ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Algoritmy inerciální navigace pro aplikace v biomedicíně

Praha 2008 Autor: Radomír Vach

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne _____ _____

podpis

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce Ing. Otakarovi Šprdlíkovi za jeho trpělivost vedení, připomínky a poznámky k práci. Dále bych chtěl poděkovat všem, kteří mě při práci podporovali.

Abstrakt

Cílem práce je vytvoření knihovny funkcí implementujících algoritmy inerciální navigace. Knihovna je určena pro následné využití v oblasti sledování stavu člověka či libovolného zařízení pomocí inerciálních senzorů, přičemž nás nebude zajímat jeho poloha v prostoru. Pro tento účel budeme využívat různé druhy Kalmanových filtrů, které nám upřesní stav člověka z naměřených hodnot senzorů, které jsou ovlivněny rušením, šumem, a proto nám nedávají přesné údaje.

Abstract

The aim of this thesis is to create a library of functions that implement algorithms of inertial navigation. The library is meant to be farther used in the field of monitoring the state (condition) of a human being or any device whatsoever - which shall be done by means of inertial sensors while the position of the human being or device shall not be taken into consideration. For this purpose we shall use different types of Kalman filters to estimate the state (condition) of a human being on the basis of measured values of sensors which are influenced by noise. This influence results in the fact that data gained by the measurement is inaccurate.

České vysoké učení technické v Praze - Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky *Školní rok:* 2006/2007

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student: Radomír V a c h

Obor: Technická kybernetika

Název tématu: Algoritmy inerciální navigace pro aplikace v biomedicíně

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je vytvoření knihovny funkcí implementujících algoritmy inerciální navigace. Knihovna je určena pro následné využití v oblasti sledování stavů člověka pomocí inerciálních senzorů, ne jeho přesné polohy, a to v různých prostředích, proto implementujte pouze navigaci bez využití referenčních systémů (např. GPS).

1. Seznamte se s algoritmy pro určení orientace a polohy inerciální jednotky, zaměřte se především na algoritmy využívající Kalmanovy filtrace.
2. Sestavte knihovnu funkcí v Matlabu umožňující aplikaci algoritmů inerciální navigace.
3. Implementované navigační algoritmy s využitím dostupných prostředků porovnejte ve výpočetní náročnosti a v přesnosti odhadů z dat měřených během pohybů člověka nebo během pohybů s podobnými charakteristikami.

Seznam odborné literatury: Dodá vedoucí práce.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Otakar Šprdlík

Termín zadání diplomové práce: zimní semestr 2006/2007

Termín odevzdání diplomové práce: leden 2008

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

L.S.

v zast.
prof. Ing. Zbyněk Škvor, CSc.
děkan

V Praze dne 21.02.2007

Obsah:

1 Úvod ... 1
1.1 Cíl práce ... 1
1.2 Použité názvosloví ... 2
1.2.1 Dolní a horní indexy ... 2
1.2.2 Pohyb těles (Kinematika) ... 2
1.2.3 Definování soustav souřadnicových systémů ... 3
1.2.4 Teorie lineárních systémů ... 6
1.2.5 Kalmanova filtrace a stochastická teorie ... 7
2 Matematické základy pro popis algoritmů ... 8
2.1 Teorie stochastických lineárních systémů ... 8
2.2 Kalmanův filtr (KF) ... 12
2.3 Rozšířený Kalmanův filtr (EKF) ... 16
2.4 Unscented Kalmanův filtr (UKF) ... 18
2.5 Mechanický pohyb ... 22
2.6 Kvaterniová algebra ... 23
3 Senzory ... 28
3.1 Gyroskopy ... 28
3.2 Akcelerometry ... 31
3.3 Magnetometry ... 32
4 Modely systémů v Inerciální Navigační Soustavě ... 33
4.1 Gimballed systém ... 33
4.2 Strapdown systém ... 33
4.3 Sloučení technik pro odhad orientace ... 34
5 Modelování SDINS soustavy s použitím gyroskopů a akcelerometrů ... 37
5.1 Navigační rovnice ... 38
5.2 SDINS stavový prostor modelu na kvaterniové bázi ... 39
5.2.1 Rotační model ... 39
5.2.2 Translační model ... 40
5.2.3 Zjednodušený lokální navigační model ... 41
5.3 Spojení inerciálních senzorových dat pro odhad orientace ... 42
5.3.1 Procesní model ... 43
5.3.2 Model měření ... 44
6 Modelování SDINS s použitím gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů ... 46

6.1 Algoritmus pro konvergenci kvaternionů ... 46
6.2 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s EKF algoritmem ... 49
6.2.1 Procesní model ... 49
6.2.2 Model měření ... 51
6.2.3 Algoritmus ... 52
6.3 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s UKF ... 53
6.3.1 Procesní model ... 54
6.3.2 Model měření ... 55
6.3.3 Algoritmus ... 55
6.4 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s Complimentary KF ... 58
6.4.1 Procesní model ... 59
6.4.2 Model měření ... 59
6.4.3 Algoritmus ... 59
6.5 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s úplným EKF ... 62
6.5.1 Procesní model ... 62
6.5.2 Model měření ... 62
6.5.3 Algoritmus ... 63
7 Experimenty ... 64
7.1 Skutečné a odhadnuté průběhy + šum ... 64
7.1.1 EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum ... 64
7.1.2 Rozšířený KF s externím Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum ... 66
7.1.3 Complimentary KF pro MARG + šum ... 68
7.1.4 Unscented KF pro MARG + šum ... 70
7.1.5 Úplný EKF pro MARG + šum ... 72
7.2 Chyby s šumem a biasem ... 74
7.2.1 EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum + bias ... 74
7.2.2 Rozšířený KF s externím Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum + bias ... 75
7.2.3 Complimentary KF pro MARG + šum + bias ... 77
7.2.4 Unscented KF pro MARG + šum + bias ... 78
7.2.5 Úplný EKF pro MARG + šum + bias ... 79
7.3 Průběhy odchylek ... 80
8 Zhodnocení a závěr ... 84
9 Literatura ... 86

Seznam obrázků:

Obrázek 1-3-1: Model souřadnicových soustav 4
Obrázek 2-1-1: Jednostranná spektrální hustota energie pro typické inerciální navigační systémy, inerciální šum měření a bílý šum 9
Obrázek 2-2-1: Kalmanův filtr jako pozorovatel odhadující stavový vektor lineárního systému 13
Obrázek 2-2-2: Rekurzivní algoritmus Kalmanova filtru 16
Obrázek 2-3-1: Rekurzivní algoritmus Rozšířeného Kalmanova filtru 18
Obrázek 2-4-1:Příklady pojetí sigma bodů pro střední hodnotu a kovarianci. a) skutečné, b) linearizace prvního řádu EKF, c) sigma body 19
Obrázek 3-1-1: Možnosti měření natočení a rotace pomocí gyroskopů 29
Obrázek 3-1-2: Příklad funkce struktury snímače gyroskopu při rotaci 30
Obrázek 3-1-3: Zjednodušená struktura snímače MEMS gyroskopu 30
Obrázek 3-2-1: Jedno z možných provedení malého diskrétního piezorezistivního akcelerometru 31
Obrázek 3-3-1: Jedno z možných provedení magnetometru 32
Obrázek 4-1-1: Princip gimballed platformy 33
Obrázek 4-2-1: Princip strapdown platformy s technologií MEMS 34
Obrázek 5-1: Schéma diagramu ukazující analýzu užitím a) SDINS úplný stavový model; b) SDINS chybový stavový model 37
Obrázek 5-3-1: Diagram problematiky odhadu orientace 42
Obrázek 6-2-1: Diagram Kalmanova filtru používající externí Gauss-Newtonův algoritmus 49
Obrázek 6-2-2: Stavový model 50
Obrázek 6-4-1: Complimentary Kalmanův filtr 58
Obrázek 7-1-1: Rozšířený KF pro akcelerometry a gyroskopy + šum 65
Obrázek 7-1-2: EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum 67
Obrázek 7-1-3: Complimentary KF pro MARG + šum 69
Obrázek 7-1-4: Unscented KF pro MARG + šum 71
Obrázek 7-1-5:Úplný EKF pro MARG + šum 73
Obrázek 7-2-1: Rozšířený KF pro akcelerometry a gyroskopy + šum + bias 75
Obrázek 7-2-2: EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum + bias 76
Obrázek 7-2-3: Complimentary KF pro MARG + šum + bias 77
Obrázek 7-2-4: Unscented KF pro MARG + šum + bias 78
Obrázek 7-2-5: Úplný EKF pro MARG + šum + bias 79
Obrázek 7-3-1: Průběhy odchylek pro EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum 81
Obrázek 7-3-2: Průběhy odchylek pro Complimentary KF + šum 82
Obrázek 7-3-3: Průběhy odchylek pro EKF s (N-G), úplného EKF a UKF 83

1 Úvod

V této diplomové práci se budu zabývat implementací Kalmanova filtru pro odhad polohy za použití Inerciálních Měřících Jednotek (**I**nertial **M**easurement **U**nit – IMU) bez použití Globálního Pozičního Systému (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem – GPS). Tato práce může najít uplatnění při určování polohy robota, člověka či jiného objektu v prostoru bez použití dalších měřících jednotek např. GPS navigací, které se nemohou použít ve vnitřních prostorech, či jinak zarušených místech bez signálu.

IMU jednotky, které budu využívat v této práci, jsou založeny na technologii MEMS (**M**icro-**E**lectro-**M**echanical **S**ystems). MEMS je technologie velmi malých (od 0.001 do 0.1 mm) mikro-elektro-mechanických systémů na jednom čipu. Každý čip obsahuje centrální jednotku, která zpracovává data z jednotek pro interakci s okolím, např. měřící jednotky mikroskopických velikostí. Tyto čipy jsou velmi malé, a proto nacházejí mnoho uplatnění v průmyslu i běžných aplikacích. Lze je jednoduše vyrobit a jsou levné, protože se dají vyrábět sériově. Nevýhoda MEMS technologie spočívá v tom, že trpí chybami jako drift, šum a další jiné chyby. Dalším zdrojem chyb může být zakřivení a rotace Země. S těchto několika důvodů musíme použít metody, které tyto chyby eliminují. Nejčastější používanou metodou je nasazení Kalmanova filtru, který ze zarušených dat a pomocí přídavných senzorů určí poměrně přesně polohu i orientaci.

1.1 Cíl práce

Cílem této práce je navrhnout algoritmy, které budou určovat orientaci a polohu části lidského těla (např. ruka, noha, délka kroku) anebo robota. K tomuto účelu budu využívat Kalmanových filtrů několika typů. Budu se snažit osvětlit problematiku Kalmanova filtru, včetně jeho popisu a vysvětlení jednotlivých vzorců tak, aby to bylo

pochopitelné i pro „laiky“. Dále zde uvedu problematiku reprezentace Eulerových úhlu a jejich řešení pomocí kvaternionů (quaternions).

1.2 Použité názvosloví

V této podkapitole bude přehled názvosloví a pojmů, které se bude vyskytovat v této diplomové práci.

1.2.1 Dolní a horní indexy

V této práci budou mít horní a dolní indexy různé funkce podle obsahu kapitoly nebo podkapitoly. Horní index bude spjat s nějakým množstvím. Dolní index bude použit při poukazování na to, že velikost x, y, z je ve směrech daného souřadnicového systému. Dolní index bude rovněž použit pro označení jednotlivých vektorů ze skupiny senzorů, jako je např. IMU. V diskrétních systémech bude dolní index používán jako časový index proměnné nebo parametru. V podkapitole 1.3.2 budou horní a dolní indexy společně popisovat rotační souřadnicový systém. V kapitole 1.3.3 budou použity pro referenci na souřadnicový systém a v podkapitole 1.3.4 budou použity pro popis Kalmanova filtru.

f_{IMU}	výstupní měření zrychlení akcelerometrů
ω_{IMU}	výstupní měření úhlové rychlosti gyroskopů

1.2.2 Pohyb těles (Kinematika)

Inerciální navigační rovnice jsou skoro téměř vyjádřeny ve vektorově-maticovém tvaru. V důsledku toho je konvence zápisu vektoru ve tvaru **tučného písma (boldface)** nebo zápisem se $\overrightarrow{\check{s}ipkou}$ poměrně nešikovné (zbytečné). Pro vyjádřením inerciálních navigačních rovnic ve vektorovém formátu je v této práci použita konvence

malých písmen a pro skalární proměnné je použita konvence bez kurzívy. Rozdíl je vždy zřetelný z kontextu.

r vektor pozice

v vektor rychlosti

a vektor zrychlení

g vektor gravitačního zrychlení

C_b^a směrová kosinová rotační matice transformující vektor ze souřadnicového systému b do souřadnicového systému a

q_b^a kvaterniový rotační operátor transformující vektor ze souřadnicového systému b do souřadnicového systému a

ω vektor úhlové rychlosti

ε chyba úhlové rychlosti

α vektor úhlového zrychlení

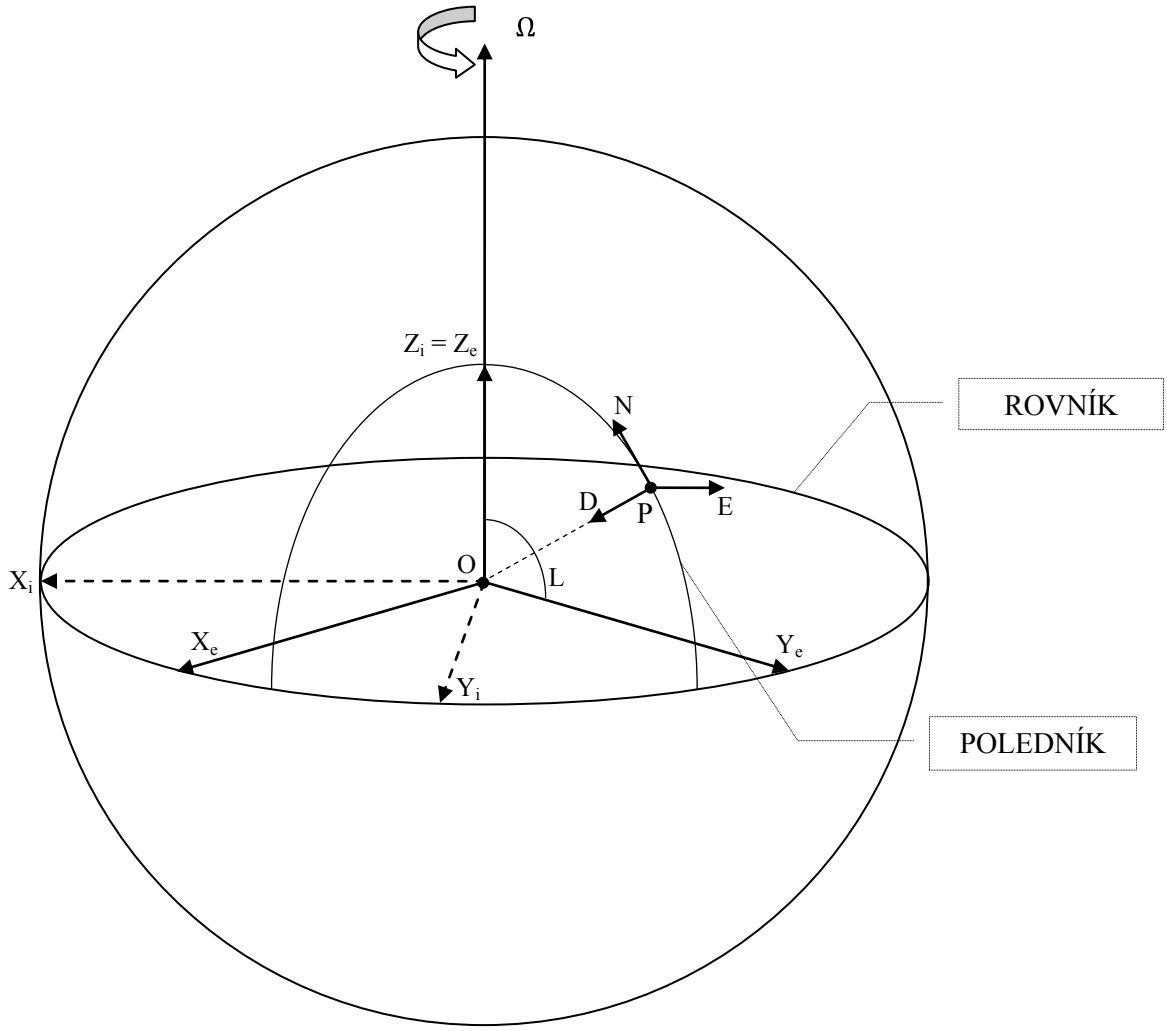
1.2.3 Definování soustav souřadnicových systémů

Protože bylo vyvinuto mnoho souřadnicových systémů, studium inerciální navigace vyžaduje přesnou notaci, aby nemohlo dojít ke dvojsmyslům a nejasnostem. Pro následující definování souřadnicových soustav, horních a dolních indexů je použita obecně uznávaná konvence pro výzkum inerciálních navigačních systémů.

x_{bc}^a vektor x souřadnicového systému c s ohledem na souřadnicovou soustavu b popisovaný v souřadnicové soustavě a

C_b^a rotační operace C transformující vektor ze souřadnicové soustavy b do souřadnicové soustavy a

Všimněte si, že inerciální navigační rovnice, pozice, rychlost, akcelerace a měrná síla mají pouze jeden horní index r^n. To je způsobeno tím, že tyto vektory jsou vždy v souřadnicové soustavě tělesa, která je relativní k inerciální souřadnicové soustavě. Pokud nebude zřejmé, na který vektor se odkazuje, bude užita plná notace. Úhlová rychlost bude mít vždy plnou notaci, protože rotační matice, které se vztahují k souřadnicím souřadnicové soustavy, jsou od nich odvozeny.



Obrázek 1-3-1: Model souřadnicových soustav

X_i, Y_i, Z_i osy inerciální soustavy

X_e, Y_e, Z_e osy zemské soustavy

N, E, D osy navigační soustavy (**N**orth **E**ast **D**own: N – sever, E – východ, D – dolů)

R_0 poloměr Země (6378,137 km)

L zeměpisná šířka

h výška bodu P nad zemí

Ω úhlová rychlost otáčení Země

v_e^n traťová rychlost vyjádřena v uspořádání os odpovídající navigační soustavě

v_e^i traťová rychlost vyjádřena v inerciální soustavě

ω_{ie}^n vektor úhlové rychlosti otáčení zemské soustavy vůči inerciální soustavě, který je vyjádřen v navigační soustavě

ω_{en}^n vektor úhlové rychlosti otáčení zemské soustavy vůči soustavě navigační

C_b^n transformační matice

v_e^n $[v_N \quad v_E \quad v_D]$ vektor rychlosti v uspořádání odpovídající navigační soustavě

a^b $[a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ zrychlení měřené akcelerometry v soustavě bodu P

ω_{ie}^n $[\Omega \cos \mathrm{L} \quad 0 \quad -\Omega \sin \mathrm{L}]^T$ úhlová rychlost otáčení *e*-soustavy vůči *i*-soustavě

ω_{en}^n $\left[\frac{v_E}{R_0+h} \quad \frac{-v_N}{R_0+h} \quad \frac{-v_E \tan L}{R_0+h}\right]^T$ úhlová rychlost *n*-soustavy vůči *e*-soustavě

<u>*i* - inerciální souřadnicová soustava Země (**E**arth **C**entered **I**nertial frame – ECI)</u>

Střed soustavy: střed Země

Osa Z_i je to totožná se zemskou osou.

Osy X_i a Y_i jsou rovnoběžné s rovníkem, jsou orientovány podle hvězd, které nemění polohu vůči Zemi (jsou stacionární vůči Zemské rotaci)

e – centralizovaná souřadnicová soustava Země (**E**arth **C**entered **E**arth **F**ixed frame – ECEF)

Střed soustavy: střed Země

Osa Z_i je to totožná se zemskou osou.

Osy X_i a Y_i dány pevně vzhledem k Zemi, v čase t=0 jsou shodné s ECI

b – souřadnicová soustava tělesa (BODY)

Souřadnicová soustava je totožná se soustavou v IMU jednotky.

Střed soustavy: kalibrační počátek IMU jednotky

n - zeměpisná souřadnicová soustava (**N**orth **E**ast **D**own frame – NED)

Střed soustavy: stejná poloha jako v souřadnicové soustavě tělesa *b*, ale nejsou k ní připevněné osy

osa X_i: lokální Sever

osa Y_i: lokální Východ

osa Z_i: lokální Down

1.2.4 Teorie lineárních systémů

x stavový vektor

y vektor měření

Spojitý lineární stavový model se stochastickým vstupem a výstupem zatížený stochastickou chybou:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\mathbf{w}(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \mathbf{v}(t)$$

Diskrétní lineární stavový model se stochastickým vstupem a výstupem zatížený stochastickou chybou:

$$x_k = M_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

$$y_k = C(k)x_k + \mathbf{v}_k$$

1.2.5 Kalmanova filtrace a stochastická teorie

$\hat{x}_k$ současný odhad stavu

P_k současný odhad kovariance

x_k^- *apriorní* odhad stavu

P_k^- *apriorní* odhad kovariance

K_k Kalmanovo zesílení

Q_k kovariance šumu procesu

R_k kovariance šumu měření

$\mathbf{w}$ stochastický šum procesu

$\mathbf{v}$ stochastický šum měření

2 Matematické základy pro popis algoritmů

Pro pochopení pozdějších kapitol v této diplomové práci je nutný stručný přehled některých matematických pojmů. V prvních čtyřech podkapitolách se budeme věnovat problému odhadu: lineárního stochastického systému, Kalmanově filtru, Rozšířenému Kalmanově filtru (EKF) a Unscented Kalmanově filtru. Lineární stochastické systémy jsou použity pro kovarianční analýzu SDINS (**S**trap **D**own **I**nertial **N**avigation **S**ystems) chyb, stejně tak jako pro pochopení fungování Kalmanova filtru. V poslední podkapitole se budeme zabývat základy kvaterniové algebry, který bude později použit k modelování orientace stavů SDINS v pozdějších kapitolách

2.1 Teorie stochastických lineárních systémů

Problémem je, jak řešit lineární stavový systém zatížený stochastickými vektory chyb procesů $\mathbf{w}_k$ a měření $\mathbf{v}_k$ ve stavové rovnici (2.1.1) a výstupní rovnici (2.1.2). Pro tento okamžik nám postačí odpověď, že když se jedná o stochastický vstup do systému, tak stavy $x \in R^n$ a výstupní měření $y \in R^m$ nemohou být vypočítány deterministicky, ani pomocí numerických ani pomocí analytických metod.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\mathbf{w}(t) \tag{2.1.1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + \mathbf{v}(t) \tag{2.1.2}$$

Analýza podobných systémů je naštěstí možná, pokud vektory $\mathbf{w}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ mají Gaussovské rozdělení bílého šumu matematicky reprezentovaného jako:

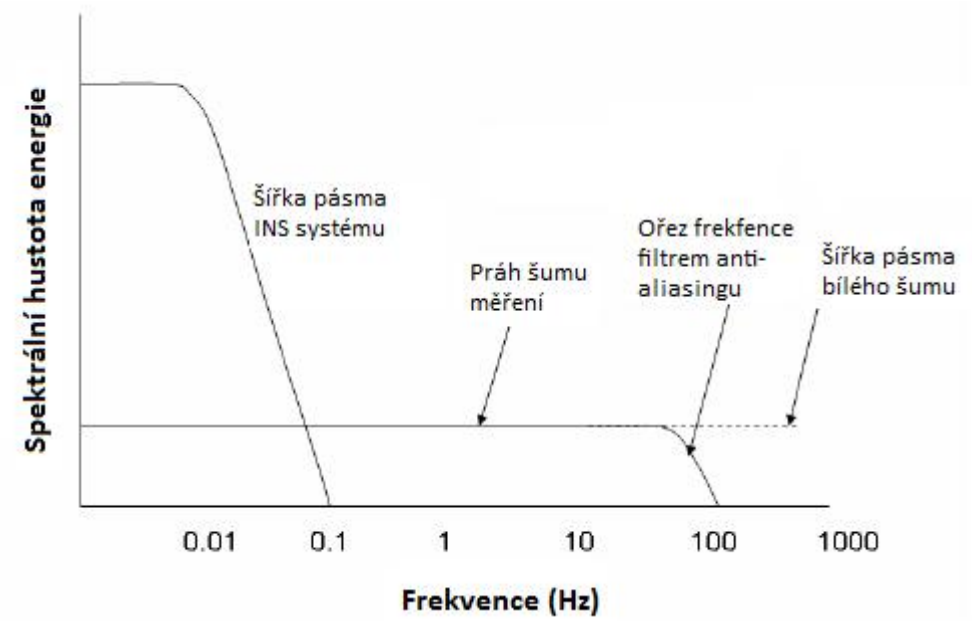
$$\mathbf{w}(t) \sim N(0, Q(t)) \tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{v}(t) \sim N(0, R(t)) \tag{2.1.4}$$

Spíše než deterministické řešení systému je použito pravděpodobnostní řešení, které je dáno střední hodnotou a kovariancí stavů a měření. Předpoklad Gaussovský bílého šumu má mnoho užitečných vlastností. Hlavní výhodou je lineární transformace

ne-Gaussovské náhodné proměnné. Toto je výhodné při výpočtech kovarianční analýzy a ještě více pro rovnic Kalmanova filtru.

Maybeck [2] píše, že předpoklad Gaussovsky bílého šumu je velmi užitečný v mnoha fyzikálních systémech. Bělost znamená, že šum je nekorelovaný s časem. Znalost velikosti šumu v jednom okamžiku neříká nic o velikosti šumu v jiném čase. Bílý šum má také konstantní množství energie zastoupenou na všech frekvencích. Tento případ nikdy nenastane u diskrétních systémů, kde je vzorkovací frekvence shora limitována. Toto není příliš závažný problém, když máme konkrétní daný systém. Všechny fyzikální systémy mají pásmo propustnosti překryté s šumem, který je obvykle limitován filtrem zabraňujícímu anti-aliasingu při převodu z analogového signálu do digitálního. Pokud je šířka pásma šumu o mnoho větší než šířka pásma systému, což je ve většině případů, pak z pohledu systému vypadá šířka pásma šumu jako bílý šum. (*viz. Obrázek 2-1-1*).



Obrázek 2-1-1: Jednostranná spektrální hustota energie pro typické inerciální navigační systémy, inerciální šum měření a bílý šum

Řešením lineárních stochastických diferenciálních rovnic obsahuje střední hodnotu stavového vektoru $m_x(t)$, vyjádřeného stejně jako deterministické lineární systémy (podobně jako u (2.1.1) bez náhodné proměnné $\mathbf{w}(t)$).

$$m_x(t) = A(t,t_0)m_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t,\tau)\, B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.1.5}$$

kde $A(t,t_0)$ je přenosová matice stavů. Kovariance stavové proměnné $P_{xx}(t)$ je vyjádřena maticovou rovnicí:

$$P_{xx}(t) = A(t,t_0)P_{xx}(t_0)A^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t,\tau)\, G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)A^T(t,\tau)d\tau \tag{2.1.6}$$

Střední hodnota výstupu $m_y(t)$ a kovariance výstupu $P_{yy}(t)$ vyplývá z (2.1.5) a z (2.1.6):

$$m_y(t) = C(t)m_x(t) \tag{2.1.7}$$

$$P_{yy}(t) = C(t)P_{xx}(t)C^T(t) + R(t) \tag{2.1.8}$$

Máme-li dány kovarianční matice Q a R a užijeme-li (2.1.5) a (2.1.6), tak řešení lineárního stavového modelu můžeme nalézt z rovnic (2.1.1) a (2.1.2). Pokud jsou nám známy chyby stavů a měření, tak můžeme pro některé spojité stavové modely definovat stavy okolo střední hodnoty s předepsanou nejistotou stavů kovariancí. Rovnice spojité střední hodnoty a kovariance se zdají být teoreticky zajímavé, ale v mnoha moderních systémech užitých v praxi se používají diskrétní systémy, kde jsou řídící a měřící algoritmy zakomponovány uvnitř IMU jednotek.

V této diplomové práci budeme používat pouze v čase diskrétní systémy. Inerciální navigační systémy jsou vždy diskretizovány vzorkováním signálu ze senzorů, proto by nemělo smysl používat algoritmy pro v čase spojité systémy. Od vynalezení SDINS modelů v časově spojitých systémech bylo nutné vyřešit diskretizaci spojitých stavových modelů do diskrétních modelů. Střední hodnotu a kovarianci vyjádřené v (2.1.5) a (2.1.6) je potřeba diskretizovat.

Stavová rovnice (2.1.1) může být aproximována od časového kroku *k-1* do *k* s konstantním časovým intervalem *T* jako:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{T} \cong \dot{x}|_{k-1}$$

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{T} \cong A(t_{k-1})x_{k-1} + B(t_{k-1})u(t_{k-1}) + G(t_{k-1})\mathbf{w}(t_{k-1})$$

$$x_k \cong (I + A(t_{k-1})T)x_{k-1} + (B(t_{k-1})T)u(t_{k-1}) + (G(t_{k-1})T)\,\mathbf{w}(t_{k-1}) \qquad (2.1.9)$$

Stavová diskrétní rovnice má tvar:

$$x_k = M_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \qquad (2.1.10)$$

Tuto rovnici můžeme porovnat s rovnicí (2.1.9), abychom se dostali z diskrétní aproximace k matici parametrů ve spojitém stavovém modelu.

$$M(k, k-1) = M_{k-1} \cong I + A(t_{k-1})T \qquad (2.1.11)$$

$$B_{k-1} \cong B(t_{k-1})T \qquad (2.1.12)$$

Velikost diskrétní náhodné proměnné $\mathbf{w}_k$ je:

$$Q_k = \left(G(t_k)Q(t_k)G^T(t_k)\right)T \qquad (2.1.13)$$

Pro notaci uvedeme, že přechodovou matici $M(k, k-1)$ budeme psát ve tvaru M_{k-1}, pro pochopení že jde o stavovou transformaci z kroku *k-1* do *k*. Také si povšimněte, že všechny diskrétní proměnné jsou odlišeny od spojitých proměnných indexy s notací *k*, než s notací *t*.

Spojitá rovnice měření a diskrétní rovnice měření jsou totožné, až na časovou proměnnou *t*, kterou nahradil index *k*.

$$y_k = C_k x_k + \mathbf{v}_k \qquad (2.1.14)$$

Vyjádření střední hodnoty m_x je stejné jako deterministická část rovnice (2.1.10):

$$(m_x)_k = M_{k-1}(m_x)_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \qquad (2.1.15)$$

Kovariance stavů P_{xx} je vyjádřena podle rovnice:

$$(P_{xx})_k = M_{k-1}(P_{xx})_{k-1}M_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{2.1.16}$$

Střední hodnota výstupu a kovariance mají stejnou strukturu jako ekvivalent spojitých rovnic:

$$(m_y)_k = C_k(m_x)_k \tag{2.1.17}$$

$$(P_{yy})_k = C_k(P_{xx})_k C_k^T + R_k \tag{2.1.18}$$

Rovnice (2.1.15) až (2.1.18) zprostředkovávají cenný nástroj pro analýzu chyb. Pokud máme deterministický stavový model se stochastickým vektorem jako vstup a výstup zatížený chybou, tak s použitím těchto nástrojů můžeme najít vektor středních hodnot a kovarianční matici pro stavy a měření. Vyjádření kovarianční matice může být využita k ohodnocení vlastností systému. Prvky na diagonále kovarianční matice jsou odchylky chyb stavů.

2.2 Kalmanův filtr (KF)

Kalmanův filtr je optimální pozorovatel lineárních diskrétních systémů s bílým šumem ve stavech i měřeních. Termín „filtr“ je trošku zavádějící, protože Kalmanův filtr je více než jednoduchá metoda pro redukci šumu. Dá se využít k řešení problému, jak dostat relevantní informace ze zarušeného měření, dokonce i při nedokonalém modelu pozorovaného systému. Kalmanův filtr se stal důležitým nástrojem ve výzkumu v mnoha vědních oborech, nejvíce však v navigačních systémech.

Problémem je, jak odhadnout stavový vektor $x \in R^n$, který je vyjádřen v procesní rovnici (2.2.1), danou měřením $y \in R^m$ modelovaným výstupní rovnicí (2.2.2)

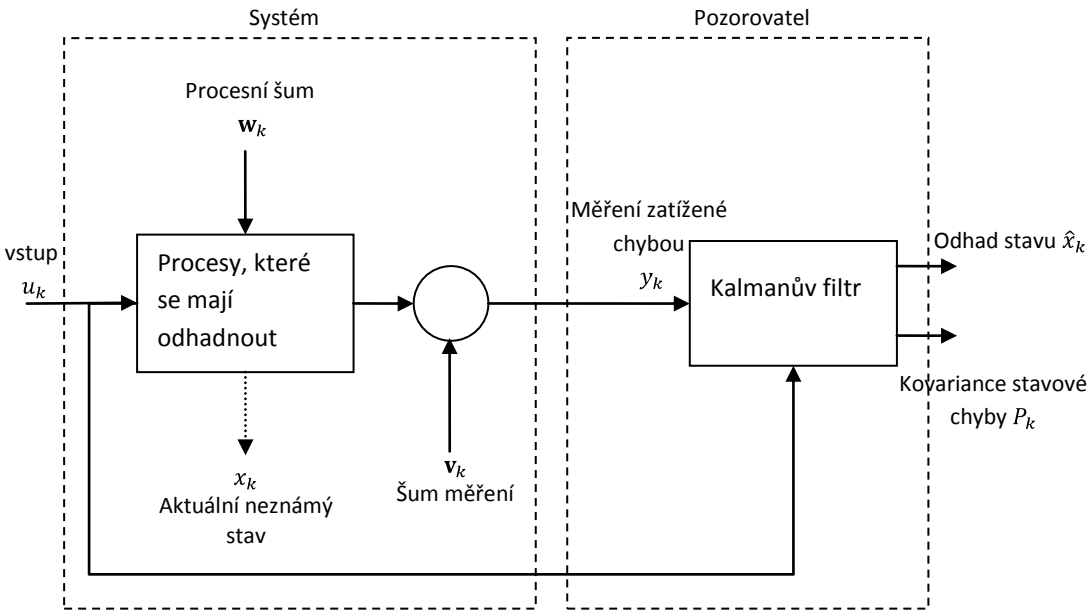
$$x_k = M_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \tag{2.2.1}$$

$$y_k = C(k)x_k + \mathbf{v}_k \tag{2.2.2}$$

Stavy a měření jsou zatíženy vektory chyb $\mathbf{w}_k$ a $\mathbf{v}_k$, které jsou navzájem nezávislé. Tyto vektory jsou stochastické a předpokládají Gaussovské rozdělení bílého šumu s nulovou střední hodnotou a kovariancemi Q a R.

Použití klasického Kalmanova filtru je na *Obrázku 2-2-1*. Do fyzikálního systému vstupuje deterministický řízený vstup u_k a stochastický procesní šum $\mathbf{w}_k$. Stavový vektor fyzikálního systému, tedy kvantita, kterou odhadujeme je neznámá. Výstupy ze systému jsou zatíženy chybou s šumem $\mathbf{v}_k$ a vstupují do Kalmanova filtru spolu se známým vnějším vstupem u_k.

Pokud je dán lineární model fyzikálního systému s kovarianční maticí šumů pro stavy a měření, tak nám Kalmanův filtr dává nejlepší odhad stavů a kovarianci chyb těchto stavů.



Obrázek 2-2-1: Kalmanův filtr jako pozorovatel odhadující stavový vektor lineárního systému

Rovnice Kalmanova filtru mohou být rozděleny do dvou částí, zvané jako *apriorní* a *aposteriorní* odhad. Tyto slova jsou odvozena od filozofické nauky o poznání. Filozofové říkají, že *apriorní* znalost je předešlá nebo vrozeně známá. *Aposteriorní* znalost vyžaduje poznatek založený na pozorování (empirický). Analogicky v terminologii Kalmanova filtru je *apriorní* odhad znalost stavového vektoru daného předešlou znalostí procesního modelu a *aposteriorní* odhad je znalost stavového vektoru daného empirickým měřením.

Pokud je dán odhad stavů z předešlého časového kroku $\hat{x}_k$, pak *apriorní* odhad stavů $\hat{x}_k^-$ a kovariance P_k^- jsou vyjádřeny jako:

$$\hat{x}_k^- = M_{k-1}\hat{x}_{k-1}^- + B_{k-1}u_{k-1} \tag{2.2.3}$$

$$P_k^- = M_{k-1}P_{k-1}^-M_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{2.2.4}$$

Podstata Kalmanova filtru je vzít *apriorní* odhad a upravit ho pomocí měření zatíženého šumem. Tento upravený odhad je nazván *aposteriorní* odhad. Optimální stavový odhad je nalezen za použití Kalmanova zesílení K_k, které určuje rozdíl mezi aktuálním a požadovaným měřením. Kalmanovo zesílení je vyjádřeno jako minimalizace kovariance chyby stavů k dosažení optimálního odhadu stavového vektoru.

$$K_k = P_k^- C_k^T (C_k\ P_k^- C_k^T + R_k\ )^{-1} \tag{2.2.5}$$

$$\hat{x}_k\ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - C_k\ \hat{x}_k^-) \tag{2.2.6}$$

$$P_k\ = (I - K_k C_k\ )P_k^- \tag{2.2.7}$$

Kalmanovo zesílení K_k je podstatou Kalmanova filtru. Toto zesílení náležitě váží dopad měření na stavový odhad a kovarianci chyby. K lepšímu představení použití K_k si představte, že měření je více zarušené, skoro až nepoužitelné. Toto může způsobit buď velká hodnota R_k a nebo velmi malá hodnota K_k.

$$\lim_{R_k \to \infty} K_k = 0\ \therefore\ \hat{x}_k\ = \hat{x}_k^-\ a\ zároveň\ P_k\ = P_k^-$$

Malé K_k znamená, že měření nemůžeme věřit, takže z rovnice (2.2.6) optimální odhad konverguje k *apriornímu* odhadu. Stejně tak kovariance chyby stavu P_k je stejné jako u *apriorního* odhadu. Pro extrémně velké R_k jsou měření takřka úplně ignorována a Kalmanův filtr se spoléhá pouze na procesní model pro odhad.

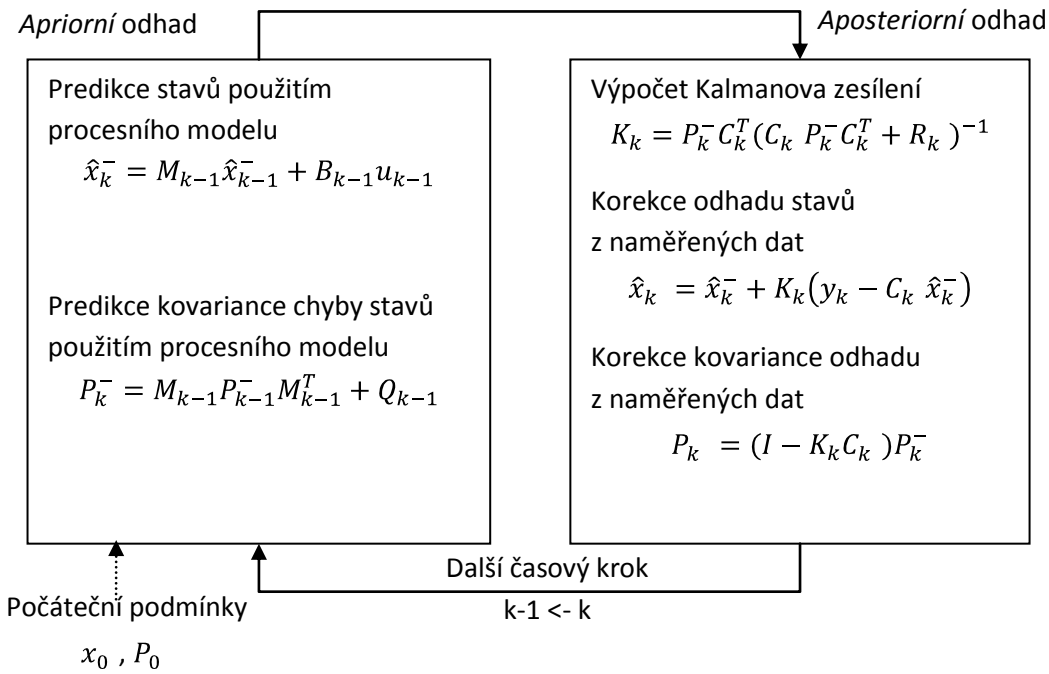
V jiném případě si představte, že měření je velmi dobré, to nám způsobí velmi malou hodnotu R_k . Kalmanovo zesílení nám bude konvergovat k:

$$\lim_{R_k \to 0} K_k = H_k^{-1} \ \therefore \ \hat{x}_k \ = H_k^{-1} y_k \ a \ zároveň \ P_k \ = 0$$

Pro velmi malé R_k bude Kalmanův filtr upřednostňovat pouze měření. V případě, že bude měření perfektní, nebude procesní model vůbec použit a kovariance chyby stavu bude nula.

Z těchto experimentálních úvah můžeme vidět, že Kalmanův filtr je váhový algoritmus, který vyvažuje predikci procesního modelu s korekcí měření.

Kalmanův filtr je rekurzivní algoritmus. Predikční a korekční rovnice upravují nejlepší odhad v každém časovém kroku pouze ze znalostí jednoho předcházejícího kroku. Tato výpočetní výhoda je jedna z hlavních důvodů, proč je Kalmanův filtr tak široce používán v praxi. Na *Obrázku 2-2-2* je zobrazen rekurzivní algoritmus s počátečními podmínkami pro stav x_0 a kovarianci chyby P_0 .



Obrázek 2-2-2: Rekurzivní algoritmus Kalmanova filtru

2.3 Rozšířený Kalmanův filtr (EKF)

Jeden z hlavních důvodů studování teorii lineárních systémů je řešit nelineární problémy. Většinou jsou Kalmanovy filtry použity na nelineární stavové systémy, jako jsou např. SDINS strapdown inerciální navigační systémy.

Rozšířený Kalmanův filtr (EKF) je pro odhad stavů systému, které nejsou lineární, ale mohou být považovány za „hladké“ („smooth“). Zásadní problém u EKF je, že transformace Gaussovsky bílého šumu je nelineární, výsledkem je ne-Gaussovská pravděpodobnost rozdělení. Tento problém je řešený linearizační aproximací, která vede k optimálnímu Kalmanovu filtru. Tato metoda nám bude stačit pro mnoho aplikací zvláště pak pro navigační systémy [1].

Uvažujme v čase diskrétní systém popsaný následujícím nelineárním stavovým modelem se stavovým vektorem $x \in R^n$ a vektorem naměřených hodnot $y \in R^m$:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \tag{2.3.1}$$

$$y_k = g(x_k, v_k) + \mathbf{v}_k \tag{2.3.2}$$

Stochastické vektory $\mathbf{w}_k$ a $\mathbf{v}_k$ jsou šumy procesů a měření s předpokládaným Gaussovským rozdělením s kovariancemi Q_k a R_k.

Předpokládejme, že máme odhad z předchozího časového kroku $\hat{x}_{k-1}$. Linearizací stavového vektoru kolem aktuálního odhadu stavu dostaneme následující Jakobiho matici:

$$M_{k-1} = \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]_{\hat{x}_{k-1}} \tag{2.3.3}$$

Nyní předpokládejme, že si vyjádříme budoucí stav a časový krok, abychom dostali *apriorní* odhad aktuálního stavu užitím nelineárního procesního modelu.

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \tag{2.3.4}$$

Nyní budeme linearizovat vektor měření okolo *apriorního* odhadu stavů.

$$C_k = \left[\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right]_{\hat{x}_k} \tag{2.3.5}$$

Jakobiho matice (2.3.3) a (2.3.5) linearizuje procesní model okolo odhadu stavů. Tyto odhady jsou použity v rovnicích Kalmanova filtru pro výpočet matice Kalmanova zesílení. Neboli vektory stavů a měření jsou vypočteny užitím nelineárních rovnic (2.3.1) a (2.3.2). Z definic uvedených výše a užitím následujících pravidel mohou byt stavy odhadnuty z počátečních podmínek stavu x_0 a kovariance P_0. *Apriorní* rovnice jsou:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \tag{2.3.6}$$

$$P_k^- = M_{k-1} P_{k-1}^- M_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{2.3.7}$$

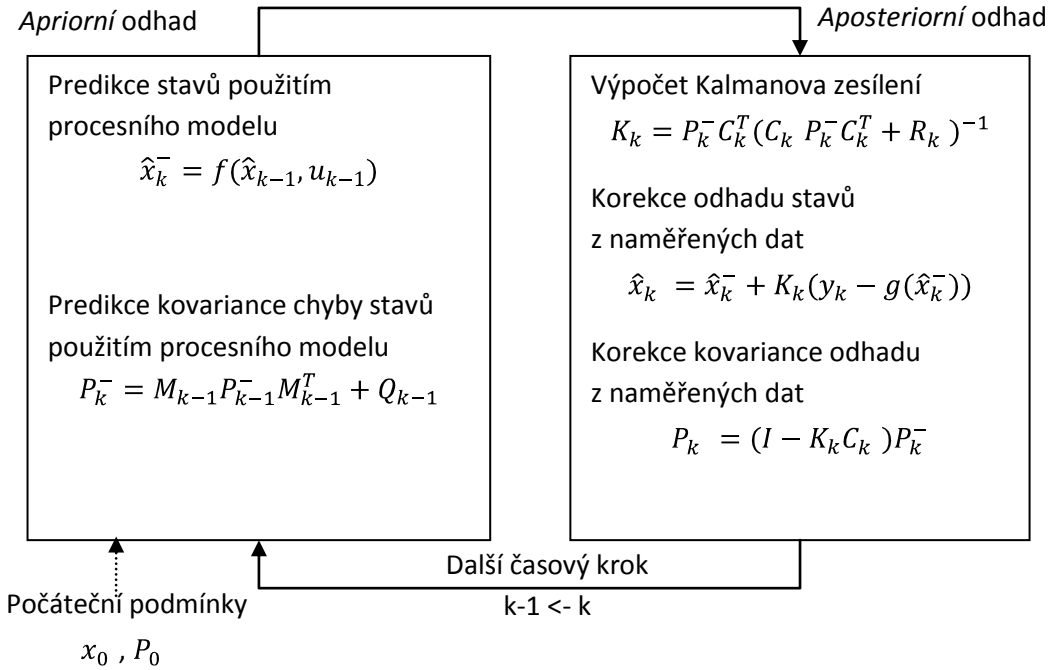
Aposteriorní rovnice jsou:

$$K_k = P_k^- C_k^T (C_k \; P_k^- C_k^T + R_k \;)^{-1} \tag{2.3.8}$$

$$\hat{x}_k \; = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - g(\hat{x}_k^-)) \tag{2.3.9}$$

$$P_k \; = (I - K_k C_k \;) P_k^- \tag{2.3.10}$$

Rovnice výše jsou, známe jako Rozšířený Kalmanův filtr (EKF). Na *Obrázku 2-3-1* je zobrazen rekurzivní algoritmus s počátečními podmínkami pro stav x_0 a kovarianci chyby P_0 [1].

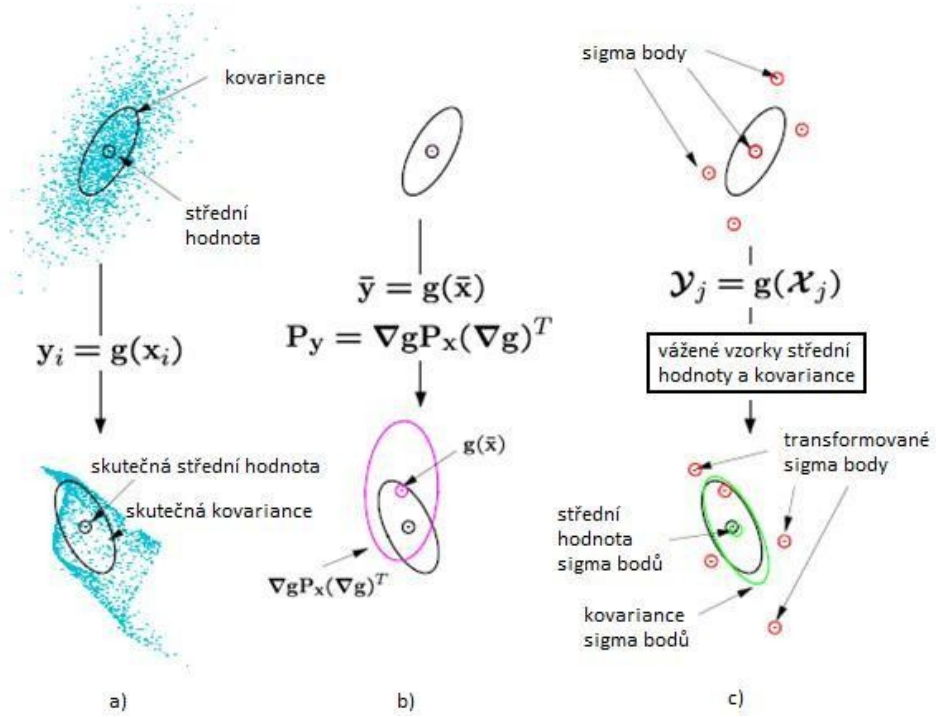


Obrázek 2-3-1: Rekurzivní algoritmus Rozšířeného Kalmanova filtru

2.4 Unscented Kalmanův filtr (UKF)

Dalším z řady Kalmanových filtrů je Unscented Kalmanův filtr (UKF), který zapadá do množiny SPKF (**S**igma-**P**oint **K**alman **F**ilters). Tento filtr může nahradit EKF

v případě, že procesní model a model měření jsou značně nelineární, tyto nelinearity mohou u EKF způsobit velmi špatné odhady. Důvodem těchto špatných odhadů je střední hodnota, vyjádřená těmito nelinearitami. UKF používá metodu deterministického vzorkování známou jako unscented transformace pro výběr minimální množiny vzorkovacích bodů (Sigma body – Sigma-Points) okolo střední hodnoty. Tyto sigma body jsou následně vyjádřeny v nelineárních funkcích a kovariance odhadu je následně z těchto funkcí obnovena. Výsledkem je přesnější odhad střední hodnoty a kovariance. Z *Obrázku 2-4-1* lze vidět, že stření hodnota a kovariance se u UKF mnohem více podobá skutečným hodnotám než u EKF [15].



Obrázek 2-4-1:Příklady pojetí sigma bodů pro střední hodnotu a kovarianci. a) skutečné, b) linearizace prvního řádu EKF, c) sigma body

Abychom dostali co nejlepší statistické vlastnosti předcházejícího vektoru stavu x, budeme muset zavést omezující podmínky ve formě $\varepsilon\big(\langle\chi, w\rangle, \mathrm{r}, p(x)\big) = 0$ kde $\langle\chi, w\rangle$ je množina všech sigma bodů χ_i a jejich vah w_i pro $i = 1, .., \mathrm{r}$. Pokud chceme splnit omezující podmínky a navíc mít ještě nějaké stupně volnosti při výběru pozice bodu,

budeme muset zavést penalizační funkci ve formě $c\big(\langle\chi, w\rangle, \mathrm{r}, p(x)\big)$, kterou se snažíme minimalizovat. Účelem této funkce je zavést statistické vlastnosti *x*, které jsou vhodné, ale nemusí být nutně splněny. Z toho vyplývá, že sigma body jsou dány následujícím optimalizačním problémem [15]:

$$\min_{\langle\chi,w\rangle} c\big(\langle\chi, w\rangle, \mathrm{r}, p(x)\big) \text{ za podmínky } \varepsilon\big(\langle\chi, w\rangle, \mathrm{r}, p(x)\big) = 0 \tag{2.4.1}$$

Nezbytné statistické informace určené UKF filtrem jsou momenty prvního a druhého řádu *p(x)*. Potřebný počet sigma bodů k určení těchto momentů je $r = 2L + 1$ kde L je dimenze *x*.

Abychom mohli pokračovat, potřebujeme znát váhovou statistickou lineární regresi (**W**eighted **S**tatistical **L**inear **R**egression - WSLR), která nám vyřeší problém linearizace nelineárních funkcí náhodné proměnné. Místo linearizace nelineární funkce Taylorovou řadou pro několik prvních členů do jednoho bodu (který je obvykle střední hodnotou náhodné proměnné), budeme linearizovat funkci lineární regresí mezi *r* body vyjádřených z *apriorní* distribuce náhodné proměnné a „skutečného“ nelineárního odhadu těchto bodů. Protože metody statistické aproximace vnášejí do popisu statistické vlastnosti *apriorní* náhodné proměnné, výsledkem bude „očekávaná“ chyba linearizace, která bude menší než při užití Taylorových řad.

Uvažujme nelineární funkci $y = g(x)$, která je ohodnocena v *r* bodech (χ_i, γ_i) kde $\gamma_i = g(\chi_i)$.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} w_i\, \chi_i \tag{2.4.2}$$

$$\hat{P}_{xx} = \sum_{i=1}^{r} w_i\, (\chi_i - \bar{x})(\chi_i - \bar{x})^T \tag{2.4.3}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{r} w_i\, \gamma_i \tag{2.4.4}$$

$$\hat{P}_{yy} = \sum_{i=1}^{r} w_i\,(\gamma_i - \bar{y})(\gamma_i - \bar{y})^T \tag{2.4.5}$$

$$\hat{P}_{xy} = \sum_{i=1}^{r} w_i\,(\chi_i - \bar{x})(\gamma_i - \bar{y})^T \tag{2.4.6}$$

kde w_i je množina vah skalárních regresí o r prvcích, takových, že $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1$. Nyní musíme najít lineární regresi $y = Ax + b$, která bude minimalizovat statistickou hodnotící funkci $J = E[\phi(e_i)]$. Chyba linearizace bodů je dána jako $e_i = \gamma_i - (A\chi_i + b)$ s kovariancí $P_{ee} = \hat{P}_{yy} - A\hat{P}_{xx}A^T$. Toto vede k redukci hodnotící funkce na:

$$\{A, b\} = argmin \sum_{i=1}^{r} (w_i\, e_i e_i^T) \tag{2.4.7}$$

která vede k následujícímu řešení

$$A = \hat{P}_{xy}^T \hat{P}_{xx}^{-1} \quad b = \bar{y} - A\bar{x} \tag{2.4.8}$$

Nyní již můžeme zavést sigma body a váhy využité UKF filtrem:

$$\chi_0 = \bar{x} \tag{2.4.9}$$

$$\chi_i = \bar{x} + \left(\sqrt{(L+\lambda)P_x}\right)_i \quad i = 1,..,L \tag{2.4.10}$$

$$\chi_i = \bar{x} - \left(\sqrt{(L+\lambda)P_x}\right)_i \quad i = L+1,..,2L \tag{2.4.11}$$

$$w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{L+\lambda} \tag{2.4.12}$$

$$w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \tag{2.4.13}$$

$$w_i^{(m)} = w_i^{(c)} = \frac{1}{2(L+\lambda)} \quad i = 1,..,2L \tag{2.4.14}$$

Kde $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$ je parametr pro změnu měřítka. α určuje rozptyl sigma bodů okolo střední hodnoty $\bar{x}$, obvykle je nastaven jako malá kladná hodnota (např.

$1e-2 \leq \alpha \leq 1$. κ je druhý parametr pro změnu měřítka, obvykle je nastaven na 0 a β je parametr pro extra stupeň volnosti používaný pro začlenění extra *apriorních* znalostí o distribuci *x* (pro Gaussovskou distribuci je optimální $\beta = 2$). $\sqrt{(L+\lambda)P_x}$ je *i*-tý řádek (sloupec) matice pro sigma body [15].

2.5 Mechanický pohyb

Mechanickým pohybem se ve fyzice označuje pohyb, při kterém dochází ke změně polohy tělesa (hmotného bodu), vzhledem k jinému bodu, za určitý časový interval. Pokud k mechanickému pohybu nedochází, tzn., nemění se poloha tělesa vzhledem k jinému tělesu, říkáme, že je těleso v klidu. Klid je tedy pouze zvláštním případem pohybu. Vzhledem k tomu, že klid (nebo pohyb) je vždy vztažen k určité vztažné soustavě, je klid vždy relativní. Žádné těleso nemůže být v klidu ve všech vztažných soustavách, tedy v absolutním klidu. Absolutní klid neexistuje. Popis pohybu tělesa je vždy závislý na volbě vztažné soustavy. V různých vztažných soustavách se pohyb bude jevit různě [3].

Nejdříve si musíme vyjádřit základní vzorce pro polohu, rychlost a zrychlení v nepohybující se inerciální soustavě.

Pro zrychlení platí následující vztah:

$$a_i = \frac{d^2 r_i}{dt^2} \tag{2.5.1}$$

kde $r_i = [\mathrm{r}_{x_i} \quad \mathrm{r}_{y_i} \quad \mathrm{r}_{z_i}]$ je vektor polohy tělesa v inerciální navigační soustavě s definovanými složkami. Z toho vztahu si můžeme představit, jaké údaje budou ukazovat akcelerometry:

$$a_i = \frac{d^2 r_i}{dt^2} + g_i \tag{2.5.2}$$

kde g_i je vektor tíhového zrychlení definovaného dle směru polohového vektoru r_i. Úpravou rovnice (2.5.2) lze získat tzv. navigační rovnice:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = a_i - g_i \tag{2.5.3}$$

Pro rychlost pohybu platí následující vztah:

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} \tag{2.5.4}$$

Rovnici (2.5.4) lze převést z inerciální soustavy do soustavy zemské podle:

$$v_e = \frac{dr_e}{dt} = v_i - \omega_{ie} \times r_e \tag{2.5.5}$$

kde $\omega_{ie} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$. Rovnici (2.5.5) lze vyjádřit v navigační soustavě ve tvaru:

$$\frac{dv_e^n}{dt} = \frac{dv_e^i}{dt} - (\omega_{ie}^n - \omega_{en}^n) \times v_e^n \tag{2.5.6}$$

Postupnou úpravou rovnice (2.5.6) lze dojít ke konečnému tvaru navigační rovnice:

$$\frac{dv_e^n}{dt} = C_b^n a^b - (2\omega_{ie}^n - \omega_{en}^n) \times v_e^n + g_L^n \tag{2.5.7}$$

Pro vyjádření rovnice (2.5.7) budeme potřebovat transformační matici C_b^n:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\phi\sin\psi & \cos\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

2.6 Kvaterniová algebra

Sir William Hamilton (1805 – 1865) je považován za jednoho z největších Irských matematiků všech dob. Hamilton pracoval mnoho let na problému násobení a

dělení vektorů o velikosti hodnosti 3. Když kráčel po Broughamově mostě v Irsku, našel řešení toho problému zavedením vektoru o velikosti hodnosti 4. Podle legendy vynalezl kvaterniovou algebru psaním následující rovnice na jeden ze sloupů na konci mostu.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Cesta vedoucí ven z mostu, kde vyškrábal tento klíčový vzorec, byla pojmenována Hamiltonová Kvaterniova Stezka, i když nebyla dodnes nalezena jeho škrábanice. Hamiltonovy kvaterniony jsou využívaný v mnoha aplikacích např. v robotice, v počítačem podporovaném řízení a samozřejmě v inerciální navigaci [1].

Zápis a konvence, kterou zde budeme používat je použita v převážné části odborné literatury.

Kvaterniony jsou čtyř dimenzionální čísla následující formy:

$$q = \mathrm{q}_0 + \mathrm{q}_1 i + \mathrm{q}_2 j + \mathrm{q}_3 k = [\mathrm{q}_0 \quad \mathrm{q}_1 \quad \mathrm{q}_2 \quad \mathrm{q}_3]^{\mathrm{T}} \tag{2.6.1}$$

Čísla $\mathrm{q}_0, \mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3$ jsou reálné čísla. Jednotkové vektory i, j, k jsou považovány za standardní ortonormální báze. Tyto jednotkové vektory se řídí následujícími pravidly, které určují operace jako kvaterniové násobení a sčítání:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

kde $i = [1 \quad 0 \quad 0]^T, j = [0 \quad 1 \quad 0]^T, k = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. Tyto pravidla jsou podobná jako definice komplexních čísel, nazývající kvaterniony často jako „hyper-komplexní“ čísla. Z tohoto důvodu je element q_0 často nazýván reálný nebo skalární část kvaternionů a vektor $[\mathrm{q}_1 \quad \mathrm{q}_2 \quad \mathrm{q}_3]^{\mathrm{T}}$ nazývaný imaginární část.

Jednotkový vektor má jednotkovou normu důležitou pro užití v rotační transformaci. Úhel α muže být spojený s kvaternionem q. Jednotkový kvaternion můžeme napsat následovně jako:

$$q = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)u \tag{2.6.3}$$

Vektor u je jednotkový vektor vztažený k ortonormální bázi. Ukazuje, že tento jednotkový kvaternion reprezentuje rotaci 2α ve směru jednotkového vektoru u podle pravidla pravé ruky. Proto tedy jednotkový kvaternion reprezentuje rotaci v $\mathbf{R}^3$.

Předpokládejme, že chceme reprezentovat vektor v b-souřadnicích, v^b, jako vektor v a-souřadnicích, v^a. To ukazuje, že kvaterniony reprezentují změnu souřadnic, q_b^a je získaná rotací b-souřadnic okolo vektoru u přes 2α. Tento vektor může být rotován užitím následující transformace:

$$v^a = q_b^{a^*} v^b q_b^a \tag{2.6.4}$$

Ekvivalent směrové Kosinovy rotační matice k transformační matici je odvozen rozepsáním (2.6.4) za použití rovnic (2.6.2) a jejich přeuspořádáním:

$$C_b^a(q_b^a) = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_3q_2 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_3q_2 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.6.5}$$

kde $q_b^a = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$. Odvození kvaternionů v čase může být napsáno ve vztahu k rotační rychlosti pohybujícího se systému. To činí reprezentaci v kvaternionech jednoduchou pro zavedení v inerciálních navigačních rovnicích. Diferenciální rovnice kvaternionů má následující formu:

$$\dot{q}_b^a = \frac{1}{2}[\Omega_{ba}^a] q_b^a \tag{2.6.6}$$

kde $[\Omega_{ba}^a] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$, $\omega_{ba}^a = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$

Normování kvaternionů je jedna z důležitých vlastností, obecně je dána kvadratickou normou:

$$\|q\| = \|q\|_2 = \sqrt{q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2} \tag{2.6.7}$$

Sdružený kvaternion ke kvaternionu q má zápis q^* a je analogický ke sdružené hodnotě komplexního čísla. Je definován jako:

$$q^* = [q_0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3] = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \tag{2.6.8}$$

Násobení kvaternionu se sdruženým kvaternionem zleva nebo zprava dostaneme opět kvadratickou normu:

$$\|q\| = \|q\|_2 = (qq^*)^{\frac{1}{2}} = (q^*q)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6.9}$$

Z rovnice (2.6.9) dostaneme užitečné zjištění, že inverze kvaternionů je podobná jako u reálných čísel:

$$qq^{-1} = q^{-1}q = q_0 - 0i - 0j - 0k = 1 \tag{2.6.10}$$

Takže z výrazu (2.6.8) nám vyplyne následující jednoduchý výraz pro kvaterniovou inverzi:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|_2} \tag{2.6.11}$$

Pokud je kvadratická norma kvaternionu rovna 1, pak z výrazu (2.6.11) vyplývá, že inverze kvaternionu je rovna jeho sdružené hodnotě.

Použitím kvaternionů získáme několik výhod oproti použití úhlové reprezentace v inerciální navigační soustavě, která má s některými úhly problémy. Vezměme si Eulerovou úhlovou diferenciální soustavu rovnic:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta\sin\phi & \tan\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sec\theta\sin\phi & \sec\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{2.6.12}$$

Tato rovnice má následující nespojitosti. Proto musíme použít přídavný algoritmus v Kalmanově filtru na jejich eliminaci, což je poměrně nešikovné a strojově náročné:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^{(-)}} (\dot{\phi}) \to \infty$$

$$\lim_{\theta \to \frac{-\pi}{2}^{(+)}} (\dot{\phi}) \to -\infty$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^{(-)}} (\dot{\psi}) \to \infty$$

$$\lim_{\theta \to \frac{-\pi}{2}^{(+)}} (\dot{\psi}) \to \infty$$

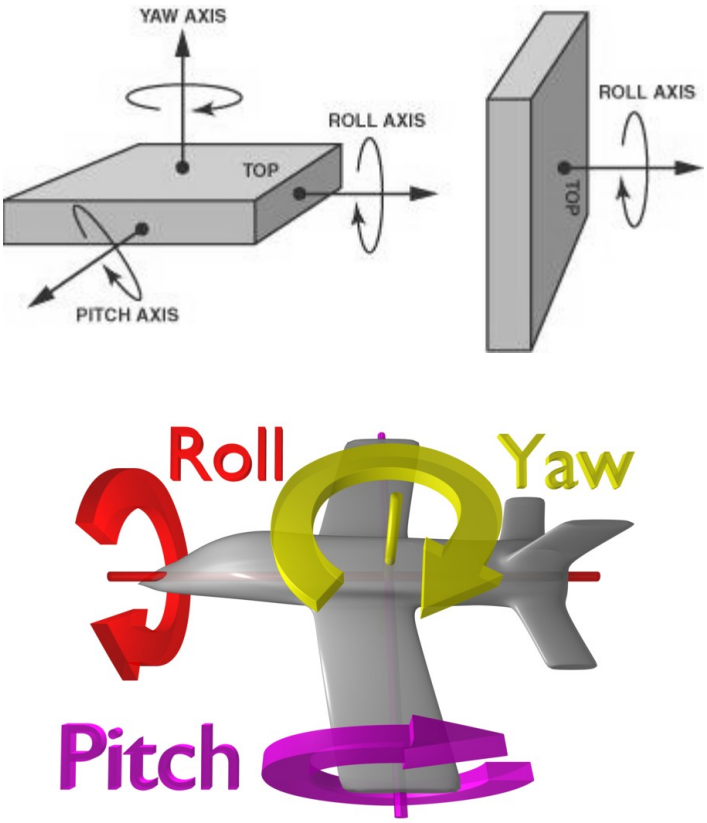
Kvaterniony nemají tyto problémy se singularitami. Obecně jsou jednodušší k implementaci v nelineárních pozorovatelích stavů, protože kvaterniová algebra používá polynomiální reprezentaci spíše než trigonometrickou reprezentaci. Z toho samého důvodu jsou kvaterniony snadněji implementovatelné ve vestavěných digitálních zařízeních, protože sčítání a násobení zaberou méně strojového času než trigonometrické funkce. Nevýhodou užití čtyřstavové kvaterniové reprezentace je, že má o jeden přídavný stav více oproti třístavové úhlové reprezentaci a navíc není tak jednoduchý pro představu oproti úhlové reprezentaci.

3 Senzory

V této kapitole osvětlíme fungování senzorů úhlové rychlosti (gyroskopům), zrychleni (akcelerometrům) a magnetického pole (magnetometrům). Budou zde uvedeny některé základní vztahy a obrázky vysvětlující principy těchto senzorů. Dále budeme uvažovat pouze senzory, které jsou vyrobeny metodou MEMS, tzn. integrovány na čipu.

3.1 Gyroskopy

Gyroskopy jsou obecně určené pro měření úhlové rychlosti, tzn. údaj o tom, jak se měřený objekt rychle otáčí, v jednotkách stupňů/sekundu (°/s). Rotaci je možné typicky měřit vzhledem k jedné ze tří os z, y, x, někdy označované jako svislá (kolmá) osa (yaw axis), příčná osa (pitch axis) a podélná osa (roll axis), viz. *Obrázek 3-1-1*. Obvody pracující na principu Coriolisovy síly, umějí měřit pouze v jednom směru- kolmém na plochu čipu (yaw axis). Pro jiné směry je nutné zajistit správné natočení a umístění senzoru [5].

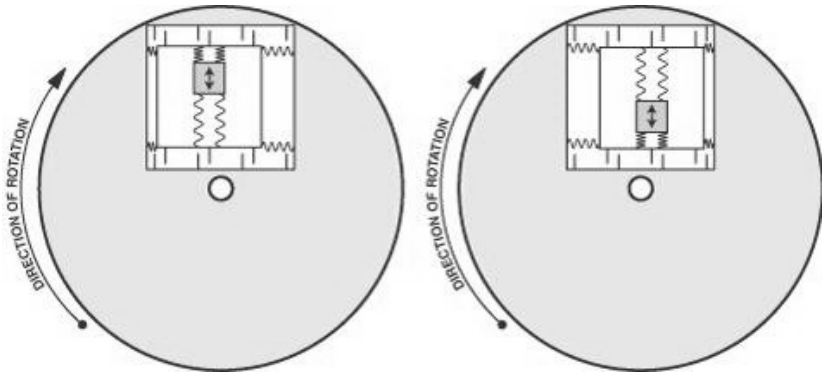


Obrázek 3-1-1: Možnosti měření natočení a rotace pomocí gyroskopů

Coriolisova síla je tzv. virtuální síla, která působí na libovolný hmotný předmět či objekt, který se pohybuje rychlostí v v soustavě rotující kolem osy rotace úhlovou rychlostí ω, pro Coriolisovu sílu platí následující vztah [3]:

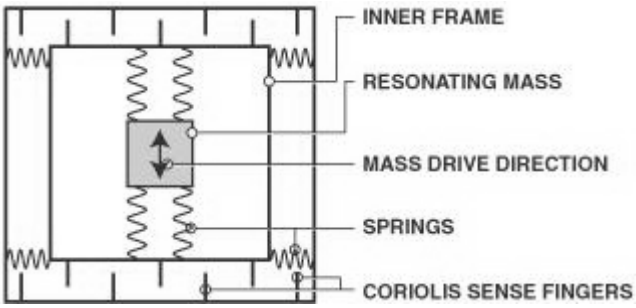
$$Fc = 2mv \times \omega \tag{3.1.1}$$

Na *Obrázku 3-1-2* vidíme, že při pohybu objektu, upevněného na pružinách uvnitř rámu, směrem ven (k okraji rotujícího kotouče) na něj působí Coriolisova síla směrem doleva, při opačném směru pohybu objektu pak doprava. Protože velikost a směr této síly je úměrný i velikosti úhlové rychlosti a směru otáčení, lze tento systém s úspěchem využít pro jejich měření [5].



Obrázek 3-1-2: Příklad funkce struktury snímače gyroskopu při rotaci

Základ gyroskopu tvoří rezonující struktura (resonationg mass) upevněná v rámu (inner frame), která se vlivem vlastní mechanické rezonance, zde reprezentované pružinami (springs), pohybuje v uvedeném směru (Mass drive direction) - kolmém na směr otáčení (*viz. Obrázek 3-1-3*). Přitom vzniká Coriolisova síla úměrná úhlové rychlosti otáčení, která stlačí vnější pružiny rámu a způsobí vzájemný posuv měřících plošek (Coriolis sense fingers) fungující jako elektrody vzduchových kondenzátorů. Výstup je tedy změna kapacity úměrná úhlové rychlosti otáčení °/s [5].



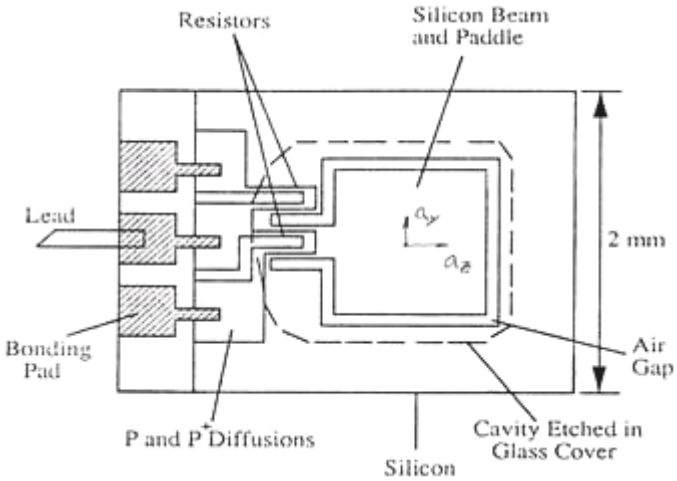
Obrázek 3-1-3: Zjednodušená struktura snímače MEMS gyroskopu

Využití gyroskopů je široké, pro představu uvedeme ty nejzajímavější např. detekce a měření rotačního pohybu, zpřesňování pozice systému GPS, stabilizace obrazu a předmětů, navádění a řízení raket a další.

3.2 Akcelerometry

Akcelerometry, senzory pro měření statického nebo dynamického zrychlení, jsou vhodné nejen pro měření odstředivých a setrvačných sil, ale i pro určování pozice tělesa, jeho naklonění nebo vibrací. Mezi často používaný princip, který je i velmi jednoduchý pro integraci na čip spolu s elektronikou, patří piezorezistivita.

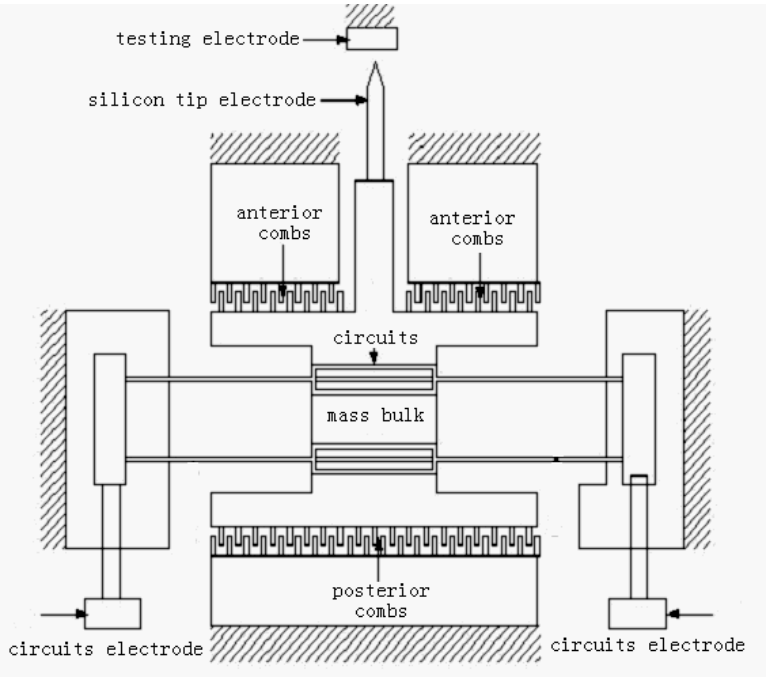
Zavěšená hmota integrovaného piezorezistivního akcelerometru není nic víc než zátěž na pružině připevněné k rámu. Když se rám pohne, hmota bude mít tendenci zůstat v klidu až do doby, kdy napjatá pružina předá dostatek síly hmotě k pohybu. Síla působící na pružinu je úměrná deformaci, která je dále přímo úměrná měřenému zrychlení, které se měří piezorezistory [5]. Piezorezistory převádějí mechenické napětí na změny odporu. Změna odporu může být snadno měřena změnou úbytku elektrického napětí. Tak je měřené zrychlení ve výsledku převedeno na elektrický napěťový signál. Jako převodník změny odporu na napětí se využívá známého Wheatstonova můstku. Příklad akcelerometru snímajícího zrychlení v ose *Y* je zobrazen na *Obrázku 3-2-1*.



Obrázek 3-2-1: Jedno z možných provedení malého diskrétního piezorezistivního akcelerometru

3.3 Magnetometry

Magnetometr je senzor na měření síly nebo směru magnetického pole v blízkém okolí senzoru. Zemská přitažlivost (magnetosféra) se mění v závislosti na poloze, ve které se zrovna na Zemi nacházíte. Může to být způsobeno lišícím se složením skal anebo vzájemným ovlivněním částic vyzařující ze slunce a magnetosféry [3].



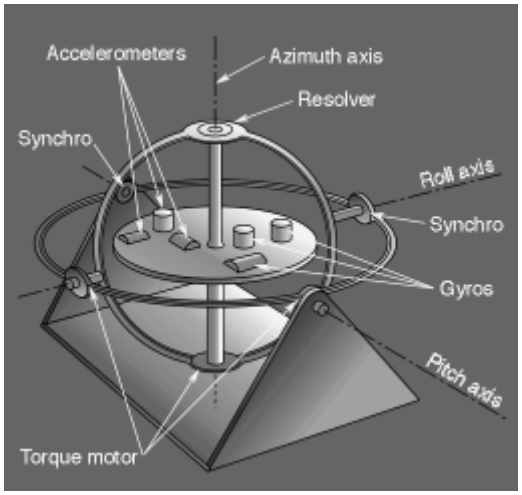
Obrázek 3-3-1: Jedno z možných provedení magnetometru

4 Modely systémů v Inerciální Navigační Soustavě

4.1 Gimballed systém

Před vynalezením strapdown systémů byla velmi populární inerciální navigace založena na gimballed (výkyvné uložení) systémech. Akcelerometry byly montovány na gimballed platformu, která udržovala rovnováhu pomocí servomotorů ovládaných gyroskopy. V tomto uložení byly x a y akcelerometry vždy orientovány k severní/východní rovině (*viz. Obrázek 4-1-1*).

Modelování chyb pro gimballed inerciální navigační systémy (**G**imballed **I**nertial **N**avigation **S**ystems - GINS) jsou velmi dobře popsány. Převládající modely jsou devítistavové Ψ- a Φ-úhlové modely chyb. Literatura zabývající se GINS je rozsáhlá, ale v této práci se budeme zabývat pouze strapdown systémy [1,3].

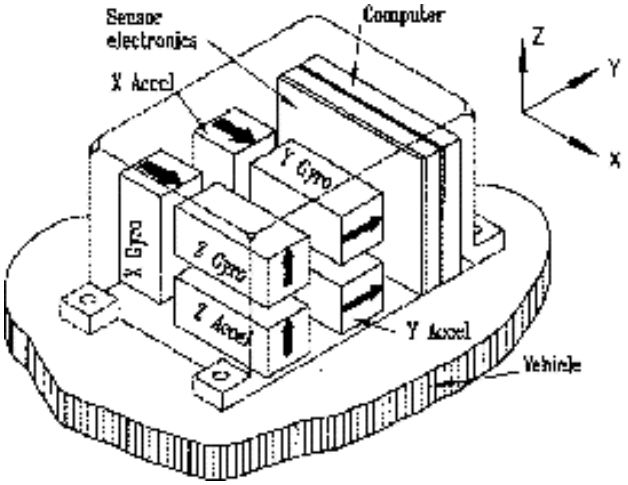


Obrázek 4-1-1: Princip gimballed platformy

4.2 Strapdown systém

V poslední dekádě se MEMS těší veliké popularitě ve strapdown inerciálních navigačních systémech (**S**trap-**D**own **I**nertial **N**avigation **S**ystems – SDINS). Než-li montovat akcelerometry na gimballed platformy, je lepší zakomponovat akcelerometry

přímo do sledovaného objektu. MEMS dělá inerciální senzory jako je akcelerometr, gyroskop a magnetometr velmi levné a malé, to dovoluje začlenit tyto senzory přímo do IMU jednotek. Inerciální měřící jednotka (**I**nertial **M**easurement **U**nit - IMU) je strapdown ekvivalent k tradičním gimballed platformám. Následkem toho, že jsou levnější a menší, SDINS většinou nahradily GINS v navigačních aplikacích [1,3].



Obrázek 4-2-1: Princip strapdown platformy s technologií MEMS

4.3 Sloučení technik pro odhad orientace

Real-time sledovaní orientace má velmi široký rozsah v aplikacích jako virtuální realita, autonomní navigace vozidel, robotika a mnoho dalších. Současný výzkum se zaměřuje na vývoj sledovaní orientace založené na MEMS inerciálních senzorech, protože jsou levné a malé.

Užitím diferenciální kvaterniové rovnice (2.6.6) a zanedbáním rotačního efektu Země můžeme určit orientaci objektu použitím pouze tří gyroskopů v triádovém uspořádání. Toto však není praktické řešení, protože chyby senzorů jsou integrovány a způsobují růst chyb orientace stavů. K vylepšení odhadu orientace stavů vědci zkombinovali gyroskopy s dalšími senzory. Nejčastější kombinace je s akcelerometry

v triádě, které tvoří kompletní soupravu IMU senzoru, dále můžeme přidat ještě magnetometry a inklinometry.

Vědci při hledání problému orientace experimentovali s různými modely, s různými typy odhadů a konfigurací senzorů. Uvedu zde některé z nich.

Foxlin [8] vyvinul estimátor Kalmanova filtru pro „head-mounted“ inerciální sledování použitím gyroskopů v triádě, hydraulických inklinometrů a magnetických kompasů. Diferenciální rovnice pro Eulerovu úhlovou soustavu byla integrována do procesního modelu:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \sin\psi & \tan\theta \cos\psi \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sec\theta \sin\psi & \sec\theta \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

Pořadí z, y, x bylo použito pro reprezentaci yaw, pitch, roll. Tento model byl použit pro vývoj nelineárních Complimentary Kalmanových filtrů navrhnutých pro odhad chyb stavů.

Vaganay [10] vyvinul sledování orientace pro terénní, venkovní a mobilní roboty. Sada senzorů, která byla použita, obsahovala „levné“ tříosé gyroskopy a dva „levné“ akcelerometry zarovnané k měření roll a pitch úhlů ve strapdown platformě. Jestliže je gravitační zrychlení ve směru dolů „down“, tak roll a pitch úhly mají uzavřenou formu, kterou můžeme lehce odvodit:

$$roll = -\sin^{-1}\left(\frac{g_x}{\|g\|_2}\right) \tag{4.3.2}$$

$$pitch = \sin^{-1}\left(\frac{g_y \cos(roll)}{\|g\|_2}\right) \tag{4.3.3}$$

kde $\|g\|_2$ je velikost gravitačního zrychlení $g = [g_x \quad g_y \quad g_z]^T$

Odhad orientace z gyroskopů je získán použitím diferenciálních kvaterniových rovnic. Následkem integrace a chyb senzorů vzniká v odhadu orientace posun „drift“.

Rozšířený Kalmanův filtr byl vyvinut ke sledování posunu „driftu“ v roll a pitch úhlech, avšak s úhlem yaw bez korekce. Tento filtr produkuje smysluplné odhady pro roll a pitch. Nicméně přesné hodnoty nebyli dostupné následkem nedostatku „pravdivých“ sledování k porovnání se zkušebními výsledky.

Marians [11] vyvinul rozšířený Kalmanův filtr pro odhad orientace použitím MARG (magnetických, úhlových rychlostí, gravitačních) senzorů. MARG senzor obsahuje strapdown tříosý gyroskop, tříosý akcelerometr a tříosý magnetometr. Orientace byla definována kvaterniony místo v Eulerových úhlových a rotačních maticích. Procesní model systému měl stavový vektor se sedmi stavy, tři pro úhlové rychlosti a čtyři pro kvaterniony. Stejně tak kvaterniový stavový model obsahoval normalizaci.

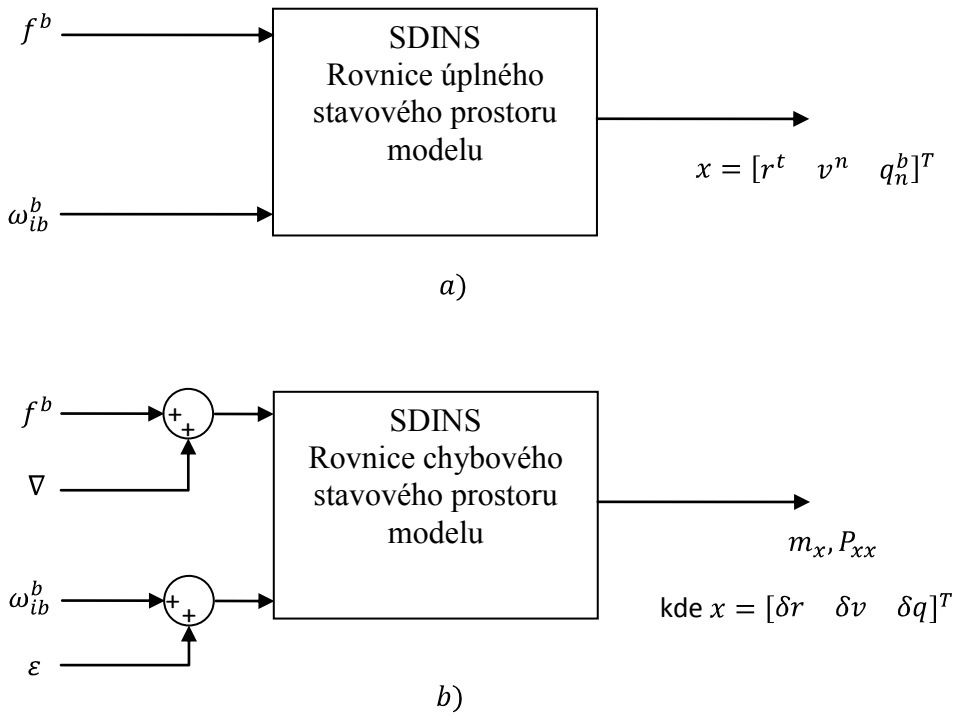
Byly vyvinuty dvě konfigurace Kalmanových filtrů, oba užívají stejný procesní model, ale rozdílný výstupní model měření. První přístup může být nazýván jako přístup „hrubé síly“. Každé měření z naměřeného vektoru y na výstupu senzoru MARG vytváří devíti-stavový vektor y. Při použití rotačního algoritmu se stávají tyto výstupní rovnice měření velmi komplikované a nelineární. Druhý přístup používá externí algoritmus (např. rozšířený Kalmanův filtr) k výpočtu kvaternionů. Vektor měření y má v tomto případě pouze sedm rovnic, tři měření úhlové rychlosti a čtyři kvaterniony. Proto se tedy vektor měření rovná stavovému vektoru mající za následek lineární stavový vektor. Tento přístup je značně méně komplikovaný nežli první přístup, ačkoliv je Kalmanův filtr více či méně redukovaný na filtr šumu, než na nástroj slučovaní dat.

5 Modelování SDINS soustavy s použitím gyroskopů a akcelerometrů

K tomu, abychom mohli implementovat strapdown inerciální navigační systém do Kalmanova filtru, je nutno určit stavový model. Jsou dvě metody, které jsou nejvíce používané pro fůzi dat v inerciálním navigačním systému.

a) Přímá filtrace používající úplný stavový model

b) Nepřímá filtrace používající chybový stavový model



Obrázek 5-1: Schéma diagramu ukazující analýzu užitím a) SDINS úplný stavový model; b) SDINS chybový stavový model

V této kapitole je úplný stavový model a chybový stavový model odvozen od základních navigačních rovnic. Výstupy úplného stavového modelu jsou pozice, rychlost a orientace dávající zrychlení a úhlovou rychlost. Tento model předpokládá, že na vstupech nejsou žádné chyby a šum.

Výstupy chybového stavového modelu odpovídají chybě pozice, rychlosti a orientace akcelerometrů a gyroskopů měřených IMU, stejně tak jako stochastickým vlastnostem chyb akcelerometrů ∇ a chyb gyroskopů ε.

5.1 Navigační rovnice

Navigační rovnice pro inerciální jednotku musí být odvozeny od *i*-soustavy. Tato je obecně převzata od *e*-soustavy (ECI), která je umístěna v centru zeměkoule a upevněna v prostoru, tzn., že nerotuje se zemí. Pro účely reference budou navigační rovnice vloženy do *n*-soustavy (NED), protože geografická reprezentace North, East a Down soustavy je více intuitivní.

S *e*-soustavou jako *i*-soustavou jsou rovnice pro akceleraci na zemském povrchu vztaženy k *n*-soustavě:

$$a^n = f^n + g^n - \omega_{in}^n \times \omega_{in}^n \times r^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \tag{5.1.1}$$

Pokud není objekt ve velké nadmořské výšce, tak velikost r je relativně malá. Dostředivá akcelerace výrazu $\omega_{in}^n \times \omega_{in}^n \times r^n$ je téměř zanedbatelná v inerciálních navigačních rovnicích. Coriolisova akcelerace $\omega_{ie}^n \times v^n$, efekt zemského zakřivení $\omega_{en}^n \times v^n$ a efekt gravitační síly g^n jsou hlavní síly, které musí být eliminovány. Pro lokální navigaci, Coriolisův vztah a efekt zemského zakřivení jsou obvykle zanedbány, ale pro odvozování budou zahrnuty, dokud nebudou potřebné zjednodušující předpoklady. Podle [12] jsou rovnice pro akceleraci:

$$a^n = f^n + g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \tag{5.1.2}$$

V základní rovnici pro inerciální navigaci je dvounásobně integrována akcelerace ke hrubému stanovení polohy. Můžeme je vyjádřit následujícíma diferenciálními rovnicemi:

$$\dot{r}^e = C_n^e v^n \tag{5.1.3}$$

$$\dot{v}^n = a^n \tag{5.1.4}$$

Rovnice (5.1.2) až (5.1.4) jsou použity v příští kapitole k sestavení stavového prostoru modelu SDINS.

5.2 SDINS stavový prostor modelu na kvaterniové bázi

5.2.1 Rotační model

Jak již bylo uvedeno v sekci o kvaternionech v podkapitole 2.6, užití kvaternionu jako orientace stavů je lepší než orientace pomocí úhlové reprezentace, protože kvaterniony nemají singularity, mají menší problémy s normalizací a nahrazují těžkopádné trigonometrické funkce více pohodlnějšími polynomiálními operátory.

Kvaterniony dovedou rotovat vektor z *n*-soustavy do *b*-soustavy, protože signály IMU jednotky jsou v *b*-soustavě (BODY) a potřebujeme je mít rotované do *n*-soustavy (NED), abychom mohli použít vztah (5.1.2):

$$q_n^b = [\mathrm{q}_0 \quad \mathrm{q}_1 \quad \mathrm{q}_2 \quad \mathrm{q}_3]^T \tag{5.2.1}$$

Kvaterniové diferenciální rovnice jsou:

$$\dot{q}_n^b = [\Omega_{nb}^b] q_n^b \tag{5.2.2}$$

$$\text{kde } [\Omega_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}, \omega_{nb}^{n} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

b-soustava je přichycena ke gyroskopům, takže signály z gyroskopu měří úhlové zrychlení *b*-soustavy respektující *i*-soustavu ω_{ib}^{i}. Toto může být dekomponováno do úhlových rychlostí *e*-soustavy s respektem k *i*-soustavě ω_{ie}^{b}, *i*-soustava s respektem k *n*-soustavě ω_{en}^{b} a *n*-soustava s respektem k *b*-soustavě ω_{nb}^{b}.

$$\omega_{ib}^{i} = \omega_{ie}^{b} + \omega_{en}^{b} + \omega_{nb}^{b} \tag{5.2.3}$$

Substitucí (5.2.3) za diferenciální rovnici (5.2.2) dostaneme:

$$\dot{q}_n^b = \frac{1}{2}[\Omega_{ib}^b]q_n^b - \frac{1}{2}[\Omega_{ie}^b]q_n^b - \frac{1}{2}[\Omega_{en}^b]q_n^b \tag{5.2.4}$$

5.2.2 Translační model

Ve většině případů nás zajímá pozice v tangent souřadnicové soustavě (TAN frame) nebo soustavě s počátkem připevněným k zemskému povrchu a zarovnaném s *n*-soustavou. Namísto definování pozice s respektem na *e*-soustavu (5.1.3) můžeme reprezentovat jako:

$$\dot{r}^t = v^n \tag{5.2.5}$$

Hlavní předpoklad v (5.2.5) je, že dynamika rotační matice popisující zakřivení Země C_n^e je zanedbatelná, takže nemá dynamiku, proto nám vyjde konstantní matice aktualizovaná známými geodetickými transformacemi, jako je ve [12]. Výsledkem je rychlost *b*-soustavy relativní k *n*-soustavě (stejně tak k tangent soustavě) přibližně odvozená pozice *b*-soustavy relativní k tangent soustavě. Diferenciální rovnice pro rychlost může být vyjádřena z měření akcelerace IMU jednotkou, f^b:

$$\dot{v}^n = C_b^n f^b + g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \tag{5.2.6}$$

Transformační matice C_b^n může být vyjádřená v kvaternionech q_n^b definovanými v (5.2.4):

$$C_b^n = \left(C_n^b(q_n^b)\right)^{-1} = \left(C_n^b(q_n^b)\right)^T \tag{5.2.7}$$

$$= \begin{bmatrix} 2q_0{}^2 - 1 + 2q_1{}^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0{}^2 - 1 + 2q_2{}^2 & 2q_3q_2 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_3q_2 - 2q_0q_1 & 2q_0{}^2 - 1 + 2q_3{}^2 \end{bmatrix}^T$$

Kombinací rovnic (5.2.4) až (5.2.7) dostaneme rovnice úplného stavového prostoru:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}^t \\ \dot{v}^n \\ \dot{q}_n^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^n \\ C_b^n f^b + g^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n \\ \frac{1}{2}[\Omega_{ib}^b]q_n^b - \frac{1}{2}[\Omega_{ie}^b]q_n^b - \frac{1}{2}[\Omega_{en}^b]q_n^b \end{bmatrix} \tag{5.2.8}$$

5.2.3 Zjednodušený lokální navigační model

Zjednodušený lokální navigační model může být zkonstruován zavedením několika předpokladů. Coriolisova síla a zakřivení Země jsou příliš malé pro detekci. Maximální Coriolisova síla je $2\omega_{ie} \times v = 1.5 \times 10^{-7} m/s^2$ a maximální rychlost rotace Země je $\omega_{ie} = 4.17 \times 10^{-6} deg/s$ [1].

Protože efekt zemské rotace a zakřivení jsou velmi malé pro lokální navigační účely, pak můžeme předpokládat následující zjednodušení:

$$\omega_{ie}^n \cong 0 \tag{5.2.9}$$

$$\omega_{en}^n \cong 0 \tag{5.2.10}$$

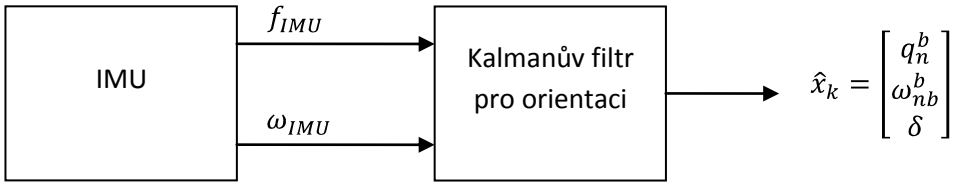
Doplněním do rovnice (5.2.8) bude stavový prostor zredukován na:

$$\begin{bmatrix} \dot{r}^t \\ \dot{v}^n \\ \dot{q}_n^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^n \\ C_b^n f^b + g^n \\ \frac{1}{2}[\Omega_{ib}^b] q_n^b \end{bmatrix} \tag{5.2.11}$$

Vzpomeňme si na vektor akcelerace f^b a vektor úhlové rychlosti ω_{ib}^b, jsou to velikosti měřené IMU akcelerometry a gyroskopy spolu s některými chybami ∇ a ε.

5.3 Spojení inerciálních senzorových dat pro odhad orientace

Tato podkapitola ukazuje algoritmus, který kombinuje měření z MEMS senzorů v IMU. Senzory v IMU jsou tři gyroskopy a tři akcelerometry v triádě. Použitím perfektních gyroskopických měření může být odhad orientace určen docela přesně, avšak použitím reálných senzorů roste chyba odhadu s časem.



Obrázek 5-3-1: Diagram problematiky odhadu orientace

Je známých několik faktů o IMU, kterých může být využito ke zpřesnění odhadu Kalmanova filtru. Působení zemské rotace můžeme považovat jako zanedbatelné. Na malých vzdálenostech v řádu kilometrů můžeme považovat gravitační vektor za konstantu se zarovnanou vertikální osou ve směru k Zemi. Akcelerometry jsou použity pro korekční měření tak, že měří v úvahu pouze gravitační zrychlení k omezení chyby orientace. S těmito fakty a rotačním modelem SDINS IMU z kapitoly 5.2 je Kalmanův filtr navržen k dosažení nejlepšího odhadu orientace, použitím pouze senzorů IMU [1].

5.3.1 Procesní model

Senzor orientace, který je modelován v této podkapitole je standardní strapdown IMU s gyroskopy a akcelerometry v ortogonální triádě.

Následující procesní model pro rozšířený Kalmanův filtr je navrhnut a používán ve spojitém čase. Diskrétní model můžeme lehce odvodit ze spojitého. Pro modelování rotačního pohybu jsou použity kvaterniony. Stavový vektor obsahuje kvaterniony q_n^b, úhlové rychlosti ω_{nb}^b a nízkofrekvenční drift gyroskopů $\delta\omega$:

$$x = [q_n^b \quad \omega_{nb}^b \quad \delta\omega]^T \tag{5.3.1}$$

Reprezentace v kvaternionech je transformována do směrové kosinové matice použitím rovnice:

$$C_n^b = \begin{bmatrix} 2q_0{}^2 - 1 + 2q_1{}^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0{}^2 - 1 + 2q_2{}^2 & 2q_3q_2 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_3q_2 - 2q_0q_1 & 2q_0{}^2 - 1 + 2q_3{}^2 \end{bmatrix} \tag{5.3.2}$$

kde $q_o^b = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$

Kvaterniony, které jsou transformované z *n*-souřadnic do *b*-souřadnic q_n^b jsou vyjádřeny diferenciálními rovnicemi:

$$\dot{q}_n^b = \frac{1}{2}[\Omega_{ob}^b]q_o^b \tag{5.3.3}$$

kde $[\Omega_{nb}^b] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$, $\omega_{nb}^n = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$

Úhlové rychlosti ω_{nb}^{n} jsou vyjádřeny aproximací funkce spektrální hustoty výkonu, ve které jsou obsaženy tři stupně volnosti pohybu. Tento model je prvního řádu s časovou konstantou nastavenou podle šířky pásma systému.

$$\dot{\omega}_{nb}^{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{\omega_x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_{\omega_y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{\omega_z}} \end{bmatrix} \omega_{nb}^{b} + \boldsymbol{w}_{\omega} \tag{5.3.4}$$

Vyjádření chyby driftu gyroskopu δ je určeno statickým testem. Diferenciální rovnice pro chybu je:

$$\delta\dot{\omega}_{nb}^{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{\delta\omega_x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau_{\delta\omega_y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{\delta\omega_z}} \end{bmatrix} \delta\omega + \boldsymbol{w}_{\delta\omega} \tag{5.3.5}$$

5.3.2 Model měření

Z IMU dostaneme měřen gyroskopů a akcelerometrů v triádě. Vektor měření rozšířeného Kalmanova filtru je:

$$y = [f_{IMU} \quad \omega_{IMU}]^T \tag{5.3.6}$$

Úhlová rychlost ω_{IMU} je měřena s chybou driftu gyroskopu $\delta\omega$ a se stochastickým vektorem chyb ε:

$$\omega_{IMU} = \omega_{nb}^{b} + \delta\omega + \varepsilon \tag{5.3.7}$$

U akcelerometru se předpokládá, že měří pouze gravitační zrychlení stejně tak stochastický vektor chyb ∇. Použitím kvaterniové reprezentace k rotaci konstantní gravitační síly dostaneme měření akcelerometrů jako:

$$f_{IMU} = C_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\|g\|_2 \end{bmatrix} + \nabla \tag{5.3.8}$$

$$= \|g\|_2 \begin{bmatrix} -2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ -2q_0q_1 - 2q_2q_3 \\ -q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} + \nabla$$

kde $\|g\|_2$ je velikost gravitačního zrychlení

6 Modelování SDINS s použitím gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů

Tato kapitola ukazuje použití Rozšířeného Kalmanova filtru EKF, Complementary KF a Unscented KF (UKF) pro real-time odhad orientace použitím MARG (magnetometrů, gyroskopů a akcelerometrů - **M**agnetic, **A**ngular **R**ate and **G**ravity) senzorů. Každý senzor obsahuje tříosý magnetometr, tříosý gyroskop a tříosý akcelerometr. Gauss-Newtonův iterační algoritmus je využit k nalezení nejlepšího kvaternionu (úhlů), které závisí na měření akcelerace a magnetického pole v *b*-soustavě k výpočtu hodnot v *i*-soustavě. Nejlepší nalezený kvaternion (úhly) je použit jako část měření pro Kalmanův filtr. U EKF je důsledkem použití tohoto algoritmu, že rovnice měření EKF jsou lineární a výpočetní náročnost se podstatně sníží, tuto skutečnost můžeme použít pro real-time odhad orientace. Pro Complimentary KF a UKF slouží Gauss-Newtonův algoritmus pro výpočet úhlů a kvaternionů.

6.1 Algoritmus pro konvergenci kvaternionů

Nejdříve popíšeme algoritmy pro konvergenci. Mějme tříosou-ortogonální souřadnicovou soustavu, která je upevněna k těžišti. Pokud jsou tři akcelerometry a tři magnetometry umístěny v počátku souřadnic, pak jejich složky měření gravitačního zrychlení a magnetického pole v ose soustavy jsou stejné jako rotace v *b*-soustavě. Protože jsou tyto hodnoty známé a konstantní pro danou geografickou polohu, můžeme očekávat, že existuje reprezentace v kvaternionech závisející na měřeních (hodnoty *b*-soustavy) ke skutečným magnetickým a gravitačním polím (hodnoty *e*-soustavy). Je zřejmé, že budeme mít několik zdrojů chyb zahrnujících porušení souososti mezi osami u páru senzorů, lineární akceleraci špatně určenou jako gravitační zrychlení, kolísání obou gravitačních i magnetických polí a vlastní chyby senzorů. Jako výsledek

dostaneme kvaternion, který nepřevádí přesně to, co měří (*b*-soustavu) do hodnot známé *e*-soustavy. Řešením je určení nejlepšího kvaternionu (úhlu) takového, který po převedení minimalizuje chybu. Na tento problém minimalizace chyby použijeme kritérium chyby nejmenších čtverců (**M**inimum **S**quared **E**rror - MSE). Chybu můžeme minimalizovat buď v *b*-soustavě anebo v e-soustavě. V tomto odvození budeme minimalizovat chybu v *e*-soustavě.

Mějme Q definovanou jako funkci chyb [11]:

$$Q^e = \varepsilon^T \varepsilon = \left(y_1^e - M y_0^b\right)^T \left(y_1^e - M y_0^b\right) \tag{6.1.1}$$

kde y_1^e je 6x1 vektor s hodnotami gravitačního zrychlení a magnetického pole v *e*-soustavě a y_0^b je 6x1 vektor měření gravitačního zrychlení a magnetického pole v *b*-soustavě a

$$M = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \tag{6.1.2}$$

Matice R v rovnici (6.1.2) je definována jako:

$$R = \begin{bmatrix} a^2 + d^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & b^2 + d^2 - a^2 - c^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & c^2 + d^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix} \tag{6.1.3}$$

Protože hodnoty y_0 jsou naměřené hodnoty a y_1 jsou hodnoty známé z geografické polohy, pak chyba mezi nimi je funkcí matice M, která střídavě závisí na čtyřech komponentech kvaternionů (třech úhlech). Úkolem je najít iterativně takové hodnoty komponent kvaternionů (úhlů), které budou minimalizovat tuto chybu.

V literatuře existuje mnoho optimalizačních algoritmů. Někde uprostřed je Gauss-Newtonův algoritmus, který je s Newtonovým algoritmem využívaný nejvíce. V této práci se budeme zabývat pouze Gauss-Newtonovým algoritmem. Formulace Gauss-Newtonova algoritmu je v [11,13]:

$$\hat{q}_{k+1} = \hat{q}_k - [J^T(\hat{q}_k) J(\hat{q}_k)]^{-1} J^T(\hat{q}_k) (\varepsilon^e(\hat{q}_k))^T \tag{6.1.4}$$

kde $\hat{q}$ je vektor se čtyřmi komponentami kvaternionů a J je Jakobiho matice definována jako [11]:

$$J = \left[\left(\frac{\delta M}{\delta \mathrm{q}_0} y_0^b\right)\left(\frac{\delta M}{\delta \mathrm{q}_1} y_0^b\right)\left(\frac{\delta M}{\delta \mathrm{q}_2} y_0^b\right)\left(\frac{\delta M}{\delta \mathrm{q}_3} y_0^b\right)\right] \tag{6.1.5}$$

Úspěšnost alternativního Kalmanova filtru závisí na konvergenci Gauss-Newtonovy metody. Tato metoda většinou konverguje do 3 až 4 kroků.

Protože budeme používat Gauss-Newtonův algoritmus i pro určování úhlů yaw, pitch a roll, uvedeme zde pouze malé změny u tohoto algoritmu. Rovnice (6.1.1) a (6.1.2) zůstávají stejné. Matice R bude mít následující tvar:

$$R = \tag{6.1.6}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\psi & \cos\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

Gauss-Newtonův algoritmus se změní pouze formálně na:

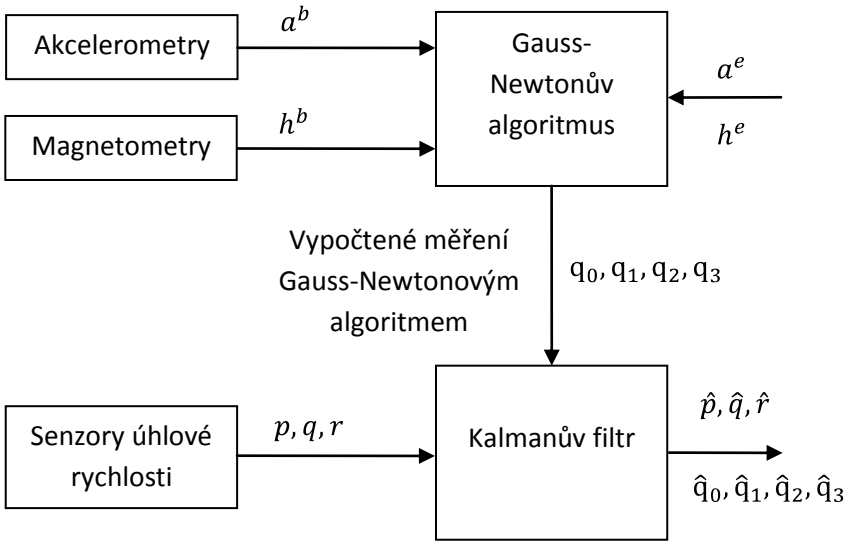
$$\hat{\omega}_{k+1} = \hat{\omega}_k - [J^T(\hat{\omega}_k)J(\hat{\omega}_k)]^{-1}J^T(\hat{\omega}_k)(\varepsilon^e(\hat{\omega}_k))^T \tag{6.1.7}$$

a nakonec Jakobiho rovnice bude mít následující tvar:

$$J = \left[\left(\frac{\delta M}{\delta \psi} y_0^b\right)\left(\frac{\delta M}{\delta \theta} y_0^b\right)\left(\frac{\delta M}{\delta \phi} y_0^b\right)\right] \tag{6.1.8}$$

6.2 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s EKF algoritmem

S úvodem konvergence algoritmů jako externí cyklus Kalmanova filtru, jsou komponenty kvaternionů využitelné jako vektor měření. *Obrázek 6-2-1* ukazuje schematický a datový tok Kalmanova filtru.



Obrázek 6-2-1: Diagram Kalmanova filtru používající externí Gauss-Newtonův algoritmus

6.2.1 Procesní model

Ve stavovém modelu jsou následující stavy [14]:

x_1 úhlová rychlost p

x_2 úhlová rychlost q

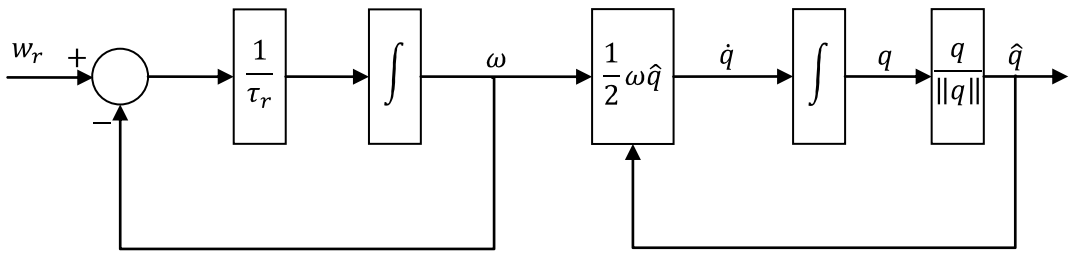
x_3 úhlová rychlost r

x_4 komponenta kvaternionu q_0

x_5 komponenta kvaternionu q_1

x_6 komponenta kvaternionu q_2

x_7 komponenta kvaternionu q_3



Obrázek 6-2-2: Stavový model

Při použití stavového modelu na *Obrázku 6-2-2* dostaneme následující stavové rovnice:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau_{r_x}} x_1 + \frac{1}{\tau_{r_x}} w_{r_x} \tag{6.2.1}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_{r_y}} x_2 + \frac{1}{\tau_{r_y}} w_{r_y} \tag{6.2.2}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau_{r_z}} x_3 + \frac{1}{\tau_{r_z}} w_{r_z} \tag{6.2.3}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(x_3 x_5 - x_2 x_6 + x_1 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.2.4}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{(-x_3 x_4 - x_1 x_6 + x_2 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.2.5}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{(-x_2 x_4 - x_1 x_5 + x_3 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.2.6}$$

$$\dot{x}_7 = \frac{(-x_1x_4 - x_2x_5 - x_3x_6)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.2.7}$$

6.2.2 Model měření

Model měření je při použití Gauss-Newtonové metodě velmi jednoduchý [14]:

y_1 úhlová rychlost p

y_2 úhlová rychlost q

y_3 úhlová rychlost r

y_4 komponenta kvaternionu q_0

y_5 komponenta kvaternionu q_1

y_6 komponenta kvaternionu q_2

y_7 komponenta kvaternionu q_3

Jak lze vidět, tak jsou výstupy stejné jako stavy, proto tedy máme výstupní rovnice jednoduše určeny:

$$y_i = x_i \text{ kde } i = 1, \dots, 7$$

Ačkoliv jsou výstupní rovnice lineární, tak je rozšířený Kalmanův filtr vyžadován, protože část stavových rovnic je stále nelineární. Nicméně tyto linearity významně zjednodušují návrh filtru a snižují výpočetní náročnost pro real-time implementaci.

6.2.3 Algoritmus

Nejdříve si musíme inicializovat model nastavením matic Q, R_1, R_2, počátečních stavů x a kovarianční matice P_{k-1}. Matice R_1 je kovarianční matice měření v případě, že Gauss-Newtonův (G-N) algoritmus konverguje a má velikost 6×6. R_2 je kovarianční matice měření v případě, že (G-N) algoritmus diverguje a má velikost 3×3. Matice C_1 je jednotková matice velikosti 7×7 pro případ, že (G-N) algoritmus konverguje, pokud diverguje, tak použijeme matici C_2, která má velikost 7×7, ale v posledních 4 sloupcích má nuly.

Nejdříve si musíme vyjádřit kvaterniony z měření akcelerometrů a magnetometrů, k tomu použijeme (G-N) algoritmus viz. *Obrázek 6.2.1*.

Tímto algoritmem dostaneme kvaterniony q a matici E, která nám bude v případě konvergence upravovat matici kovariance měření R_1 podle toho, jak dobrý je odhad kvaternionů z měření. Tato matice E je součástí (G-N) algoritmu (tento vztah musíme doplnit do (G-N)):

$$E = [J^T(q_k)J(q_k)]^{-1}J^T(q_k)M \tag{6.2.8}$$

kde matice M je z rovnice (6.1.2) a J z rovnice (6.1.5). Nyní vyjádříme novou matici kovariancí měření R_3 jako:

$$R_3 = \begin{bmatrix} R_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & ER_1E^T \end{bmatrix} \tag{6.2.9}$$

Pokud (G-N) diverguje, použijeme v dalších krocích pro výpočet Kalmanova zesílení K_k, odhad stavů $\hat{x}_k$ a kovariance $\hat{P}_k$ matice R_2 a C_2 (matici R_3 nahradíme R_2 a matici C_1 nahradíme C_2).

Vypočteme Kalmanovo zesílení:

$$K_k = \hat{P}_{k-1}C_1^T(C_1\hat{P}_{k-1}C_1^T + R_3) \tag{6.2.10}$$

Z Kalmanova zesílení a naměřených hodnot vypočteme *aposteriorní* odhad stavů:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(y - C_1\hat{x}_{k-1}) \tag{6.2.11}$$

Pokud (G-N) divergoval, použijeme pro výpočet $\hat{x}_k$ pouze měření z gyroskopů, takže vektor měření bude mít velikost 3. Vypočteme *aposteriorní* kovarianci chyby jako:

$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k-1}K_k(C_1\hat{P}_{k-1}C_1^T + R_3)K_k^T \tag{6.2.12}$$

Od tohoto kroku, již nezáleží na konvergenci (G-N) algoritmu. Nyní si vypočteme *apriorní* odhad kovarianční matice:

$$\hat{P}_{k-1} = A\hat{P}_kA^T + Q \tag{6.2.13}$$

Kde A je linearizovaná přechodová matice stavů. Dále vyřešíme diferenciální rovnice (6.2.1) až (6.2.7) metodou Runge-Kutta 4. řádu. Dostaneme nové *apriorní* odhady stavů $\hat{x}_{k-1}$. Nakonec je potřeba normalizovat kvaterniony v těchto stavech.

6.3 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s UKF

Základním předpoklad unscented Kalmanova filtru je jednodušší aproximace Gaussovského rozdělení bílého šumu, než ho aproximovat nelineární funkcí. UKF používá deterministické vzorkování k určení střední hodnoty a kovariance viz. podkapitola 2.4.

6.3.1 Procesní model

Ve stavovém modelu jsou následující stavy:

x_1 úhlová rychlost p

x_2 úhlová rychlost q

x_3 úhlová rychlost r

x_4 komponenta kvaternionu q_0

x_5 komponenta kvaternionu q_1

x_6 komponenta kvaternionu q_2

x_7 komponenta kvaternionu q_3

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau_{r_x}} x_1 + \frac{1}{\tau_{r_x}} w_{r_x} \tag{6.3.1}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_{r_y}} x_2 + \frac{1}{\tau_{r_y}} w_{r_y} \tag{6.3.2}$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau_{r_z}} x_3 + \frac{1}{\tau_{r_z}} w_{r_z} \tag{6.3.3}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(x_3 x_5 - x_2 x_6 + x_1 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.3.4}$$

$$\dot{x}_5 = \frac{(-x_3 x_4 - x_1 x_6 + x_2 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.3.5}$$

$$\dot{x}_6 = \frac{(-x_2 x_4 - x_1 x_5 + x_3 x_7)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.3.6}$$

$$\dot{x}_7 = \frac{(-x_1 x_4 - x_2 x_5 - x_3 x_6)}{2\sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}} \tag{6.3.7}$$

6.3.2 Model měření

$$h = \frac{q}{\sqrt{\mathrm{q}_0^2 + \mathrm{q}_1^2 + \mathrm{q}_2^2 + \mathrm{q}_3^2}} \tag{6.3.8}$$

6.3.3 Algoritmus

Máme dán stavový vektor v čase *k-1* s daným procesním modelem (6.3.1) až (6.3.7). Pro tento model musíme vypočítat množinu sigma bodů, kterou uložíme do matice χ_{k-1} o velikosti $\mathrm{L} \times (2\mathrm{L} + 1)$, kde L je dimenze stavového vektoru *x* (v našem případě je $\mathrm{L} = 7$, takže velikost matice χ_{k-1} je 7×15). Sloupce matice χ_{k-1} jsou [15]:

$$(\chi_{k-1})_0 = \hat{x}_{k-1} \tag{6.3.9}$$

$$(\chi_{k-1})_i = \hat{x}_{k-1} + \left(\sqrt{(\mathrm{L} + \lambda)P_{k-1}}\right)_i \quad i = 1, .., \mathrm{L} \tag{6.3.10}$$

$$(\chi_{k-1})_i = \hat{x}_{k-1} - \left(\sqrt{(\mathrm{L} + \lambda)P_{k-1}}\right)_{i-L} \quad i = \mathrm{L} + 1, .., 2\mathrm{L} \tag{6.3.11}$$

Kde $\left(\sqrt{(\mathrm{L} + \lambda)P_{k-1}}\right)_i$ je *i*-tý sloupec odmocniny matice a λ je definována jako:

$$\lambda = \alpha^2(\mathrm{L} + \kappa) - \mathrm{L} \tag{6.3.12}$$

kde α je parametr rozptylu (čím větší, tím větší je rozptyl sigma bodů od střední hodnoty) a κ je druhý parametr rozptylu. Předpokládáme, že $\left(\sqrt{(\mathrm{L} + \lambda)P_{k-1}}\right)_i$ je symetrická a pozitivně definitní, což nám umožňuje použít pro odmocnění této matice Choleskyho dekompozici.

Jakmile máme vypočtenou matici sigma bodů χ_{k-1} můžeme začít počítat predikční krok dosazením všech sloupců z χ_{k-1} v časovém intervalu Δt použitím [15]:

$$(\chi_k)_i = f((\chi_{k-1})_i) \quad i = 0, .., 2\mathrm{L} \tag{6.3.13}$$

kde f je diferenciální rovnice daná vztahy (6.3.1) až (6.3.7). Pro výpočet této diferenciální rovnice použijeme 15 integrací metodou Runge-Kutta 4. řádů .

Pro výpočet *apriorního* odhadu stavů použijeme následující vztah:

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (\chi_k)_i \tag{6.3.14}$$

kde $W_i^{(m)}$ jsou váhy definovány jako:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{L + \lambda} \tag{6.3.15}$$

$$W_i^{(m)} = \frac{\lambda}{2(L + \lambda)} \quad i = 1,..,2L \tag{6.3.16}$$

Apriorní odhad kovarianční matice predikčního kroku má tvar:

$$\hat{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} (W_i^{(c)} [(\chi_k)_i - \hat{x}_k^-][(\chi_k)_i - \hat{x}_k^-]^T) + Q_k \tag{6.3.17}$$

kde Q_k je kovarianční matice chyb a váhy jsou definované jako [15]:

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{L + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \tag{6.3.18}$$

$$W_i^{(c)} = \frac{\lambda}{2(L + \lambda)} \quad i = 1,..,2L \tag{6.3.19}$$

K výpočtu korekčního kroku musíme nejdříve transformovat sloupcový vektor χ_k použitím modelu měření:

$$(\gamma_k)_i = h((\chi_k)_i) \quad i = 0,..,2L \tag{6.3.20}$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} (\gamma_k)_i \tag{6.3.21}$$

kde h je normalizační funkce (6.3.8). S transformovaným stavovým vektorem $\hat{y}_k^-$ můžeme spočítat *aposteriorní* odhad stavů:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - \hat{y}_k^-) \tag{6.3.22}$$

kde K_k je Kalmanovo zesílení. y_k jsou naměřené hodnoty z akcelerometrů a magnetometrů, abychom dostali kvaterniony, musíme použít Gauss-Newtonův algoritmus viz. podkapitola 6.1. V UKF je K_k definováno jako

$$K_k = P_{\hat{x}_k \hat{y}_k} P_{\hat{y}_k \hat{y}_k}^{-1} \tag{6.3.23}$$

kde

$$P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} (W_i^{(c)} [(\gamma_k)_i - \hat{y}_k^-][(\gamma_k)_i - \hat{y}_k^-]^T) + R \tag{6.3.24}$$

$$P_{\hat{x}_k \hat{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} (W_i^{(c)} [(\chi_k)_i - \hat{x}_k^-][(\gamma_k)_i - \hat{y}_k^-]^T) \tag{6.3.25}$$

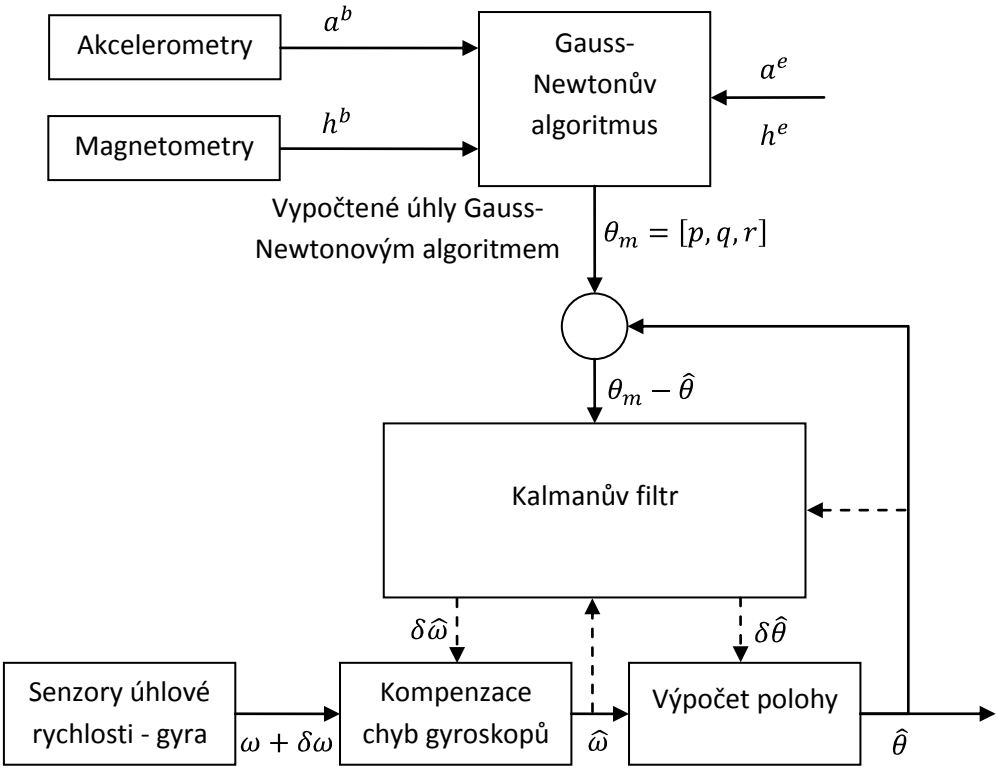
kde R je matice kovariance šumu měření. Poslední vztah v korekčním kroku je výpočet *aposteriorního* odhadu kovariance chyby:

$$P_k = \hat{P}_k^- - K_k P_{\hat{y}_k \hat{y}_k} K_k^T \tag{6.3.26}$$

Jako poslední krok v tomto algoritmu normalizujeme kvaterniony, abychom se ujistili, že bude mít jednotkovou velikost.

6.4 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s Complimentary KF

Complimentary Kalmanův filtr viz. *Obrázek 6-4-1* neodhaduje stavy přímo, ale používá chyby těchto stavů k odhadu. Integrace Eulerových úhlů se vykonává mimo Kalmanův filtr v bloku nazvaném „Výpočet polohy“. Jedna z výhod této struktury je, že Kalmanův filtr nebude tlumit inerciální systém při rychlé dynamické odezvě. Další výhodou je, že úhlové rychlosti nebudou pokládány za měření, takže ω nebudou obsažené ve vektoru stavů. Odstraněním ω ze stavového vektoru snížíme dimenzi z 9 na 6 [8].



Obrázek 6-4-1: Complimentary Kalmanův filtr

6.4.1 Procesní model

x_1 chyba úhlu $\delta\psi$

x_2 chyba úhlu $\delta\theta$

x_3 chyba úhlu $\delta\phi$

x_4 chyba úhlové rychlosti $\delta\omega_x$

x_5 chyba úhlové rychlosti $\delta\omega_y$

x_6 chyba úhlové rychlosti $\delta\omega_z$

Pro úplnost uvedeme že $\delta x = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\omega \end{bmatrix} = [\delta\psi \quad \delta\theta \quad \delta\phi \quad \delta\omega_x \quad \delta\omega_y \quad \delta\omega_z]^T$

6.4.2 Model měření

y_1 chyba úhlu $\psi_{\text{měřená}} - \hat{\psi}$

y_2 chyba úhlu $\theta_{\text{měřená}} - \hat{\theta}$

y_3 chyba úhlu $\phi_{\text{měřená}} - \hat{\phi}$

Opět pro úplnost uvedeme $\delta y = [\psi_{\text{měřená}} - \hat{\psi} \quad \theta_{\text{měřená}} - \hat{\theta} \quad \phi_{\text{měřená}} - \hat{\phi}]^T$

6.4.3 Algoritmus

Protože potřebujeme nejdříve určit odhad úhlu $\hat{\theta}$ viz. *Obrázek 6-4-1,* abychom mohli začít s výpočtem, je třeba nejdříve inicializovat hodnoty $\delta\hat{\omega}$, které budou pro první krok biasy gyroskopů, následně určit $\delta\hat{\theta}$, které na počátku nastavíme na nuly. Počáteční matice kovariancí můžeme nastavit např. takto $P_x = \mathbf{I}$, $P_b = 0.1\mathbf{I}$, $P_{xb} = \mathbf{0}$.

Pro snadnější pochopení implementace, začneme odzadu. Nejdříve budeme definovat odhad gyroskopů jako:

$$\widehat{\omega} = \omega - \delta\widehat{\omega} \tag{6.4.1}$$

kde ω jsou naměřené hodnoty gyroskopů a $\delta\widehat{\omega}$ jsou odhadnuté chyby gyroskopů (v prvním kroku jsme si je definovali jako biasy). Dále si potřebuje určit hodnoty stavových rovnic [8]:

$$A_k = \frac{\partial f_{\Delta t}(t)}{\partial \theta(\mathrm{t})} = \mathbf{I} + V_B \Delta t + \left[V_B^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} V_B\right) W_B \widehat{\omega}\right] \frac{\Delta t^2}{2} \tag{6.4.2}$$

$$B_k = \frac{\partial f_{\Delta t}(t)}{\partial \omega(\mathrm{t})} = W_B \Delta t + \left[V_B W_B + \left(\frac{\partial}{\partial \omega} V_B\right) W_B \widehat{\omega}\right] \frac{\Delta t^2}{2}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice, Δt je vzorkovací perioda a matice W_B je

$$W_B(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta(\mathrm{t})\sin\psi\,(\mathrm{t}) & \tan\theta(\mathrm{t})\cos\psi(\mathrm{t}) \\ 0 & \cos\psi\,(\mathrm{t}) & -\sin\psi\,(\mathrm{t}) \\ 0 & \sec\theta(\mathrm{t})\sin\psi(\mathrm{t}) & \sec\theta(\mathrm{t})\cos\psi(\mathrm{t}) \end{bmatrix} \tag{6.4.3}$$

kde úhly $\theta = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$ jsou naměřené hodnoty, které získáme Gauss-Newtonovým algoritmem, do kterého vstupují v prvním kroku hodnoty z akcelerometrů a magnetometrů. Dále potřebujeme znát matici V_B, která je určena následujícím vztahem $V_B(\theta, \omega) \equiv \frac{\delta}{\delta\theta}[W_B(\theta)\widehat{\omega}]$ a vypadá takto:

$$V_B = \begin{bmatrix} \frac{\cos\psi\sin\theta}{\cos\theta}\omega_y - \frac{\sin\psi\sin\theta}{\cos\theta}\omega_z & \frac{\sin\psi}{(\cos\theta)^2}\omega_y + \frac{\cos\psi}{(\cos\theta)^2}\omega_z & 0 \\ -\sin\psi\,\omega_y - \cos\psi\,\omega_z & 0 & 0 \\ \frac{\cos\psi}{\cos\theta}\omega_y - \frac{\sin\psi}{\cos\theta}\omega_z & \frac{\sin\psi\sin\theta}{(\cos\theta)^2}\omega_y + \frac{\cos\psi\sin\theta}{(\cos\theta)^2}\omega_z & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4.4}$$

kde $\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$

Jelikož je výpočet parciální derivace $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}V_B\right)$ z (6.4.2) dosti složitý popíšeme si postup jeho řešení. Nejdříve si vypočteme derivaci V_B přes všechny úhly, dostaneme tak 3 matice velikosti 3×3. Každou z těchto matic vynásobíme s $W_B(\theta)\widehat{\omega}$. Tímto postupem získáme 3 matice velikosti 3×1, což jsou sloupce, které pouze umístíme za sebe, abychom získali opět matici 3×3. Tímto postupem získáme rovnou člen $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}V_B\right)W_B\widehat{\omega}$. Obdobně budeme postupovat u $\left(\frac{\partial}{\partial\omega}V_B\right)$ [8].

Tyto matice potřebuje pro výpočet nově odhadnutých úhlů:

$$\hat{\theta}(t+\Delta t) = \hat{\theta}(t) + W_B\frac{\widehat{\omega}(t)+\widehat{\omega}(t+\Delta t)}{2}\Delta t + V_B W_B\widehat{\omega}(t)\frac{\Delta t^2}{2} \tag{6.4.5}$$

kde $\omega(t+\Delta t)$ jsou nové hodnoty z gyroskopů. V této chvíli si můžeme spočítat hodnoty kovariančních matic chyb:

$$\begin{bmatrix} P_x^+ & P_{xb}^+ \\ P_{xb}^{T+} & P_b^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x A_k^T + P_{xb}B_k^T & P_{xb} \\ P_{xb}^T A_k^T + P_b B_k^T & P_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4.6}$$

a následně vypočítat Kalmanovo zesílení jako:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x H^T[HP_xH^T + R_k]^{-1} \\ P_{xb}^T H^T[HP_xH^T + R_k]^{-1} \end{bmatrix} \tag{6.4.7}$$

Nyní můžeme vypočítat chyby úhlů a úhlových rychlostí:

$$\delta\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K_x(\theta - \hat{\theta}(t+\Delta t)) \tag{6.4.8}$$

$$\delta\widehat{\omega} = \widehat{\omega}(t+\Delta t) + K_b(\theta - \hat{\theta}(t+\Delta t)) \tag{6.4.9}$$

V posledním kroku algoritmu aktualizujeme odhady úhlů jako:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(t + \Delta t) + \delta\hat{\theta} \tag{6.4.10}$$

$$\delta\hat{\omega} = \hat{\omega}(t + \Delta t) + K_b(\theta - \hat{\theta}(t + \Delta t)) \tag{6.4.11}$$

6.5 Spojení inerciálních senzorových dat z gyroskopů, akcelerometrů a magnetometrů pro odhad orientace s úplným EKF

Úplným EKF zde myslíme KF, který má v modelu měření hodnoty z akcelerometrů, gyroskopů i magnetometrů. Dimenze modelu měření je 9.

6.5.1 Procesní model

Procesní model je stejný jako u EKF s (N-G) algoritmem v podkapitole 6.2 rovnice (6.2.1) až (6.2.7).

6.5.2 Model měření

y_1 úhlová rychlost gyroskopu ω_x

y_2 úhlová rychlost gyroskopu ω_y

y_3 úhlová rychlost gyroskopu ω_z

y_4 hodnota akcelerometru a_x

y_5 hodnota akcelerometru a_y

y_6 hodnota akcelerometru a_z

y_7 hodnota magnetometru h_1

y_8 hodnota magnetometru h_2

y_9 hodnota magnetometru h_3

$$y_1 = x_1 \tag{6.5.1}$$

$$y_2 = x_2 \tag{6.5.2}$$

$$y_3 = x_3 \tag{6.5.3}$$

$$y_4 = \frac{(x_4^2 + x_7^2 - x_5^2 - x_6^2)g_1 + 2(x_4x_5 - x_6x_7)g_2 + 2(x_4x_6 + x_5x_7)g_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.4}$$

$$y_5 = \frac{2(x_4x_5 + x_6x_7)g_1 + (x_5^2 + x_7^2 - x_4^2 - x_6^2)g_2 + 2(x_5x_6 - x_4x7)g_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.5}$$

$$y_6 = \frac{2(x_4x_6 - x_5x_7)g_1 + 2(x_5x_6 + x_4x_7)g_2 + (x_6^2 + x_7^2 - x_4^2 - x_5^2)g_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.6}$$

$$y_7 = \frac{(x_4^2 + x_7^2 - x_5^2 - x_6^2)h_1 + 2(x_4x_5 - x_6x_7)h_2 + 2(x_4x_6 + x_5x_7)h_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.7}$$

$$y_8 = \frac{2(x_4x_5 + x_6x_7)h_1 + (x_5^2 + x_7^2 - x_4^2 - x_6^2)h_2 + 2(x_5x_6 - x_4x7)h_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.8}$$

$$y_9 = \frac{2(x_4x_6 - x_5x_7)h_1 + 2(x_5x_6 + x_4x_7)h_2 + (x_6^2 + x_7^2 - x_4^2 - x_5^2)h_3}{x_4^2 + x_7^2 + x_5^2 + x_6^2} \tag{6.5.9}$$

6.5.3 Algoritmus

Algoritmus pro tento filtr je podrobně vysvětlen v podkapitole 2.3.

7 Experimenty

V této kapitole uvedeme experimenty s pěti Kalmanovými filtry. Nejdříve se zaměříme na chyby způsobené šumem, posléze se podíváme na šumy + bias u gyroskopů a jako poslední uvedeme odchylky odhadů od skutečné hodnoty.

7.1 Skutečné a odhadnuté průběhy + šum

V této podkapitole se zaměříme pouze na měření zatížené šumem. Zašuměné jsou všechny senzory.

7.1.1 EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum

Tento EKF měří pouze úhlové rychlosti gyroskopů a zrychlení akcelerometrů. Tomuto filtru jsme nastavili následující počáteční podmínky:

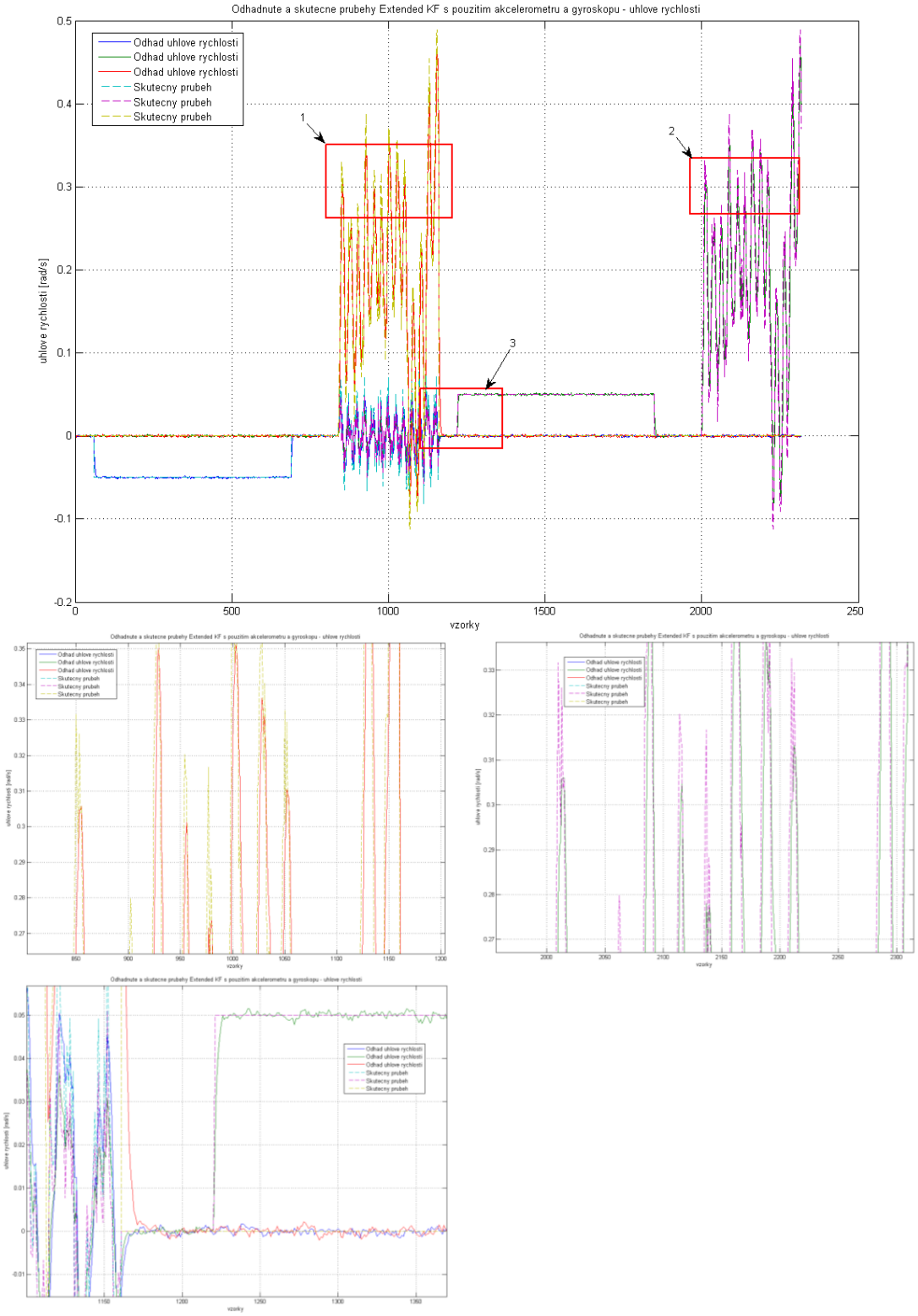
R = diag([10^2, 10^2, 10^2, 0.01^2, 0.01^2, 0.01^2]),

Q = diag([0.001^2, 0.001^2, 0.001^2, 0.001^2, 0.0024178, 0.0031212, 0.0023557, 0.1^2, 0.1^2, 0.1^2])

x_ = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]'

p_ = diag([1,1,1,1,1,1,1,1,1,1])

Z Obrázku 7-1-1 je patrné, že filtr odhaduje mnohem lépe syntetické data, než data nesyntetická, které poměrně dost potlačuje. Na velikost chyb se podíváme později.



Obrázek 7-1-1: Rozšířený KF pro akcelerometry a gyroskopy + šum

7.1.2 Rozšířený KF s externím Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum

Tento EKF měří úhlové rychlosti gyroskopů, zrychlení akcelerometrů a magnetické pole. Externí Gauss-Newtonův algoritmus slouží k určení kvaternionů u akcelerometrů a gyroskopů. Tomuto filtru jsme nastavili následující počáteční podmínky:

R_1 = diag([(0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2])

R_2 = diag([(0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2])

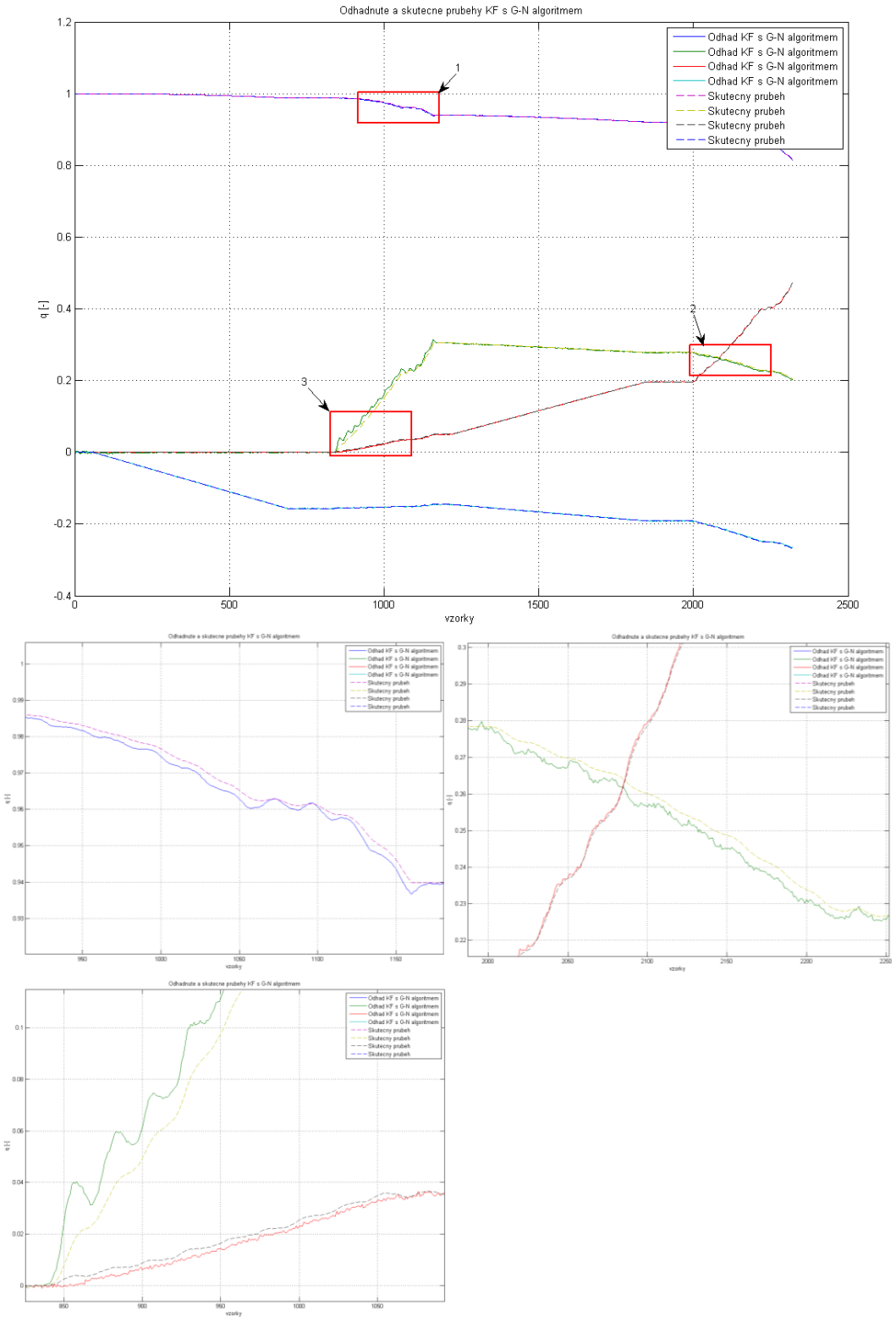
Q = diag([0.130^2 0.127^2 0.155^2 0 0 0 0])

x_ = [0.01 0.01 0.01 0.5 0.5 0.5 0.5]'

p_ = diag([0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5])

ye = [0.1329 -0.0785 9.7609 -0.1756 -0.0051 -0.8468];

Z *Obrázku 7-1-2* je zjevné, že filtr odhaduje poměrně přesně. Při bližší analýze z výřezu 3 však vidíme, že při velkých změnách úhlových rychlostí ve třech směrech má filtr problémy s odhadem. Dalším problémem je, že nedovede přesně určit yaw osu viz. výřez 2 a 3, z obrázků lze vidět, že je posunuta.



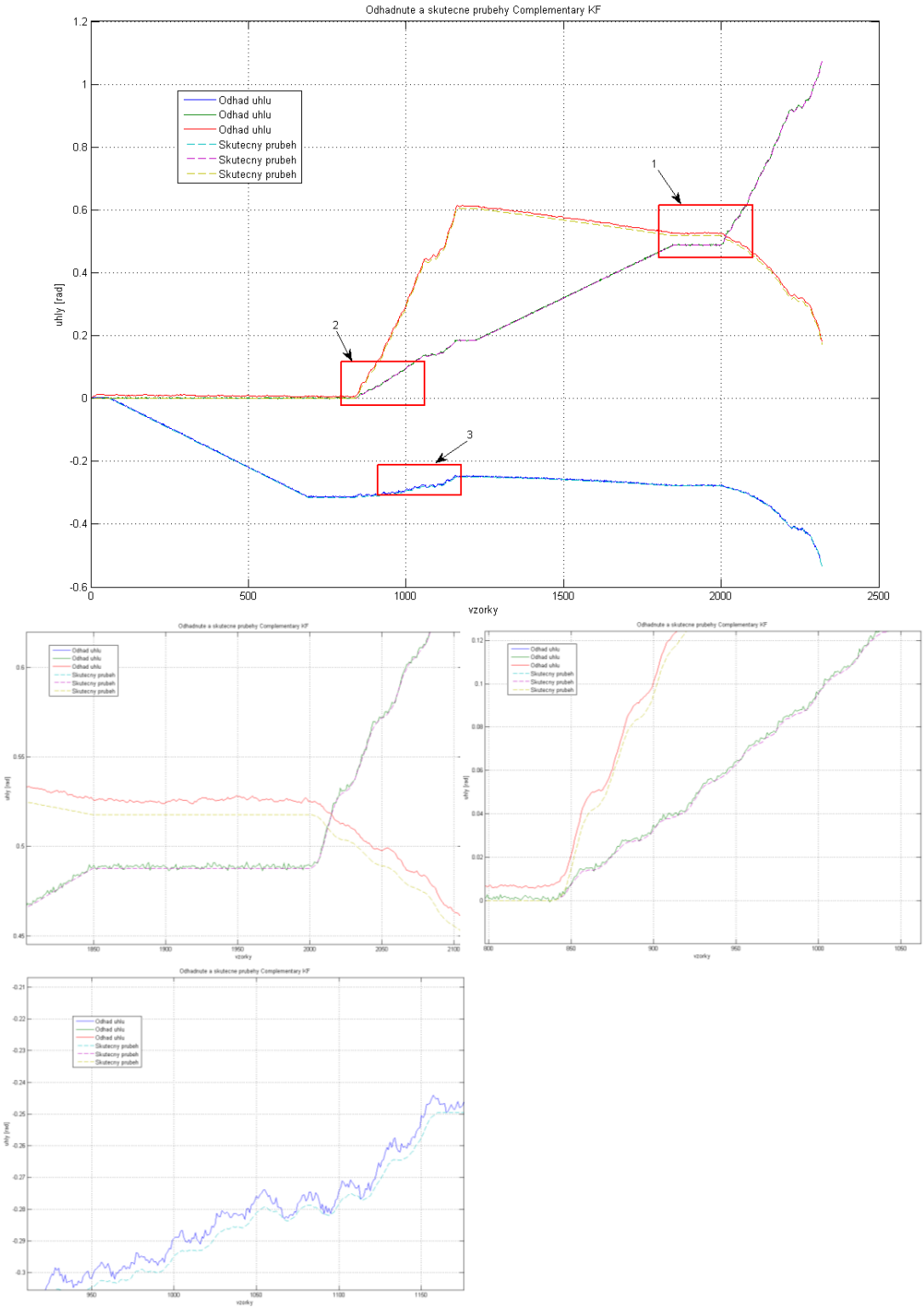
Obrázek 7-1-2: EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum

7.1.3 Complimentary KF pro MARG + šum

Tento Complimentary KF měří úhlové rychlosti gyroskopů, zrychlení akcelerometrů a magnetické pole. Externí Gauss-Newtonův algoritmus slouží ke zjištění úhlů z akcelerometrů a gyroskopů. Tomuto filtru jsme nastavili následující počáteční podmínky:

```
R = diag([0.1 0.1 0.1])

Q = diag([0.130^2 0.127^2 0.155^2])

x_ = [0.01 0.01 0.01 0.5 0.5 0.5 0.5]'

p_x = diag([1 1 1])

p_b = diag(0.1*[1 1 1])

p_xb = diag([0 0 0])

ye = [0.1329 -0.0785 9.7609 -0.1756 -0.0051 -0.8468];
```

Z *Obrázku 7-1-3* je vidět, že tento filtr odhaduje opět poměrně přesně, tentokrát odhadujeme přímo úhly místo kvaternionů. Filtr odhaduje přesně i při velkých změnách úhlových rychlostí, bohužel však nedovede úplně vykompenzovat yaw osu viz. výřez 1 a 2.



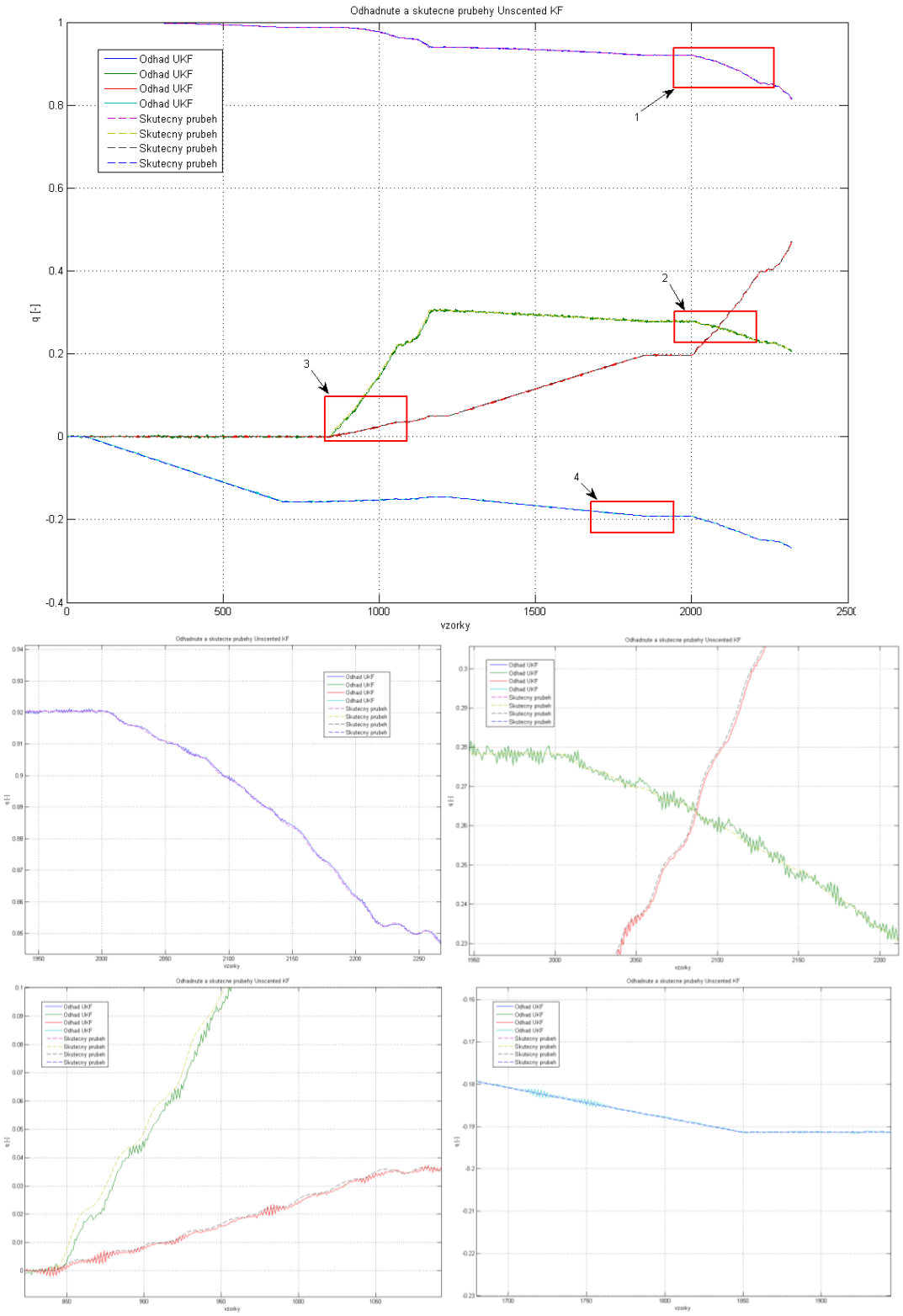
Obrázek 7-1-3: Complimentary KF pro MARG + šum

7.1.4 Unscented KF pro MARG + šum

Tento Complimentary KF měří úhlové rychlosti gyroskopů, zrychlení akcelerometrů a magnetické pole. Externí Gauss-Newtonův algoritmus slouží ke zjištění úhlů z akcelerometrů a gyroskopů. Tomuto filtru jsme nastavili následující počáteční podmínky:

```
R = 0.0001*diag([1 1 1 1 1 1])

Q = diag([0.130^2 0.127^2 0.155^2 0.002 0.002 0.002])

x_ = [0.01 0.01 0.01 0.5 0.5 0.5 0.5]'

p_ = 0.0001*diag([1 1 1 1 1 1])

alfa = 0.01

beta = 2

kappa = 0

ye = [0.1329 -0.0785 9.7609 -0.1756 -0.0051 -0.8468];
```

Z *Obrázku 7-1-4* je vidět, že tento filtr odhaduje nejpřesněji. Filtr odhaduje přesně i při velkých změnách úhlových rychlostí, bohužel však nedovede úplně dokonale vykompenzovat yaw osu viz. výřez 3, avšak ze všech ostatních filtrů má nejlepší odhad.



Obrázek 7-1-4: Unscented KF pro MARG + šum

7.1.5 Úplný EKF pro MARG + šum

Do toho úplného EKF vstupují úhlové rychlosti gyroskopů, zrychlení akcelerometrů a magnetické pole. Tento filtr má dimenzi vektoru měření rovnou devíti. Tomuto filtru jsme nastavili následující počáteční podmínky:

R = diag([(0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2 (0.01)^2])

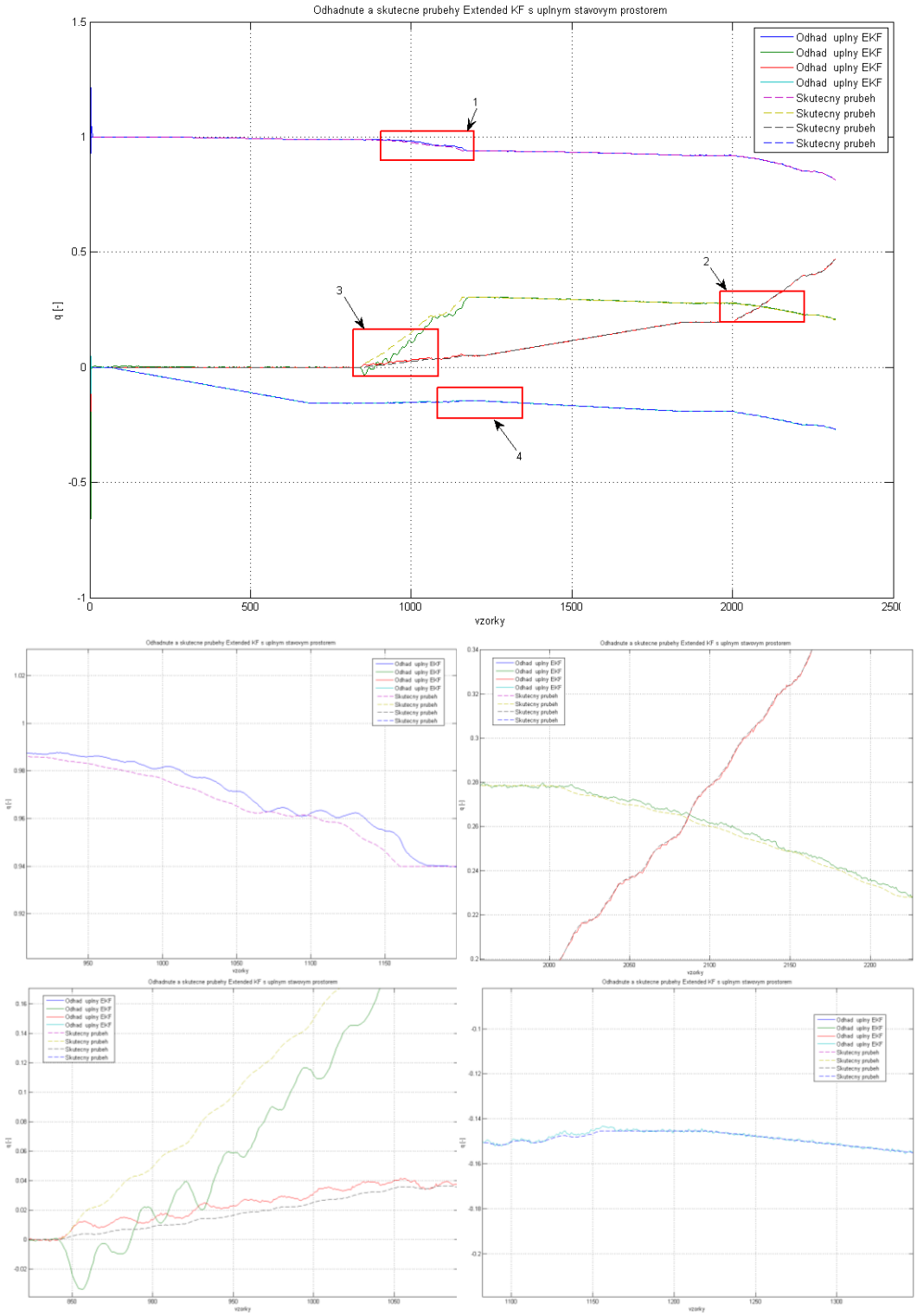
Q = diag([0.130^2 0.127^2 0.155^2 0 0 0 0])

x_ = [0.01 0.01 0.01 0.5 0.5 0.5 0.5]'

p_ = diag([0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5])

ye = [0.1329 -0.0785 9.7609 -0.1756 -0.0051 -0.8468];

Z *Obrázku 7-1-5* je zjevné, že se filtr odhaduje poměrně přesně. Při bližší analýze z výřezu 3 však vidíme, že při velkých změnách úhlových rychlostí ve třech směrech má filtr problémy s odhadem stejně jako EKF s externím (G-N) algoritmem. Dalším problémem je, že nedovede přesně určit yaw osu viz. výřez 3, z obrázků lze vidět, že je posunuta.



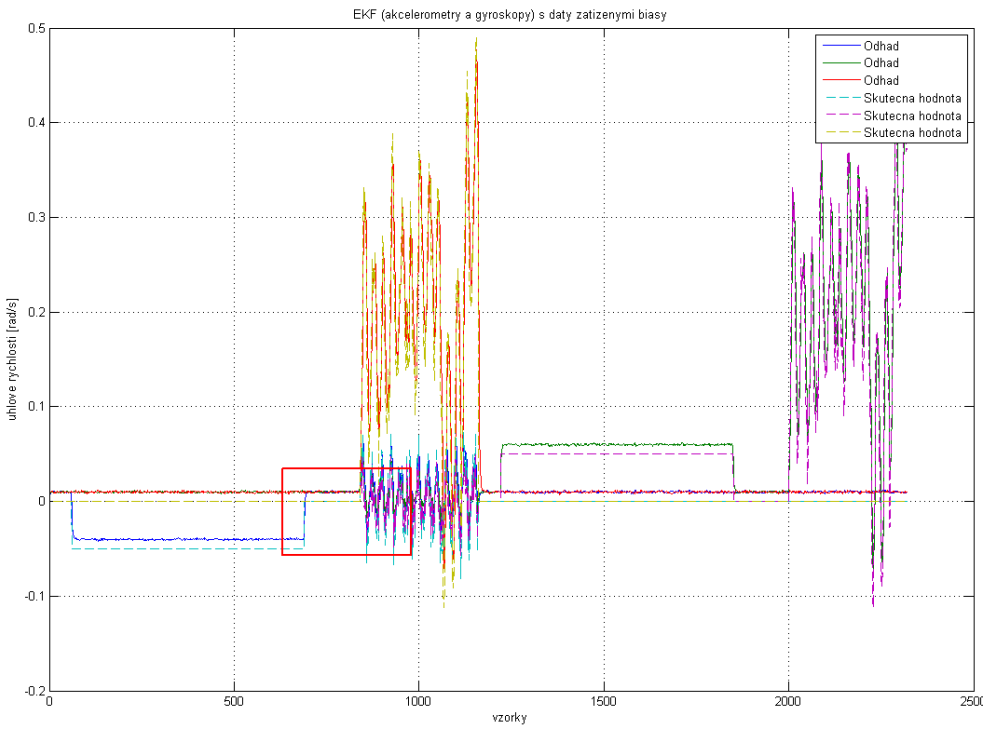
Obrázek 7-1-5:Úplný EKF pro MARG + šum

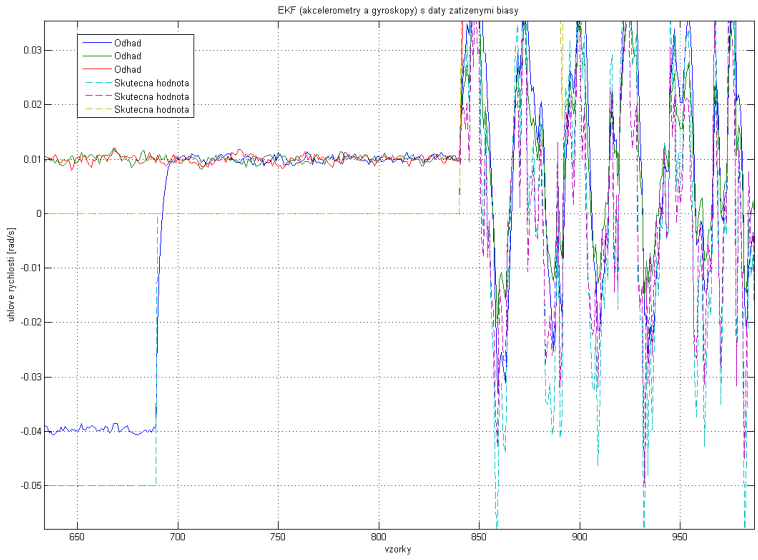
7.2 Chyby s šumem a biasem

V této podkapitole ukážeme vliv biasu a šumu na odhad Kalmanových filtrů. Všechny filtry mají stejné počáteční podmínky jako v předchozí podkapitole, proto je už nebudeme nadále uvádět. Jediná změna, která nastala v tom, že jsme přidali k měřeným hodnotám gyroskopů konstantní bias o velikosti 0,1.

7.2.1 EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum + bias

Z *Obrázku 7-2-1* je patrné, že se tento EKF nebyl vůbec schopen vypořádat s konstantním biasem.

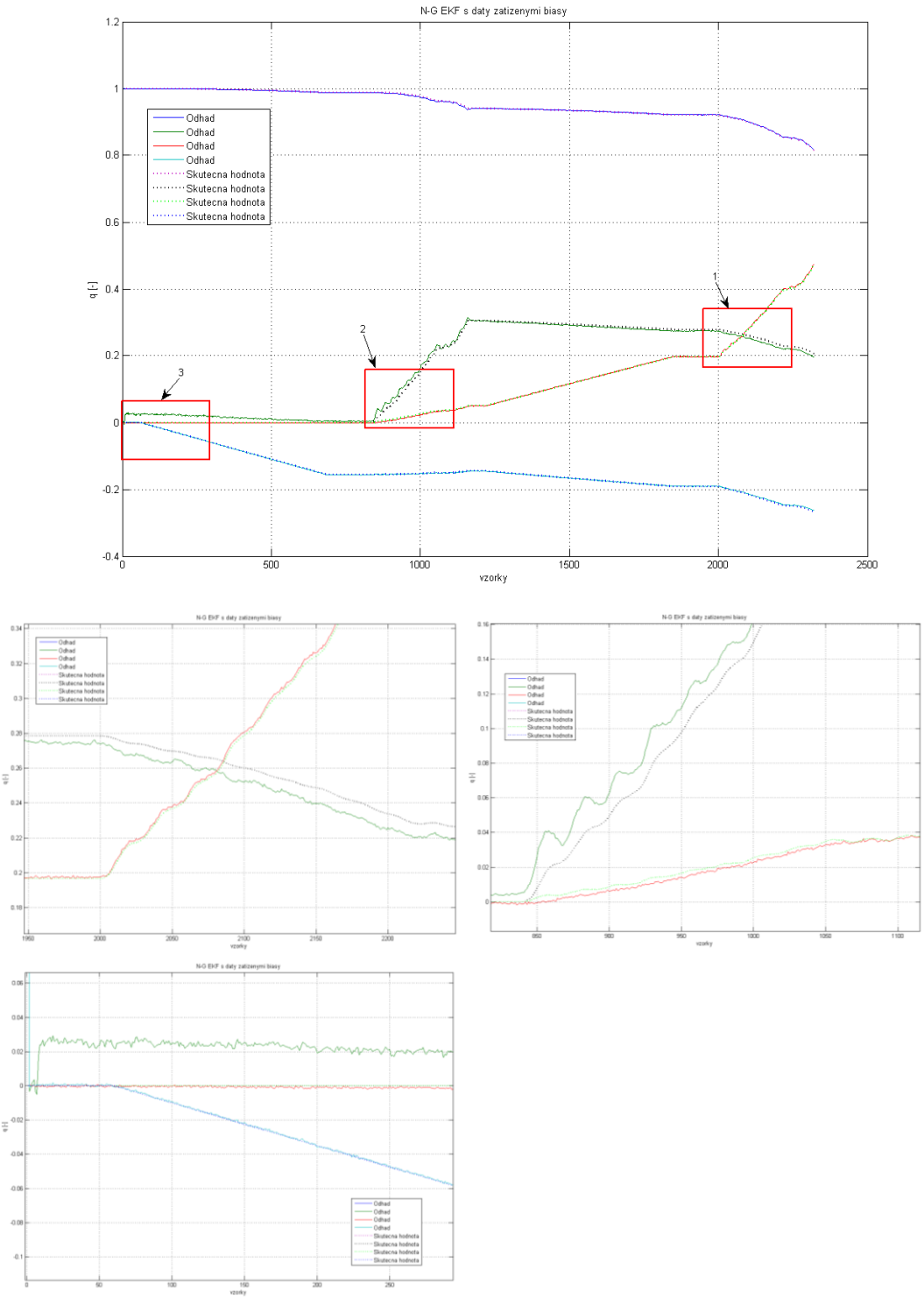




Obrázek 7-2-1: Rozšířený KF pro akcelerometry a gyroskopy + šum + bias

7.2.2 Rozšířený KF s externím Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum + bias

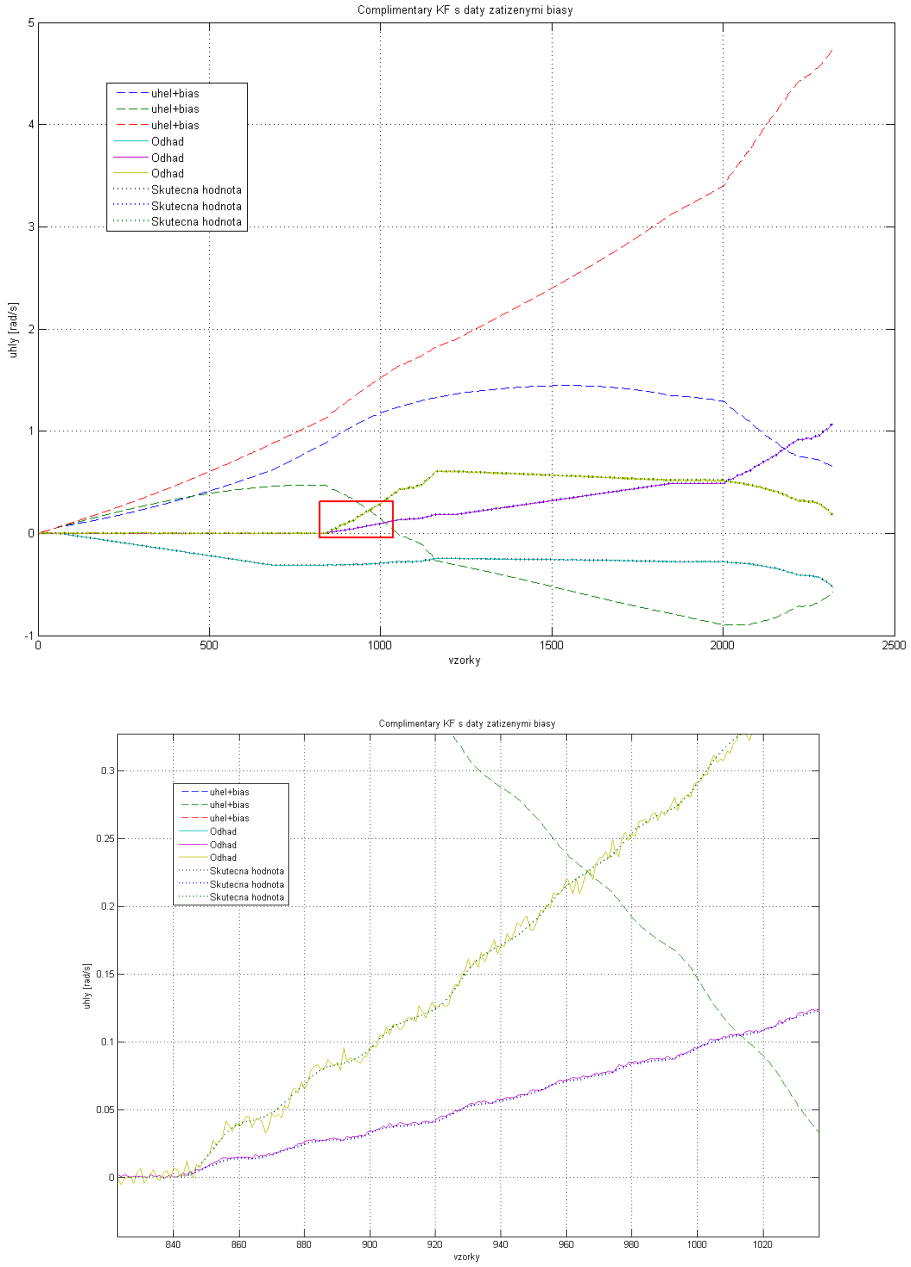
Z *Obrázku 7-2-2* je patrné, že EKF s (G-N) algoritmem se s biasem vypořádal mnohem lépe, ale stále je zde několik odchylek. Největší odchylka nastává hned na počátku filtrace viz. výřez 3. Po 500 vzorcích se tato odchylka odfiltruje.



Obrázek 7-2-2: EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem pro MARG + šum + bias

7.2.3 Complimentary KF pro MARG + šum + bias

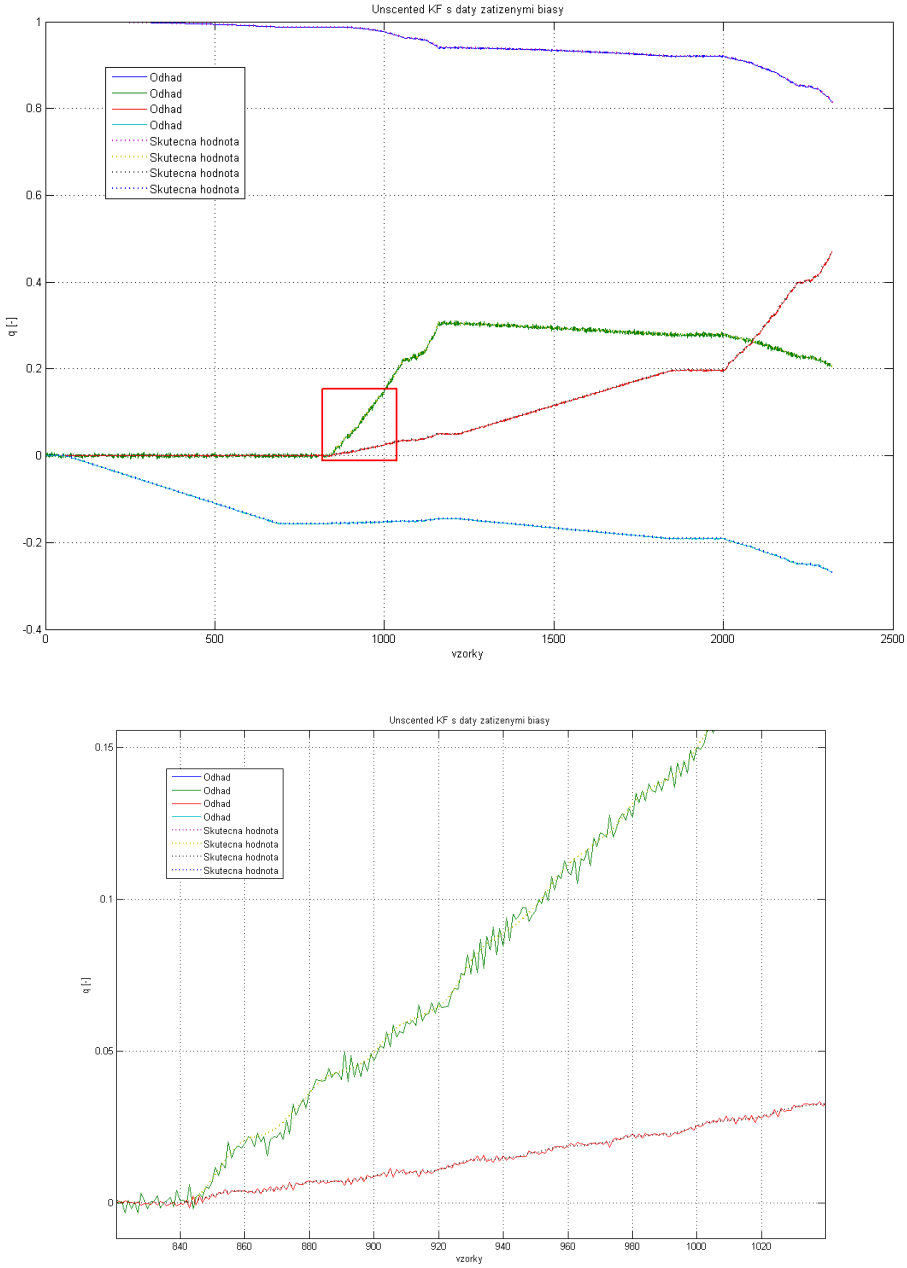
Z *Obrázku 7-2-3* lze vidět, že Complimentary KF odstraňuje bias a šum velmi dobře. Pro ilustraci jsme vykreslili do tohoto obrázku i průběhy úhlů bez použití Kalmanova filtru. Z obrázku je vidět, že se šum a bias v čase integrují a průběhy se nám po krátké době úplně odchýlí od skutečných hodnot.



Obrázek 7-2-3: Complimentary KF pro MARG + šum + bias

7.2.4 Unscented KF pro MARG + šum + bias

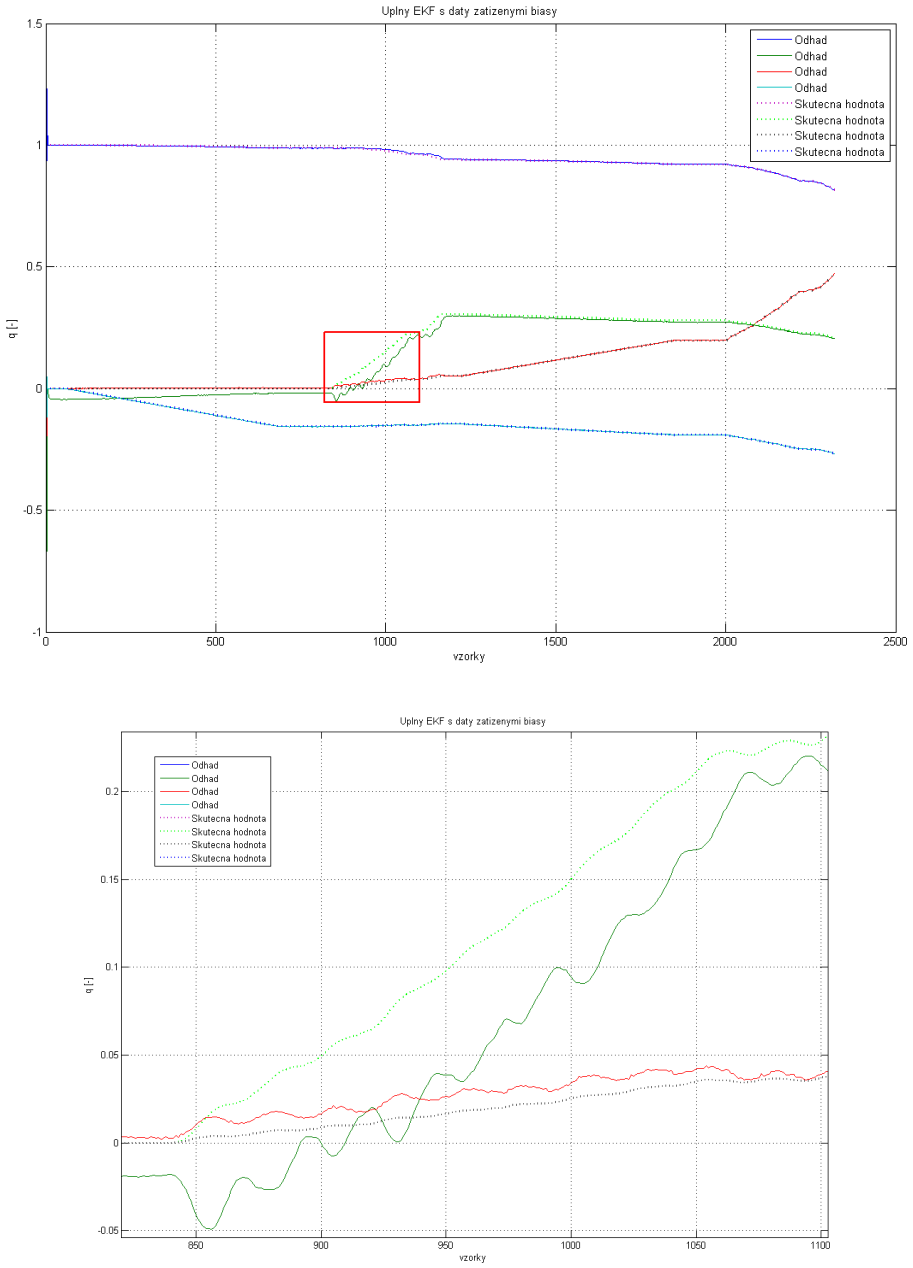
Z *Obrázku 7-2-4* lze opět vidět, že Unscented Kalmanův filtr velmi dobře odhaduje kvaterniony z dat zatížených šumem a biasem.



Obrázek 7-2-4: Unscented KF pro MARG + šum + bias

7.2.5 Úplný EKF pro MARG + šum + bias

Z *Obrázku 7-2-5* je opět vidět, že tento filtr má problémy nejenom s šumem, ale i s biasem. Trpí stejně jako EKF s (N-G) algoritmem posunem v ose yaw.



Obrázek 7-2-5: Úplný EKF pro MARG + šum + bias

7.3 Průběhy odchylek

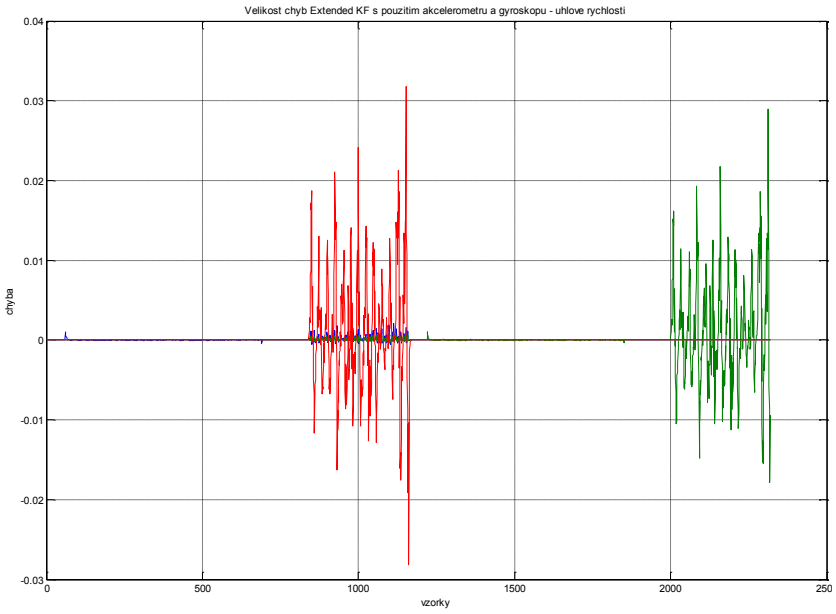
V této podkapitole si ukážeme, jak přesně jednotlivé algoritmy odhadují stavy.

Nejdříve začneme u *Obrázku 7-3-1*, kde je EKF s akcelerometry a gyroskopy. U tohoto filtru je patrné, že velmi špatně odhaduje průběhy, které nejsou syntetické. Tam kde se mění úhlové rychlosti velmi rychle, nestačí Kalmanův filtr reagovat a to způsobuje velkou chybu (např. kolem vzorků 1000 a 2200). Tam kde se měnila poloha gyroskopů skokově, ale pak už se poloha na nějaký čas neměnila, je chyba skoro nulová. Odchylky odhadnutých hodnot od skutečných nalezneme v následující tabulce:

Tabulka 7-3-1: Hodnoty odchylek pro EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum

Celková odchylka pro x	0.0611
Celková odchylka pro y	0.3891
Celková odchylka pro z	0.3788

Pokud se podíváme na rozsah, ve kterém se pohybují hodnoty gyroskopu cca. od -0,05 do 0,05 tak zjistíme, že chyby v tabulce jsou veliké.

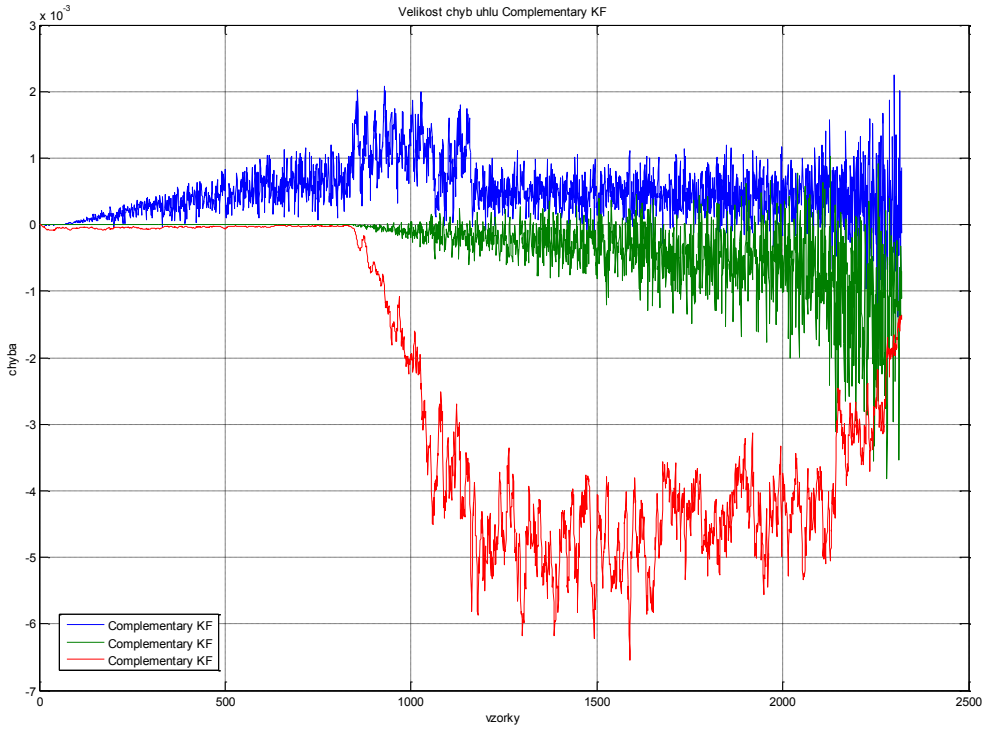


Obrázek 7-3-1: Průběhy odchylek pro EKF s gyroskopy a akcelerometry + šum

Dalším filtr, na který se zaměříme je Complimentary KF. Na *Obrázku 7-3-2* nalezneme průběh jeho chyb. Jak lze vidět chyby jsou velmi malé, tzn. že filtr odhaduje stavy přesně. Opět lze vidět, že kolem vzorku 1000 a 2200 se chyby zvětšují.

Tabulka 7-3-2: Hodnoty odchylek pro Complimentary KF + šum

Celková odchylka pro ϕ	1.1668
Celková odchylka pro θ	-0.6521
Celková odchylka pro ψ	-5.7128

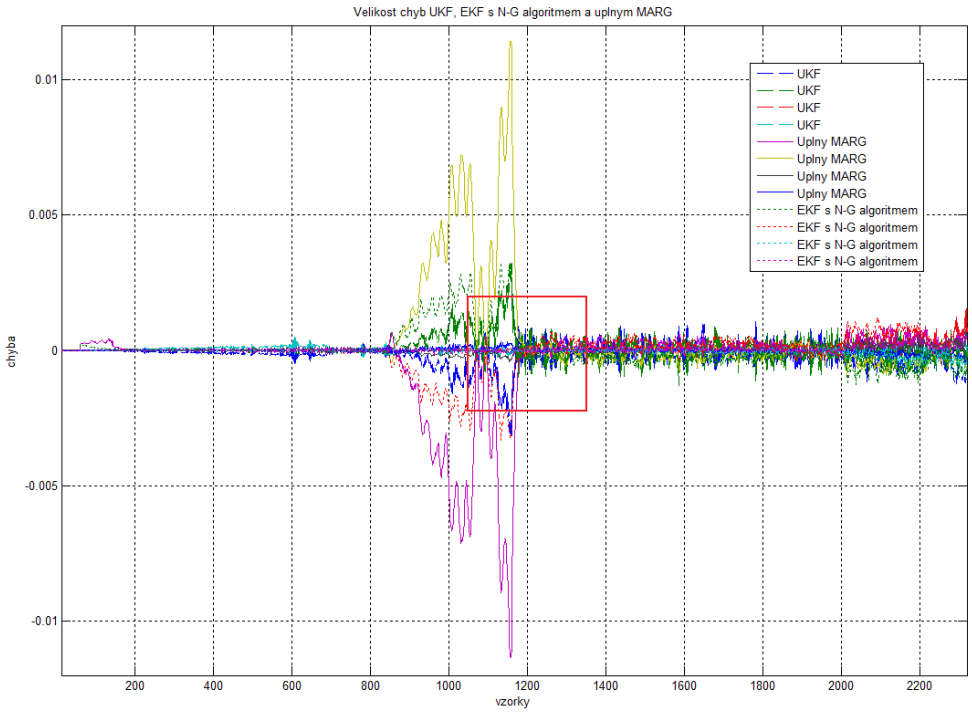


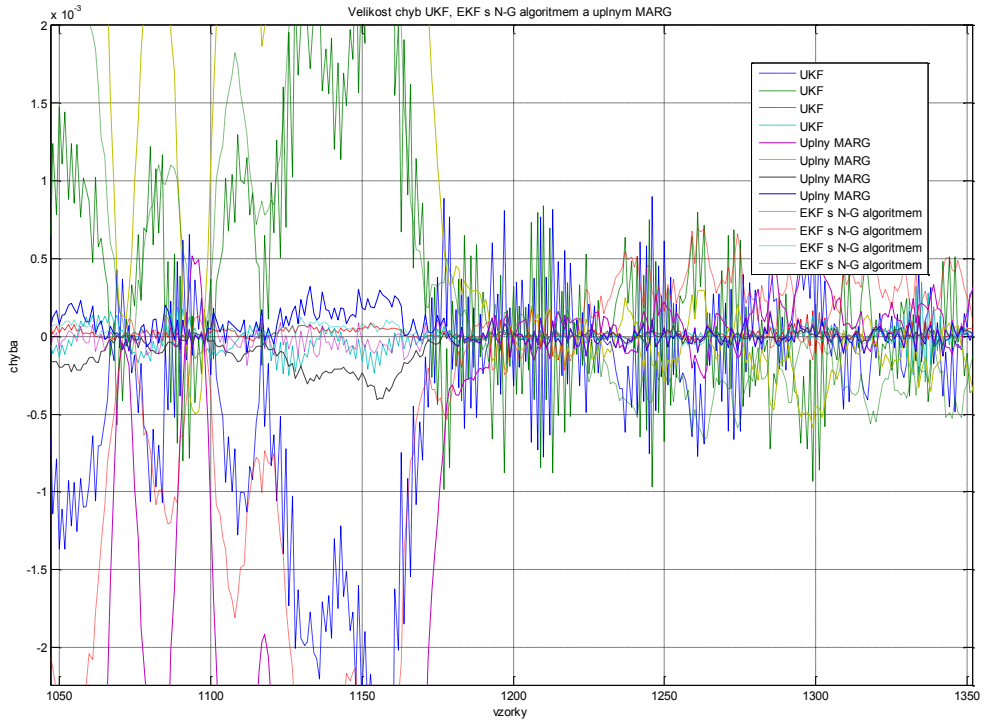
Obrázek 7-3-2: Průběhy odchylek pro Complimentary KF + šum

Poslední *Obrázek 7-3-3*, ve kterém jsou průběhy odchylek EKF s (N-G) algoritmem, úplný EKF a Unscented KF. Z obrázku je jasně patrné, že UKF filtr má nejpřesnější odhad stavů, za ním následuje EKF s (N-G) algoritmem a poslední je úplný EKF. U všech se vyskytla větší odchylka odhadu stavů od skutečné hodnoty kolem vzorku 1000. U vzorku 2200 se projevila změna u všech 3 filtrů jenom nepatrně.

Tabulka 7-3-3: Hodnoty odchylek pro EKF s (N-G), Úplný EKF, UKF + *šum*

	EKF s (N-G)	Úplný EKF	UKF
Celková odchylka pro q_0	0.5078	-0.7602	-0.4006
Celková odchylka pro q_1	-0.244	0.4026	0.1823
Celková odchylka pro q_2	-0.1993	-0.1534	0.1360
Celková odchylka pro q_3	-0.0493	-0.1860	0.0824





Obrázek 7-3-3: Průběhy odchylek pro EKF s (N-G), úplného EKF a UKF

8 Zhodnocení a závěr

V této diplomové práci jsme implementovali a otestovali 5 různých Kalmanových filtrů, pro odhad orientace a polohy.

Pokud budeme hodnotit filtry podle přesnosti odhadu, tak na prvním místě bude Unscented KF, protože měl nejmenší odchylky ze všech, jak lze vidět z předešle kapitoly. Za ním následuje Complimentary KF, který však neodhaduje úplně přesně yaw, ale stále je v odhadu lepší než EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem a úplným EKF. Jako poslední je EKF s akcelerometry a gyroskopy, ale podle výsledků není pro potřeby této práce vůbec dostačující.

Pokud však budeme hodnotit filtry podle rychlosti, tak půjdeme od konce. Zde se stal vítězem EKF s akcelerometry a gyroskopy, který je velmi rychlý. Za ním následuje Complimentary KF, který je asi 5x pomalejší. Další je úplný EKF, který je 5x pomalejší než předchozí a v těsném závěsu je EKF s Gauss-Newtonovým algoritmem. Nejpomalejší byl Unscented KF, který je asi 8x pomalejší než úplný EKF a asi 43x pomalejší než Complimentary KF. Rychlosti každého algoritmu jsou ovlivněny implementacemi diferenciálních rovnic a (G-N) algoritmu. U prvního zmiňovaného byly rovnice převedeny do diskrétního tvaru, v podstatě tento algoritmus nic nezdržuje. U druhého nás zdržuje (G-N) algoritmus, který převádí hodnoty z akcelerometrů a magnetometrů na úhly. Rychlost tohoto algoritmu můžeme ovlivnit zmenšením počtu iterací, která v tomto případě počítá optimální úhly, pokud zmenšíme počet iterací příliš, můžeme způsobit, že nám algoritmus nebude dobře fungovat. U EKF s (G-N) a úplného EKF nás zdržuje hlavně výpočet diferenciální rovnice pomocí Runge-Kutta algoritmu 4. řádu (v Matlabu byla použita funkce ode45, která je pro naše účely velmi pomalá). Dalším zdržením je u EKF s (G-N) algoritmem převod na optimální kvaterniony. U posledního UKF je toto velké zdržení zapříčiněno použitím Runge-Kutta algoritmu ve smyčkách pro výpočet jednotlivých sigma bodu. V každé iteraci tohoto filtru dochází k 15 výpočtům sigma bodů pomocí Runge-Kutta, což je v Matlabu velmi neefektivní. Navíc musíme připočítat Gauss-Newtonův algoritmus pro výpočet kvaternionů.

Když shrneme všechny tyto poznatky, tak nejlepší volbou bude použití Complimentary KF, protože odhaduje velmi přesně a přitom je rychlý. Pokud by se nemuselo hledět na rychlost, určitě bychom vybrali Unscented KF, protože má naprosto nejlepší odhad. EKF s (G-N) a úplný EKF jsou další a jako poslední je EKF s akcelerometry a gyroskopy, který je pro naše účely nepoužitelný, avšak nejrychlejší.

Abychom mohli použít UKF, museli bychom aplikovat jinou metodu pro výpočet sigma bodů. Buďto nepoužívat Runge-Kutta (nahradit ho třeba diskretitací) a nebo použít jiný systém pro výpočet (např. vytvořit program v programovacím jazyku C nebo C++).

9 Literatura

[1] Anthony Kim, Development of Sensor Fusion Algorithms for MEMS-Based Strapdown Inertial Navigation Systems, Waterloo, Ontario, Canada, 2004, str. 7 – 111.

[2] Maybeck, Peter S., "*Stochastic Models, Estimation, and Control: Volume 1*," New York: Academic Press, Inc., 1979.

[3] http://www.wikipedia.cz

[4] Jan Roháč, *„Zvýšení přesnosti jednotky inerciální navigace používající levné senzory,"* Disertační práce.

[5] http://automatizace.hw.cz/mereni-a-regulace

[6] Cao, F.X.; Yang, D.K.; Xu, A.G.; Ma, J.; Xiao, W.D.; Law, C.L.; Ling, K.V.; Chua, H.C.: *"Low cost SINS/GPS integration for land vehicle navigation,"* Proceedings of the IEEE 5th International Conference on Intelligent Transportation Systems, 2002, pp. 910-913.

[7] Chung, D; Lee, J.G.; Park, C.G.; Park, H.W. *"Strapdown INS error model for multiposition alignment,"* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, No. 4, Oct. 1996, pp. 1362-1366.

[8] Foxlin, E. *"Motion tracking requirements and technologies,"* Handbook of Virtual Environment Technology, Kay Stanney [ed], Lawrence Erlbaum Associates, 2002.

[9] Azuma, Ronald; Hoff, Bruce; Neely, Howard; Sarfaty, Ron. *"A motion-stabilized outdoor augmented reality system,"* Proceedings of IEEE Virtual Reality '99, Houston, TX, Mar. 13-17, 1999, pp. 252-259.

[10] Vaganay, J.; Aldon, M.J.; Fournier, A. *"Mobile robot attitude estimation by fusion of inertial data,"* Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 2-6, 1993, Vol.1, pp. 277 -282.

[11] Marins, J.L.; Xiaoping Yun; Bachmann, E.R.; McGhee, R.B.; Zyda, M.J. *"An extended Kalman filter for quaternion-based orientation estimation using MARG sensors,"* Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems, Oct. 3-Nov. 29, 2001, Vol. 4, pp. 2003 - 2011.

[12] Vik, Bjornar; Fossen, Thor I. *"A nonlinear observer for integration of GPS and inertial navigation systems,"* Modeling, Identification and Control, 2000, Vol. 21, No. 4, 193-208.

[13] Hagan, Martin T., Demuth, Howard B., Beale, Mark, *Neural Network Design*, PWS Publishing Company, Boston 1995.

[14] João Luís Marins1, Xiaoping Yun2, Eric R. Bachmann, Robert B. McGhee, and Michael J. Zyda, *"An Extended Kalman Filter for Quaternion-Based Orientation Estimation Using MARG Sensors"*, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943

[15] Joseph J. LaViola Jr., *"A Comparison of Unscented and Extended Kalman Filtering for Estimating Quaternion Motion"*, Brown University Technology Center

Příloha A

Obsah přiloženého CD

- Diplomová práce ve formátu PDF
- Datasheet
- Matlab funkce