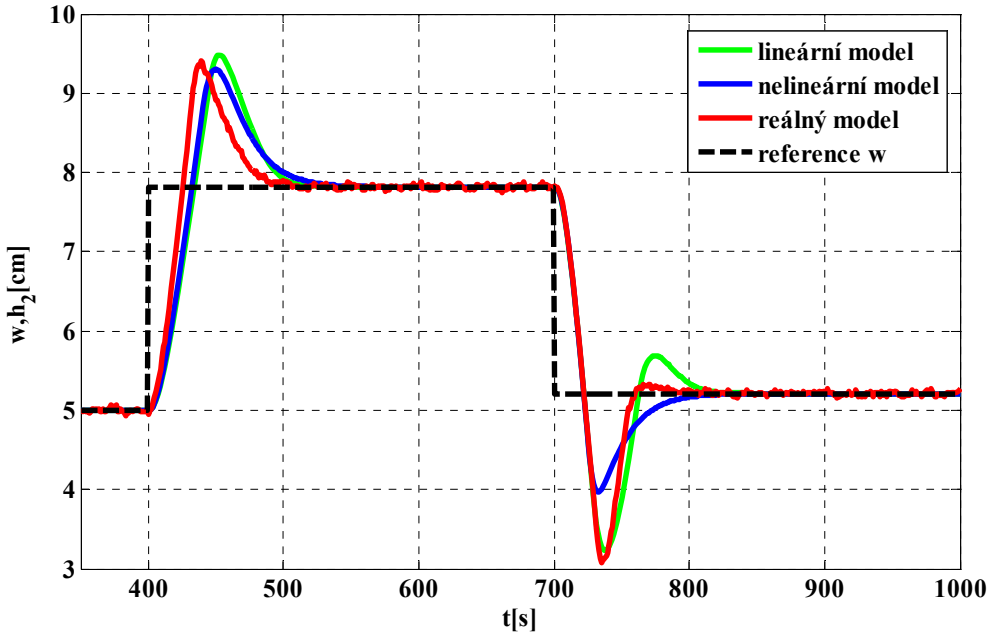
Obr. 4.8: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^6$, $\Delta u=10$

Na obr. 4.6 a obr. 4.8 vidíme, že soustava sleduje referenční signál pouze v případě lineárního modelu, u nelineárního modelu a reálného systému navrhnutý

regulátor není schopen zaručit požadovaného výstupu. V tomto případě musíme u regulátoru zaručit robustnost, a to vzhledem ke sledování referenční hodnoty i v případě malých změn vlastností řízené soustavy. Pro tento případ rozšíříme soustavu o sumátor regulační odchylky popsaný rovnicí (3.24). Výsledky simulací budeme porovnávat opět pro oba typy regulátorů vážící jak amplitudu, tak změnu řízení.

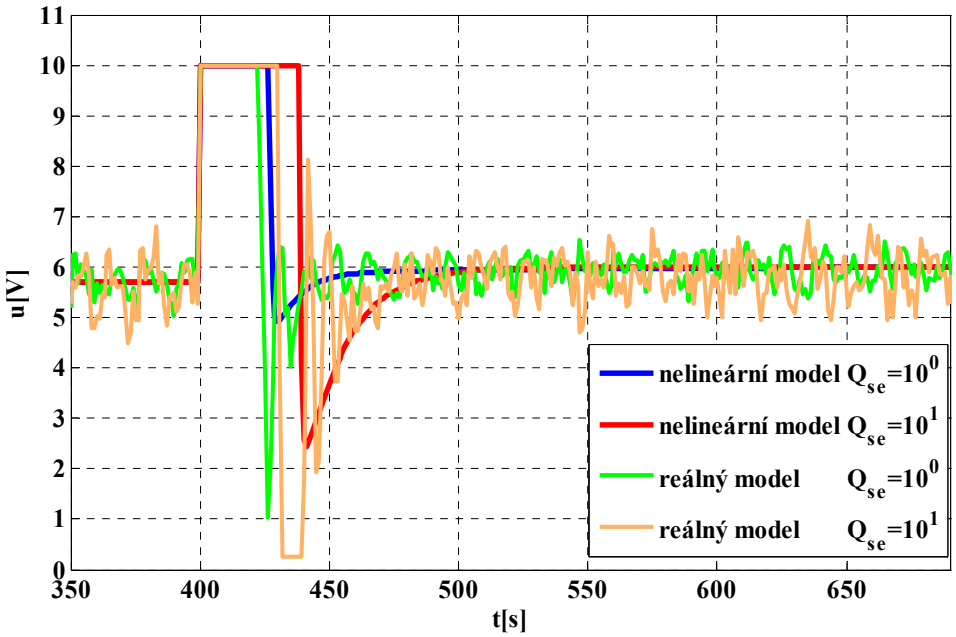


Obr. 4.9: Akční zásah s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ a $\boldsymbol{Q}_{se}=10^1$

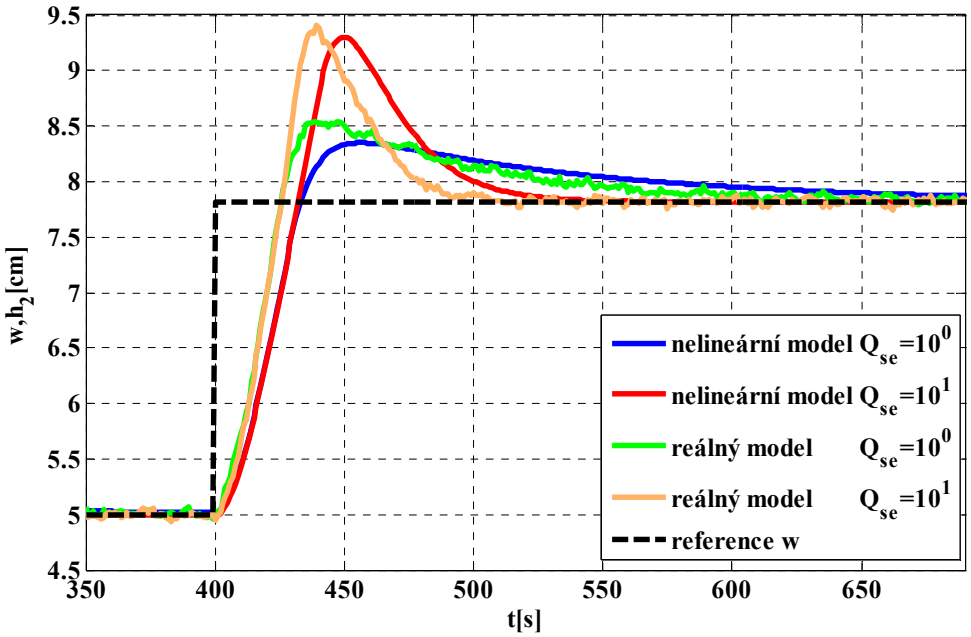


Obr.4.10: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$ a $\boldsymbol{Q}_{se}=10^1$

Z obr. 4.10 je vidět, že regulátor sleduje konstantní referenční trajektorii i pro nelineární a reálný systém s nulovou regulační odchylkou. Nyní porovnáme vliv váhové matice $\boldsymbol{Q}_{se}$ na výsledný průběh hladiny h_2 ve druhém válci.

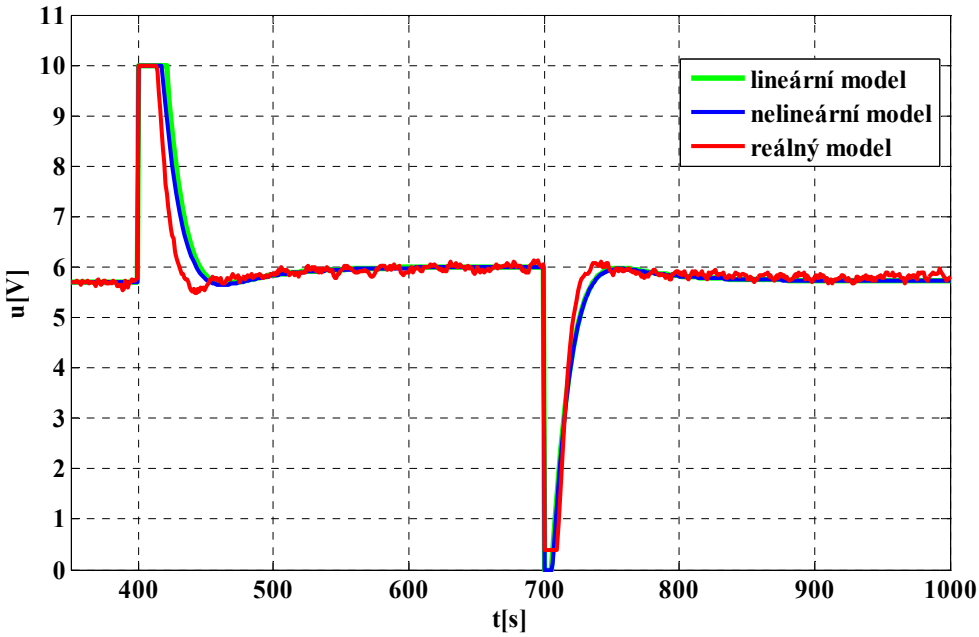


Obr. 4.11: Porovnání akčního zásahu s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$

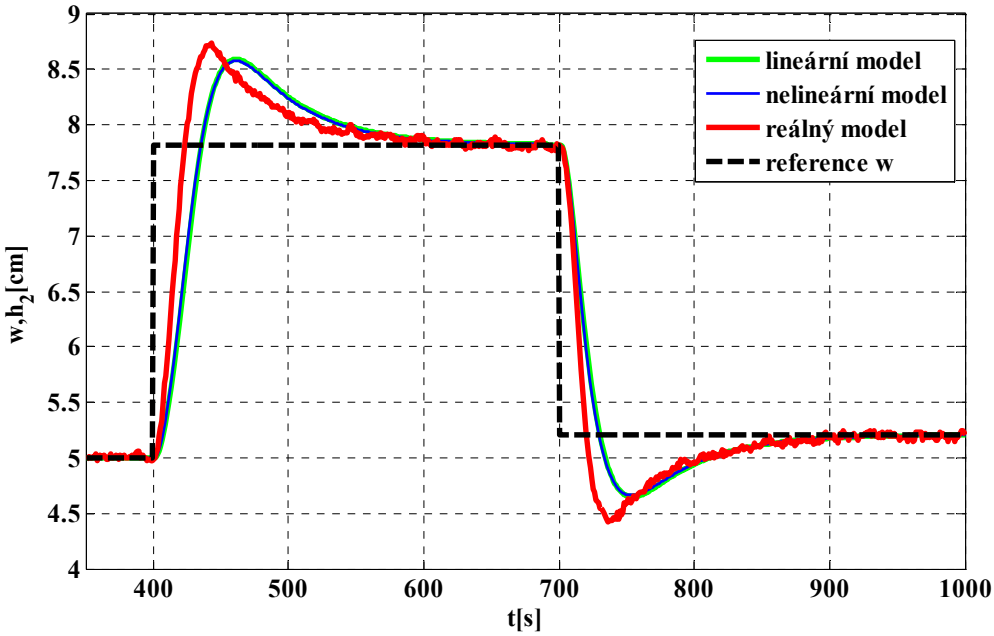


Obr. 4.12: Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící amplitudu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^3$

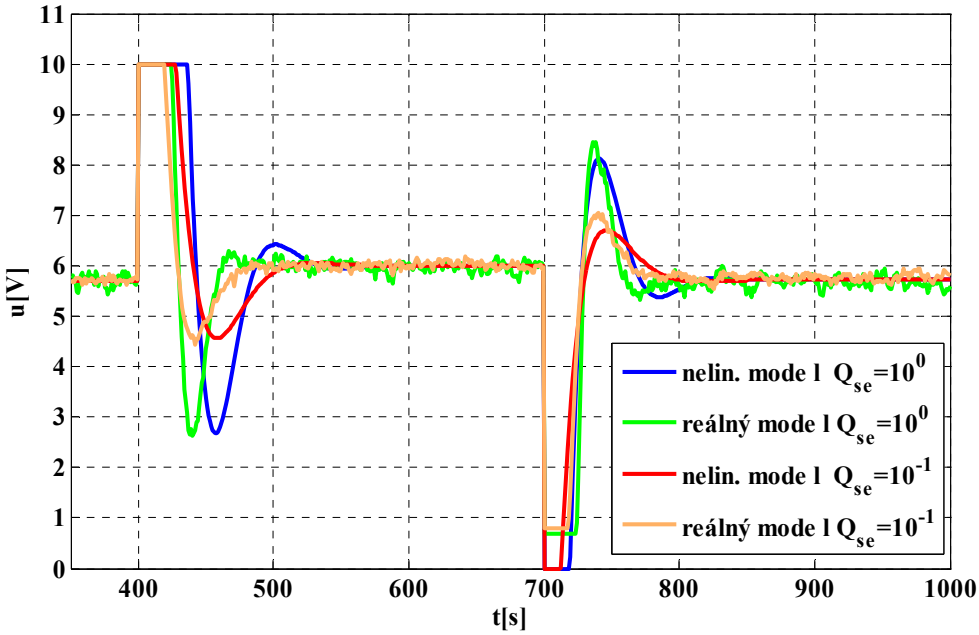
Stejné porovnání provedeme i pro MPC regulátor vážící změnu řízení. Na obr. 4.13 vidíme, že akční zásah je méně ovlivněn chybou než u předchozího typu regulátoru viz obr. 4.9. Na obr. 4.15 a obr. 4.16 je posouzen vliv váhové matice $\boldsymbol{Q}_{se}$ na výsledný průběh hladiny h_2 ve druhém válci. Na rychlost změny akčního zásahu jsme nekladli žádná omezení.



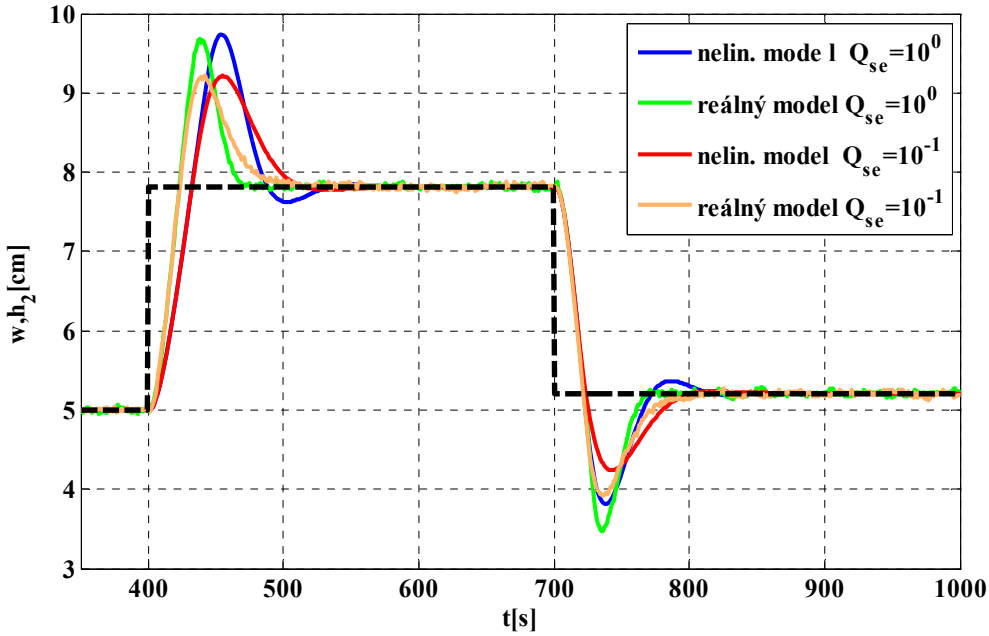
Obr. 4.13: Akční zásah s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^{1}$, $\boldsymbol{Q}_{se}=10^{-1,57}$



Obr. 4.14: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^{1}$, $\boldsymbol{Q}_{se}=10^{-1,57}$

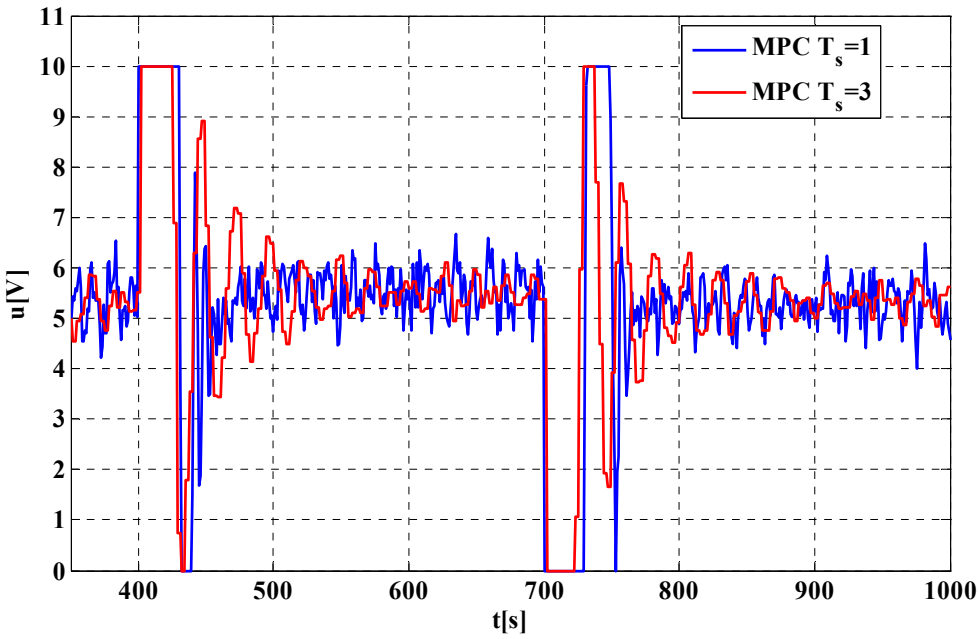


Obr. 4.15: Porovnání akčního zásahu s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$

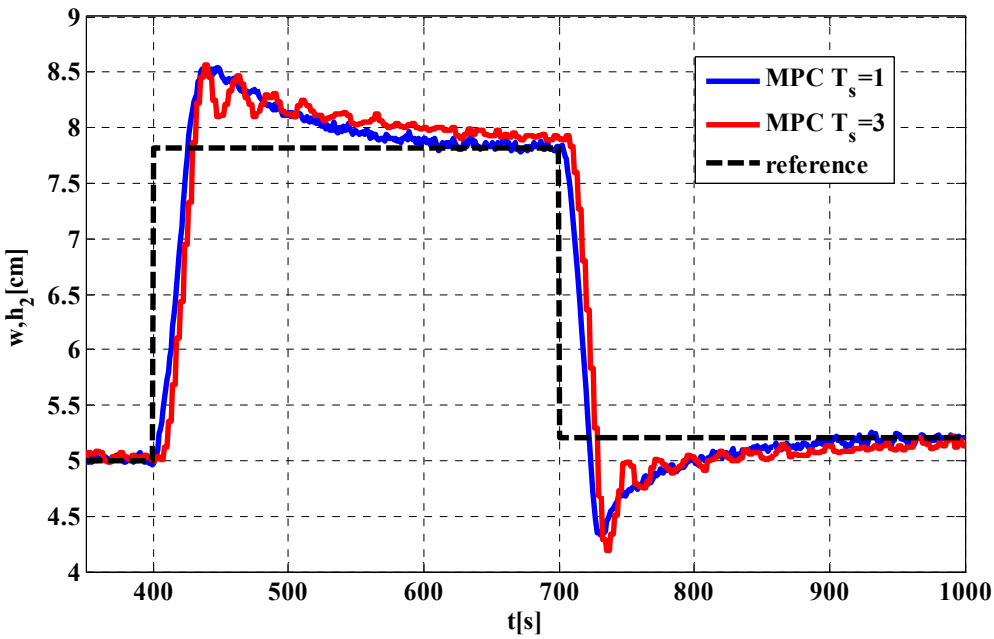


Obr. 4.16: Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a sumátorem regulační odchylky vážící změnu akční veličiny a pro váhu řízení $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R}=10^1$

Doposud jsme periodu vzorkování uvažovali rovnu T_s=1. Na obr. 4.17 a obr. 4.18 je posouzen vliv periody vzorkování celé regulační smyčky. Při měření na reálném modelu se ukázalo, že vyšších hodnotách periody vzorkování dochází ke ztrátě stability celého regulačního obvodu a v systému se objevují oscilace.



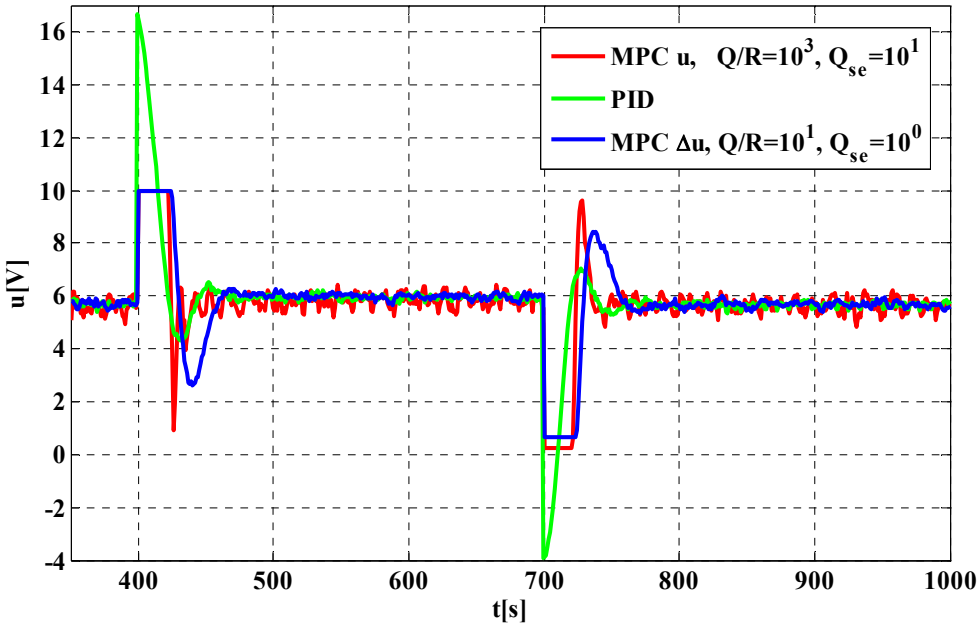
Obr. 4.17: Akční zásah s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny pro $\boldsymbol{Q}=10^3$ a $\boldsymbol{Q_{se}}=10^0$



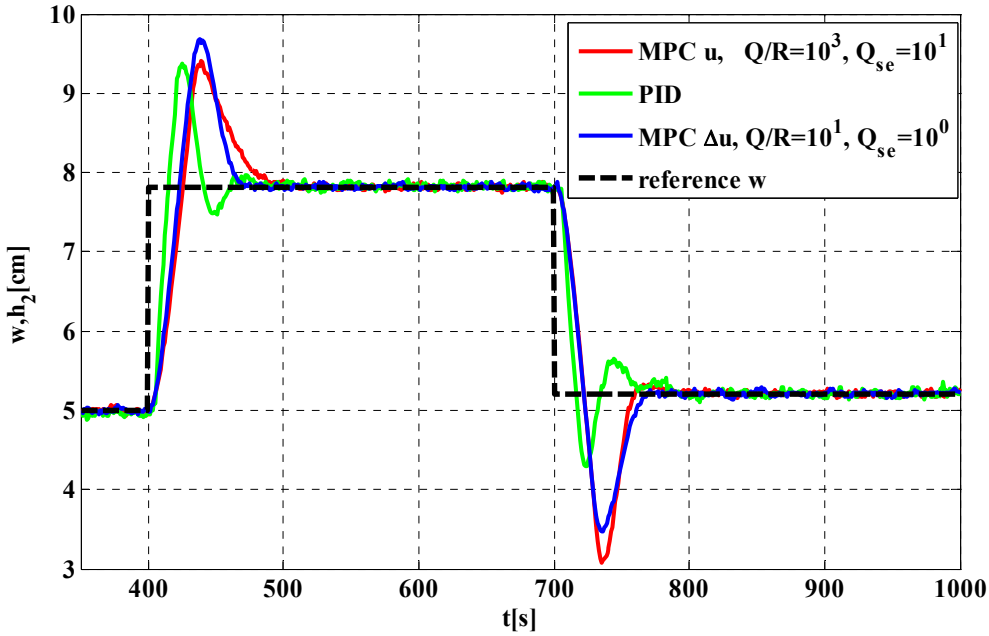
Obr. 4.18: Výstup hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem vážící amplitudu akční veličiny pro $\boldsymbol{Q}=10^3$ a $\boldsymbol{Q_{se}}=10^0$

4.3 Porovnání MPC regulátoru s PID regulátorem

Nyní porovnáme navržené MPC regulátory s PID regulátorem. Na obr. 4.19 je vidět, že akční zásah PID regulátoru přesahuje rozsah vstupního napětí čerpadla na vodárně a čerpadlo se nachází na krátkou dobu v saturaci, což vzhledem k celkové době regulace je zanedbatelné. Z obr. 4.20 vidíme, že doba regulace je pro všechny typy regulátorů řádově stejná a její hodnota činí 100 s.

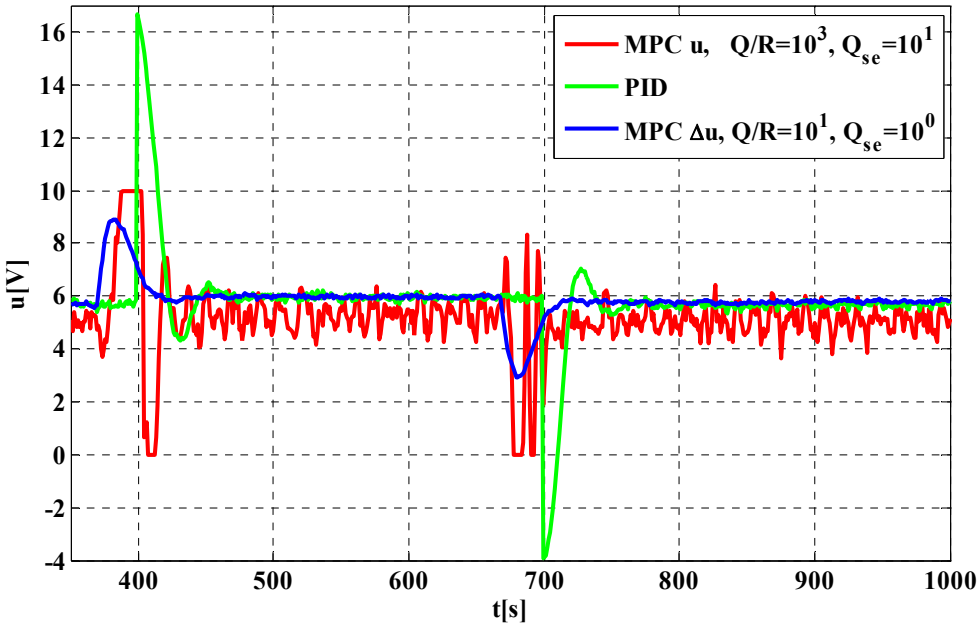


Obr. 4.19: Průběh akčního zásahu regulátorů

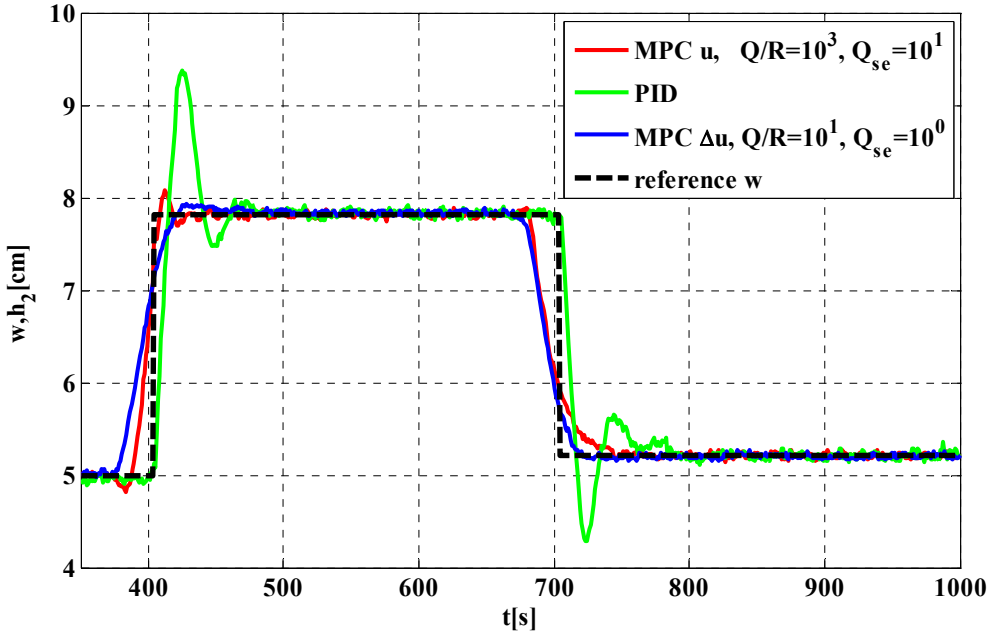


Obr. 4.20: Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci

Doposud jsme u MPC regulátoru předpokládali, že neznáme referenční trajektorii na dobu predikce T_p, ale pouze v daném okamžiku. Budeme tedy nadále uvažovat, že referenční trajektorii předem známe po dobu predikce.Výsledné chování regulátorů lze porovnat na obr. 4.22 s dobou predikce rovnu T_p=30s a akčním zásahem na obr. 4.21.



Obr. 4.21: Průběh akčního zásahu regulátorů



Obr. 4.22: Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci

4.4 Návrh MPC regulátoru s Kalmanovým filtrem

V předchozí kapitole jsme ukázali návrh MPC regulátoru jako zpětnovazebního stavového regulátoru. V případě, že všechny stavové veličiny nelze měřit nebo na ně působí porucha, můžeme k jejich odhadu použít pozorovatel stavu. Ten lze použít pouze za předpokladu, že řízený systém je pozorovatelný viz [4], [5]. Při návrhu se využívá tzv. separační princip (certainty equivalence principle) viz [8] a [9], který nám dovoluje navrhnout stavový regulátor a pozorovatele stavu nezávisle. Navrhneme-li pozorovatele stavu tak, aby minimalizoval střední kvadratickou chybu odhadu stavu, nazýváme takový optimální pozorovatel stavu Kalmanův filtr viz [8] a [14].

4.4.1 Kalmanův filtr

K vyřešení úlohy návrhu Kalmanova filtru využíváme vnitřního (stavového) popisu systému. Podmínkou řešitelnosti úlohy filtrace, formulované pomocí stavového popisu, je možnost odhadovat stavy systému na základě pozorování vstupů a výstupů systému. V deterministické formulaci lze k odhadování stavu sestrojit pozorovatel stavu, ve stochastické formulaci navrhujeme optimální pozorovatel stavu (Kalmanův filtr) ve smyslu optimálního lineárního odhadu minimalizující střední kvadratickou chybu (LMS odhad) [8], [14].

4.4.2 Formulace problému

Uvažujme lineární diskrétní stochastický systém

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{v}(k), \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{e}(k), \end{aligned} \tag{4.13}$$

kde šum procesu $\boldsymbol{v}(k)$ a šum měření $\boldsymbol{e}(k)$ jsou diskrétní bílé šumy s nulovou střední hodnotou

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix}\right\} = 0 \tag{4.14}$$

a známou kovarianční maticí

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{e}(k) \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^T & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}\delta\left(k_1 - k_2\right). \tag{4.15}$$

Cílem je najít takovou posloupnost lineárních odhadů stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$ a kovariančních matic chyb odhadu

$$\boldsymbol{P}(k) = \mathrm{E}\left\{\left(\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k)\right)\left(\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k)\right)^T\right\},$$

minimalizující kritérium

$$J_{\mathrm{LMS}}(k) = \mathrm{trace}\,\boldsymbol{P}(k),$$

kde trace $\boldsymbol{P}(k)$ je součet prvků na diagonále matice $\boldsymbol{P}$.

Jestliže v k-tém kroku známe apriorní odhad stavu $\boldsymbol{x}(k)$ (tj. odhad využívající data do času k-1), jehož podmíněnou střední hodnotu značíme $\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1)$ a kovarianční matici chyby odhadu stavu $\boldsymbol{P}(k|k\text{-}1)$, pak po změření hodnoty výstupu $\boldsymbol{y}(k)$ chceme tyto hodnoty aktualizovat a získat aposteriorní (zahrnující měření dat v čase k) odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k)$ a příslušnou kovarianční matici $\boldsymbol{P}(k|k)$. Tato část popisuje tzv. datový (filtrační) krok algoritmu. Budeme-li pokračovat dále, tak na základě aposteriorního odhadu stavu a kovarianční matice v čase k chceme nalézt apriorní hodnoty těchto veličin $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1 \mid k)$ a $\boldsymbol{P}(k+1|k)$ v čase k+1. Tento krok algoritmu se nazývá časový (predikční). Podrobnější popis výpočtu Kalmanova filtru a LMS odhadu lze nalézt v [8] , [10] a [14].

4.4.3 Rozšířený Kalmanův filtr

V předchozí části jsme uvažovali lineární stochastický systém pro návrh Kalmanova filtru. Protože model vodárny TQ představuje nelineární systém, musíme použít modifikaci k odhadu stavu pro nelineární stochastické systémy, nazvanou rozšířený Kalmanův filtr (extended Kalman filter). Základní myšlenkou rozšířeného Kalmanova filtru je lokální aproximace na základě linearizovaného modelu systému v okolí vhodně zvoleného bodu viz [8].

Předpokládejme nelineární diskrétní stochastický systém

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \mathbf{f}\left(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), \boldsymbol{v}(k)\right), \\ \boldsymbol{y}(k) &= \mathbf{g}\left(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), \boldsymbol{e}(k)\right), \end{aligned} \tag{4.16}$$

kde $\boldsymbol{v}(k)$ a $\boldsymbol{e}(k)$ jsou bílé diskrétní šumy se střední hodnotou (4.14) a kovarianční maticí ve tvaru (4.15).

Nyní linearizujeme výstupní rovnici v okolí nejlepšího dostupného odhadu, tedy apriorních hodnot $\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1)$, $u(k)$ a $\hat{\boldsymbol{e}}(k \mid k-1) = 0$. Tím můžeme najít datový krok filtru pro linearizovaný model. Pro odhad stavu platí

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k) = \hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1) + \boldsymbol{L}(k)\left(\boldsymbol{y}(k) - \mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1), \boldsymbol{u}(k), 0\right)\right), \tag{4.17}$$

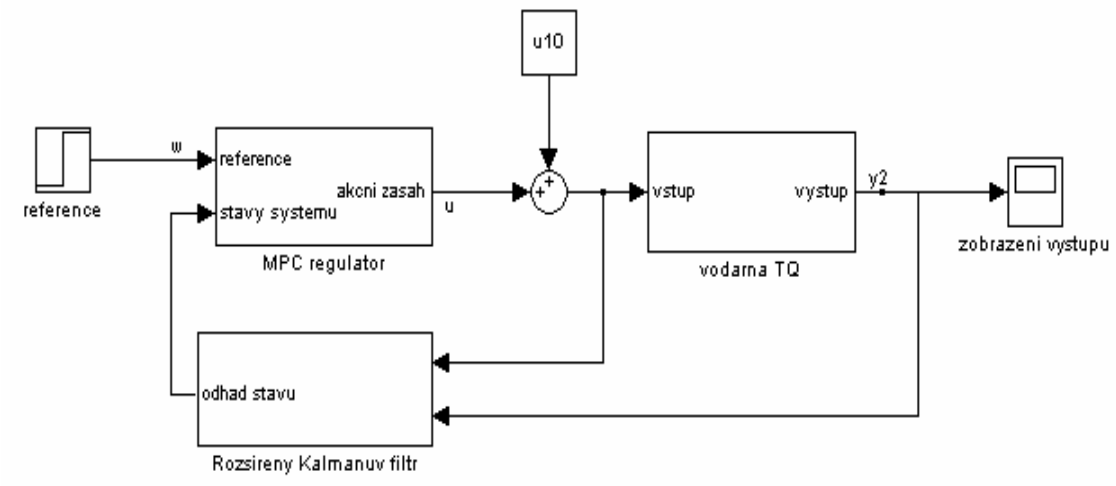
kde $\boldsymbol{L}(k)$ je Kalmanovo zesílení.

Predikční krok algoritmu je pro odhad střední hodnoty stavu dán rovnicí

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1 \mid k) = \mathbf{f}\left(\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k), \boldsymbol{u}(k), 0\right). \tag{4.18}$$

Kvadraticky optimálním řízení využívající pouze měření výstupu najdeme tak, že tedy určíme optimální odhad stavu $\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1)$, minimalizující střední kvadratickou chybu odhadu a využívající dostupných dat v čase k-1. Tento odhad nalezneme pomocí Kalmanova filtru. Poté určíme a aplikujeme kvadraticky optimální zákon řízení $\boldsymbol{u}(k)$, minimalizující kritérium regulátoru pro deterministický systém zanedbáním stochastické složky v modelu, kde neznámý stav $\boldsymbol{x}(k)$ nahradíme jeho optimálním odhadem $\hat{\boldsymbol{x}}(k \mid k-1)$.

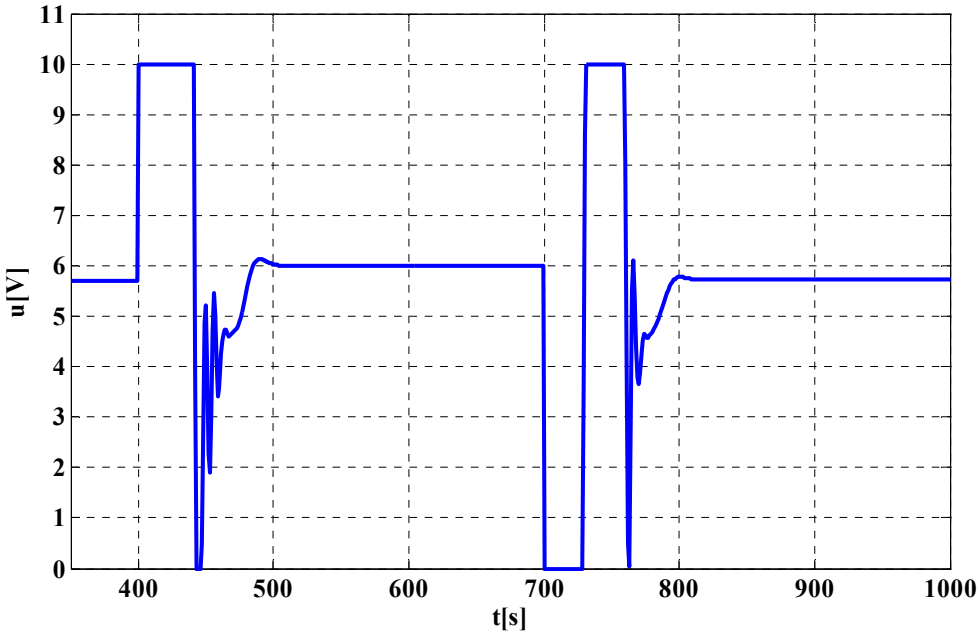
Pro návrh vyjdeme ze schématu na obr. 4.23. Měřit budeme pouze výstup hladiny h_2 ve druhém válci. Při použití Kalmanova filtru jako optimálního pozorovatele stavu je důležité, aby vytvořený nelineární model systému co nejvíce odpovídal reálnému systému, jinak dojde k rozladění filtru.



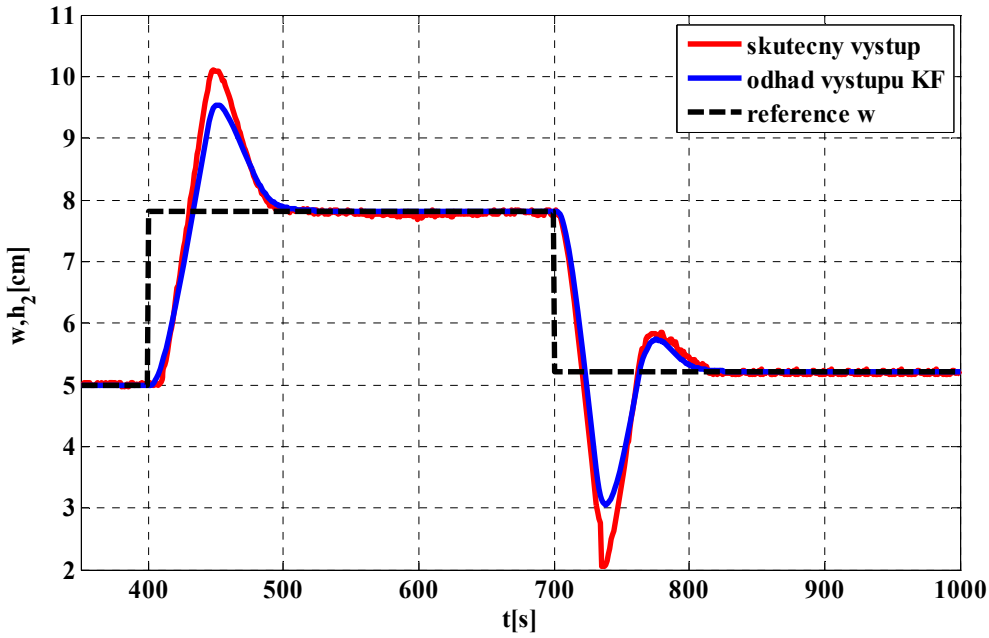
Obr. 4.23: Regulační obvod vodárny TQ s MPC regulátorem a pozorovatelem stavu

Porovnávat budeme návrh pro oba typy MPC regulátorů, tj. vážící amplitudu akční veličiny a vážící změnu řízení. Z průběhů akčního zásahu na obr. 4.24 a obr. 4.26 můžeme vidět, že se nám podařilo odstranit poruchovou veličinu z akčního zásahu. Na obr. 4.25 a obr. 4.27 můžeme vidět průběh výstupu na reálném systému s porovnáním výstupu odhadnutém pomocí Kalmanova filtru.

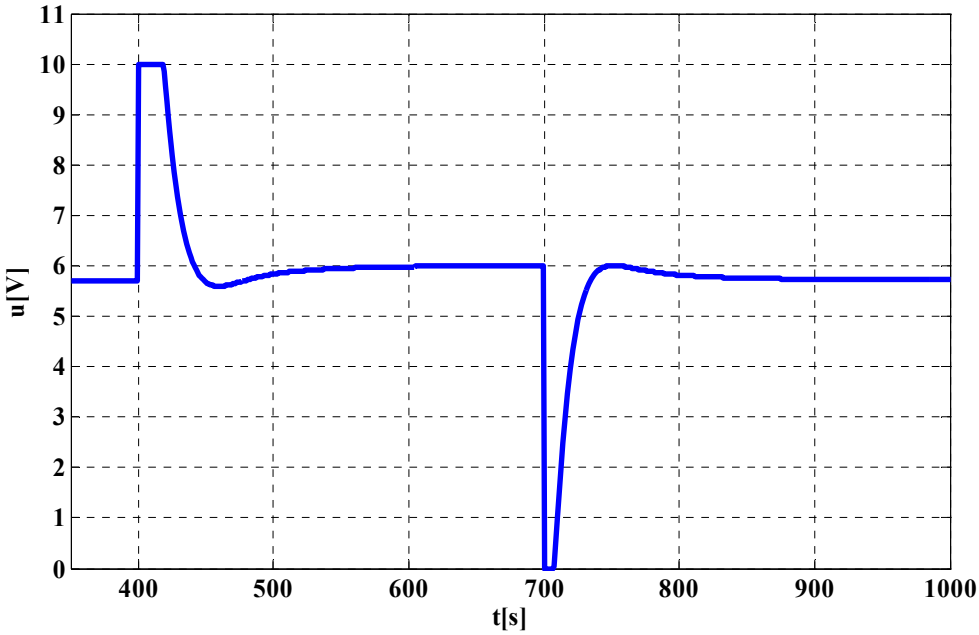
V této kapitole jsme navrhli MPC regulátory pro reálný model vodárny TQ, vážící jak amplitudu akční veličiny viz obr. 4.9 a obr.4.10, tak změnu řízení viz obr. 4.13 a obr. 4.14. Tyto regulátory jsme následně porovnali s PID regulátorem a na závěr jsme odladili rozšířený Kalmanův filtr pro reálný model vodárny TQ.



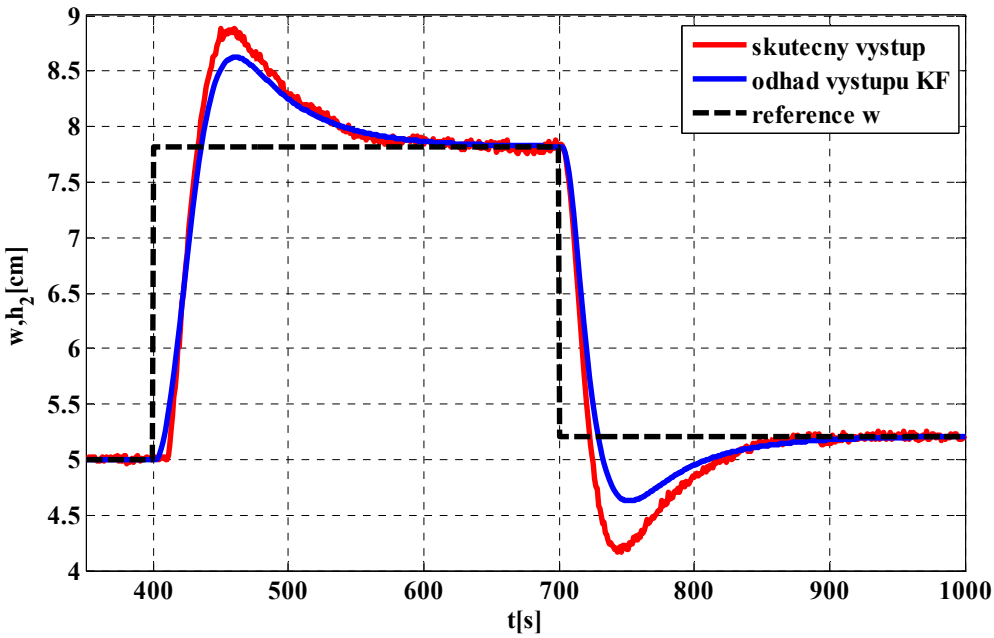
Obr. 4.24: Akční zásah s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící amplitudu akční veličiny



Obr. 4.25: Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící amplitudu akční veličiny



Obr. 4.26: Akční zásah s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící změnu akční veličiny



Obr. 4.27: Průběh výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátorem a Kalmanovým filtrem vážící změnu akční veličiny

Kapitola 5

Závěr

V rámci této práce byla provedena identifikace modelu vodárna TQ, která se nachází v laboratoři K26 katedry řídicí techniky. Při identifikaci bylo možné zanedbat vliv rozběhu čerpadla vzhledem na pomalou dynamiku celého systému. Matematický model vodárny představuje nelineární systém druhého řádu uvedený v kapitole 2. Při identifikaci se ukázalo, že výstupy z čidel výšek hladin jsou silně zatíženy chybou (šumem) a odečtené hodnoty výšek hladin v obou válcích neodpovídají skutečným hodnotám. Proto bylo nutné stanovit offset obou snímačů, aby odečtené hodnoty odpovídaly reálným hodnotám. Nejvíce citlivým prvkem se ukázalo nastavení otevření obou ventilů, které je možné ovládat pouze ručně. Nastavení obou ventilů je velmi hrubé a to má velký vliv na opětovném nastavení stejného otevření. Malá změna otevření ventilů má velký vliv na chování celého systému.

Dále byly navrženy dva typy MPC regulátorů s omezeními, vážící amplitudu akční veličiny a vážící změnu řízení, s požadavkem na sledování konstantní trajektorie výstupu hladiny ve druhém válci. Při návrhu se ukázalo, že je nutno regulátory modifikovat s přihlédnutím na to, že linearizací nelineárního modelu dostáváme lineární model pro konkrétní pracovní bod. Regulátor proto musí být schopen sledovat referenční trajektorii při konečně velkých změnách vlastností řízené soustavy. Daných vlastností jsme dosáhli zavedením diskrétního integrátoru (sumátoru) řízeného regulační odchylkou. Tento typ regulátoru není součástí klasické teorie návrhu MPC regulátoru a jeho podobu jsem v rámci úpravy minimalizačního kritéria odvodil v kapitole 3.

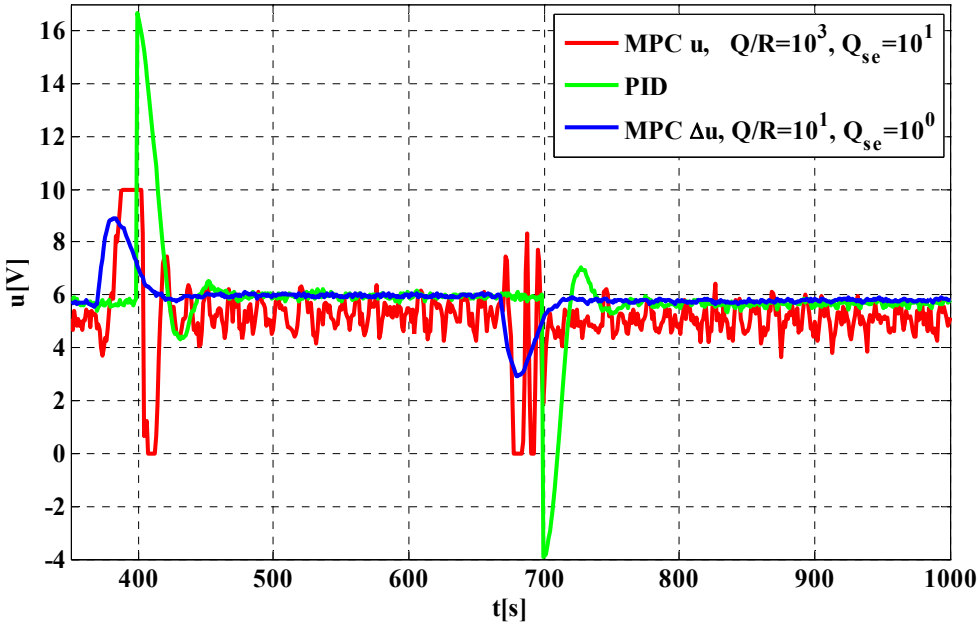
Pro regulátor vážící změnu řízení se při měření ukázalo, že do akčního zásahu zanáší menší hodnotu poruchy než u regulátoru vážící amplitudu akční veličiny. Doba regulace je u obou typů regulátorů přibližně stejná a oba regulátory sledují konstantní trajektorii s nulovou regulační odchylkou.

Odstranění šumu z akčního zásahu se podařilo odladěním rozšířeného Kalmanova filtru a přidáním do regulační smyčky jako optimální pozorovatel stavu. Tento typ filtru využívající k odhadu pouze výstupních dat ze systému lze použít i v případě, kdy stavy systému vodárny, tj. výška hladiny v prvním a druhém válci, nejsou přímo měřitelné a nebo jsou zatíženy velkou chybou.

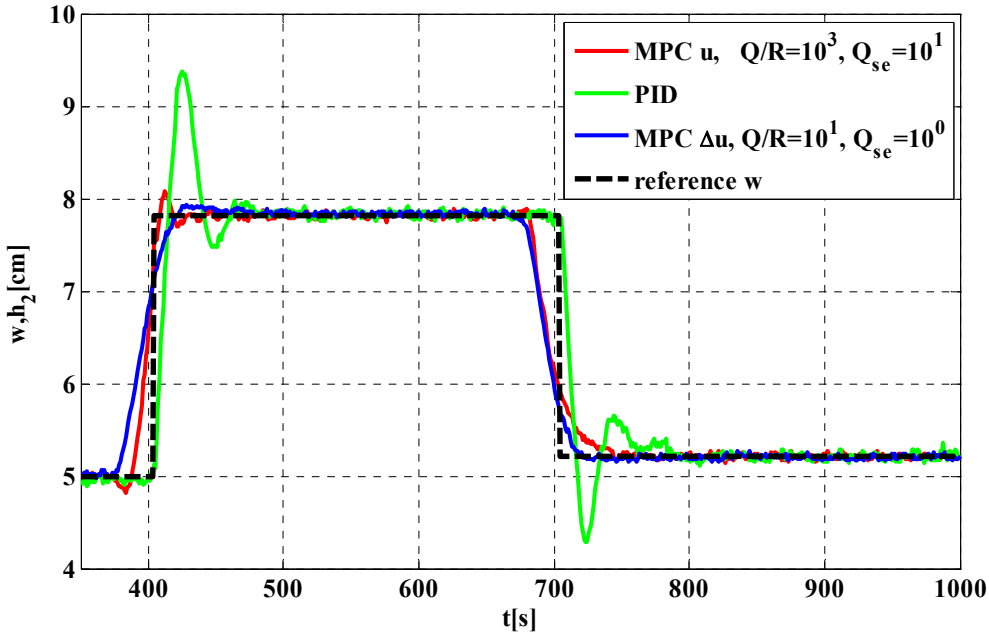
Při porovnání MPC regulátoru s PID regulátorem se ukázalo, že oba typy regulátorů dosahují přibližně stejných vlastností při sledování konstantní trajektorie za předpokladu, že neznáme hodnotu referenční trajektorie na dobu predikce u MPC regulátoru. V tomto případě lze vidět výhodu PID regulátoru při zmenšování výšky hladiny ve druhém válci, kdy PID regulátor dosahuje menšího překmitu, ale s překročením povoleného rozsahu akčního zásahu po krátkou dobu regulace.

Pokud MPC regulátor zná hodnotu referenční trajektorie na dobu predikce, dosahuje MPC regulátor lepších výsledků než PID regulátor jak ukazuje obr. 5.2. Nejlepších výsledků dosahuje MPC regulátor vážící změnu řízení, kde se podařilo odstranit překmit z výstupu hladiny ve druhém válci a regulátor dokáže reagovat plynule na změnu trajektorie před její změnou v závislosti na délce doby predikce.

Akční zásah MPC regulátoru dodržuje hranice určené omezeními stanovenými při návrhu regulátoru, jak ukazuje obr. 5.1.



Obr. 5.1: Průběh akčního zásahu regulátorů



Obr. 5.2: Porovnání výstupu hladiny h_2 ve druhém válci s MPC regulátory a PID regulátorem

Pro otestování robustnosti navržených regulátorů by bylo zajímavé porovnat chování pro změny otevření obou ventilů na vodárně TQ během regulace, to ale nebylo

během měření možné, protože nastavení ventilů není možno nastavit jednoznačně a výsledky by byly proto zavádějící.

V rámci práce jsem také vytvořil demo ukázku MPC regulátoru pro Vodárnu TQ pro Simulink v Matlabu, který lze použít pro potřeby výuky. Při návrhu řízení na reálném modelu se také ukázalo, že teoretické poznatky v rámci teorie řízení lze úspěšně aplikovat a fungují správně pouze za předpokladu správného použití a nesmí se aplikovat hrubou silou.

Literatura

[1] FUKA, J., JOHN, J. a KUTIL, M. *Učebnice SAM / SRI* [online]. Poslední revize 2005-03-01, http://dce.felk.cvut.cz/sari.

[2] ŠTEFFL, L. (2006). *Podpora výuky regulační techniky v bakalářském studiu (model Vodárna) – Bakalářská práce.* Fakulta elektrotechnická, ČVUT Praha.

[3] NOSKIEVIČ, P. (1999). *Modelování a identifikace systémů.* Vydavatelství Montanex, Ostrava.

[4] CHEN, C. T. (1998). *Linear System Theory and Design.* Oxford University Press.

[5] HAVLENA, V. a ŠTECHA, J. (1999). *Teorie dynamických systémů.* Vydavatelství ČVUT, Praha.

[6] HAVLENA, V. a FINDEJS, J. (2005). *Application of Model Predictive Control to Advanced Combustion Control.*

[7] ROUBAL, J. (2006). *Model Predictive Control of 2D Systems- Ph.D. thesis.* Fakulta elektrotechnická, ČVUT Praha.

[8] HAVLENA, V. a ŠTECHA, J. (2000). *Moderní teorie řízení.* Vydavatelství ČVUT, Praha.

[9] MACIEJOWSKI, J. M. (2002). *Predictive Control with Constraints.* Prentice Hall, Harlow, England

[10] ROUBAL, J., PEKAŘ, J., PACHNER, D. a HAVLENA, V. (2005). *Moderní teorie řízení – Cvičení.* Vydavatelství ČVUT, Praha.

[11] ŠTECHA, J. (2000). *Optimální rozhodování a řízení.* Vydavatelství ČVUT, Praha.

[12] JOHN, J. (1998). *Systémy a řízení.* Vydavatelství ČVUT, Praha.

[13] FRANKLIN, G. F. a POWELL, J. D. (2005). *Feedback Control of Dynamic Systems.* Prentice Hall

[14] KAILATH, T., SAYED, A. H. a HASSIBI, B. (2000). *Linear Estimation.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey

Příloha A

Obsah přiloženého CD

Součástí práce je CD, na kterém jsou uloženy zdrojové kódy.

- **Dokumentace** - v tomto adresáři jsou uloženy zdrojové kódy této dokumentace, která byla napsána v programu Microsoft Office Word. Tento dokument je zde i ve formátu PDF.
- **Identifikace** - v tomto adresáři jsou uloženy zdrojové kódy pro Matlab, které byly použity pro identifikaci systému.
- **Analýza** - v tomto adresáři jsou uloženy zdrojové kódy pro Matlab, které byly použity pro analýzu návrhu MPC regulátoru.
- **Regulace** - v tomto adresáři jsou uloženy zdrojové kódy pro Matlab, které byly použity pro návrh a aplikaci regulátorů.