České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Katedra řídící techniky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pokročilé frekvenční metody návrhu PID regulátorů

Vedoucí práce: **Ing.Petr Hušek, Ph.D.**

Vypracoval: **Tomáš Battěk**

Praha 2009

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra řídicí techniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Tomáš Battěk**

Studijní program: Elektrotechnika a informatika (bakalářský), strukturovaný
Obor: Kybernetika a měření

Název tématu: **Pokročilé frekevenční metody návrhu PID regulátorů**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s principy návrhu regulátorů typu PID zaručující nejvyšší povolené rezonanční převýšení citlivostní funkce.
2. V prostředí Matlab vytvořte soubor procedur umožňující tento grafický návrh.

Seznam odborné literatury:

G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, 2006
K.J. Astrom, T. Hagglund: PID Controllers: Theory, Design and Tuning. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995

Vedoucí: Ing. Petr Hušek, Ph.D.

Platnost zadání: do konce letního semestru 2009/10

L.S.

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
vedoucí katedry

doc. Ing. Boris Šimák, CSc.
děkan

V Praze dne 7. 4. 2009

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v použitém seznamu.

V Praze dne: 12.6.2009 .....

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce, Ing.Petru Huškovi, Ph.D., za vedení mé práce, odborné konzultace a trpělivost.

Anotace

Cílem této bakalářské práce je vytvoření souboru procedur v prostředí MATLAB, které umožní grafický návrh PID regulátorů zaručujících nejvyšší povolené rezonanční převýšení citlivostní funkce. Pro lepší možnosti výběru z množiny regulátorů, které tyto procedury poskytnou, je práce rozšířena o podobnou metodu návrhu PID regulátorů zaručujících nejvyšší povolené rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce. Poté jsou nalezeny regulátory, které zajistí obě podmínky současně. V práci jsou definovány základní pojmy zpětnovazebního řízení, dále jsou uvedeny základní požadavky na řízení, popsána metoda návrhu a její použití na příkladech.

Annotation

The objective of this bachelor thesis is create set of procedures in interface MATLAB that are to be used for graphical design of PID controllers with specification of sensitivity margin. In effort better option from family of acquired controllers this thesis is extended to similar method of design PID controllers with specification of complementary sensitivity margin. Then controllers that ensure both margins currently are choosed. Basic concepts of feedback control are defined, then basic requirements for control are noticed, method of design and its using for examples is describe in this thesis.

Obsah

1 Úvod 7

2 Požadavky na řízení 9

2.1 Chování v časové oblasti 9

2.1.1 Rychlost odezvy 9

2.1.2 Kvalita odezvy 10

2.2 Chování ve frekvenční oblasti 11

2.2.1 Šířka přenášeného pásma 12

2.2.2 Amplitudová a fázová bezpečnost 12

2.2.3 Komplementární citlivostní funkce 14

2.2.4 Citlivostní funkce 15

2.3 Rezonanční převýšení citlivostních funkcí 16

3 Postup návrhu regulátoru 20

3.1 Rezonanční převýšení citlivostní funkce 20

3.2 Rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce 24

4 Příklady 25

4.1 Systém 3.řádu 25

4.2 Kmitavý systém 3.řádu 30

4.3 Systém 4.řádu 33

5 Závěr 36

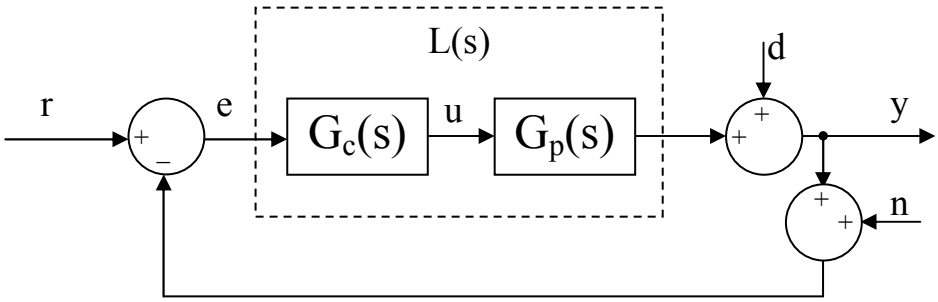
Literatura 37

Přílohy 38

1 Úvod

Řídící technika je v dnešní době všudypřítomným oborem. Vyskytuje se všude kolem nás a využíváme ji v každodenním životě. Úkolem řízení je řídit výstupní veličinu (nebo veličiny) y řízeného systému G_p podle požadované reference r. V ideálním případě by měl mít výstupní signál stejný průběh jako referenční. To ovšem není realizovatelné a tudíž se pomocí různých metod navrhují řídící systémy, které se snaží výstupní signál co nejvhodnějším způsobem alespoň přiblížit referenčnímu.

Nejpoužívanějším způsobem řízení je řízení zpětnovazební (viz.obr.1.1). Jeho výhodou je, že dokáže kompenzovat vliv poruchy a neurčitosti modelu, umožňuje lepší přechodové chování a přesnější ustálené chování. Dokáže stabilizovat i nestabilní soustavu.



obr.1.1 *– Zpětnovazební řízení – uzavřená smyčka*

Na obr.1.1 je uvedeno schéma zpětnovazebního řízení, kde r je referenční signál, e je odchylka výstupní veličiny y od reference a je vstupem do regulátoru $G_c(s)$, jehož výstupem je akční zásah u vedený do regulované soustavy $G_p(s)$. Ta tvoří společně s regulátorem přenos otevřené smyčky (viz.obr.1.1)

$$L(s) = G_c(s) \cdot G_p(s). \tag{1.1}$$

Výstupem z regulované soustavy je výstupní veličina y, která je ovlivněna chybou d. Výstupní veličina je měřena senzorem, ve většině případů s přenosem 1, který ovlivňuje měření výstupní veličiny vysokofrekvenčním šumem n.

Kromě přenosu otevřené smyčky jsou v uzavřené smyčce definovány další přenosové funkce. Je to především komplementární citlivostní funkce, která udává přenos referenčního signálu r na výstup y:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \tag{1.2}$$

Další, neméně důležitá, je citlivostní funkce, která udává přenos referenčního signálu r na odchylku e a zároveň představuje vliv poruchy d na výstupní veličinu y:

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}. \tag{1.3}$$

Mezi citlivostní funkcí a komplementární citlivostní funkcí platí vztah

$$S(s) + T(s) = 1. \tag{1.4}$$

2 Požadavky na řízení

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, ideální řízení, tedy takové které zajistí, že výstupní veličina bude shodná s referencí, nelze realizovat. Pomocí návrhů řízení různými metodami se mu ale můžeme více či méně přiblížit. Návrh musí splnit určité požadavky, které jsou nutné pro správnou funkčnost. Při návrhu řídících systému je tedy třeba si určit, co budeme od výsledného systému požadovat.

Hlavním požadavkem je, aby výsledný systém byl stabilní, přičemž musíme ve stabilitě uvažovat určitou rezervu, jelikož musíme vzít v potaz neurčitosti a poruchy, které se mohou v dané soustavě vyskytnout. Vhodným řízením můžeme stabilizovat i nestabilní systém.

Dalším neméně důležitým požadavkem je chování výsledného systému, což je vlastně hlavním důvodem řízení. Požadavky na chování je možno specifikovat různými způsoby, přičemž nejčastější specifikace jsou na chování v časové oblasti. Dále můžeme specifikovat chování ve frekvenční oblasti, kde určujeme, jak má vypadat výsledná frekvenční charakteristika řízeného systému. Přestože spolu tyto specifikace úzce souvisí, je někdy vhodnější přistoupit k problému buď z jedné, nebo z druhé strany. Každá má svou výhodnost použití.

2.1 Chování v časové oblasti

Specifikace v časové oblasti jsou požadavky na přechodový děj a na ustálený stav. Můžeme je rozdělit na specifikace rychlosti odezvy a kvality odezvy.

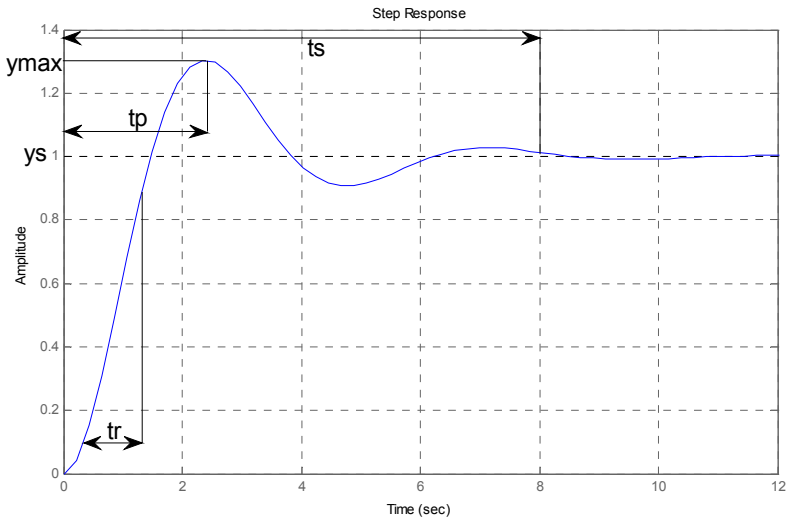
2.1.1 Rychlost odezvy

Typickými specifikacemi rychlosti odezvy jsou doba náběhu t_r (rise time – viz.obr.2.1) a doba ustálení t_s (settling time – viz.obr.2.1) přechodové

charakteristiky. Přechodová charakteristika je reakce výstupní veličiny y na jednotkový skok reference r.

Doba náběhu je čas, za který se přechodová charakteristika změní z hodnoty $0{,}1y_s$ na hodnotu $0{,}9y_s$, kde y_s je ustálená hodnota výstupu.

Doba ustálení je čas, za který se přechodová charakteristika přiblíží ustálené hodnotě, typicky s odchylkou 2%. Tato odchylka může být ovšem dána i jinou hodnotou (často i 1%, 3%, 5%, atd.).



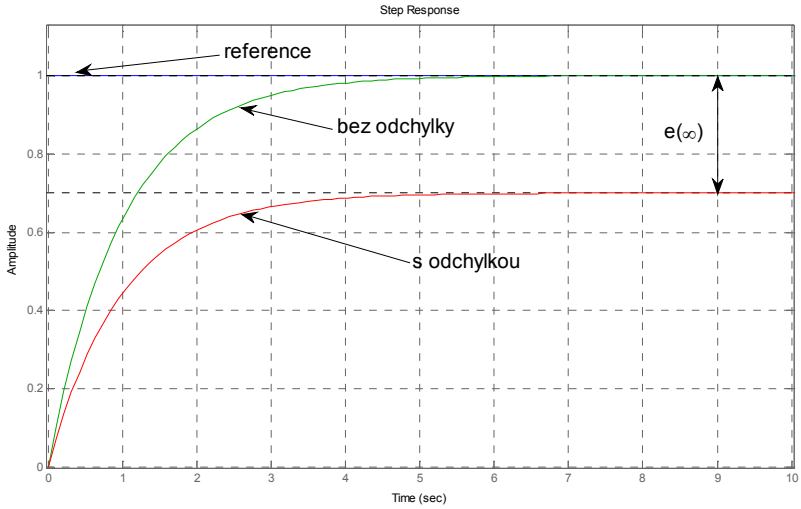
obr.2.1 *– Přechodová charakteristika*

Další specifikací, která se objevuje v souvislosti se systémy vyšších řádů, je okamžik prvého maxima t_p (peak time – viz.obr.2.1), což je čas, za který přechodová charakteristika prvně dosáhne maximální hodnoty.

2.1.2 Kvalita odezvy

Kromě specifikací rychlosti odezvy existují i specifikace kvality odezvy. Tou hlavní je překmit přechodové charakteristiky $\%OS$ (overshoot), obvykle vyjádřený v procentech, což je poměr maxima k ustálené hodnotě. S překmitem souvisí i pojem poměru útlumu, což je poměr prvního překmitu k druhému překmitu.

Jednou z hlavních specifikací je také ustálená odchylka $e(\infty)$ (viz.obr.2.2). Je to rozdíl výstupní veličiny v ustáleném stavu od požadované hodnoty. Obvykle požadujeme, aby ustálená odchylka byla malá nebo nulová.



obr.2.2 *– Ustálená odchylka přechodové charakteristiky*

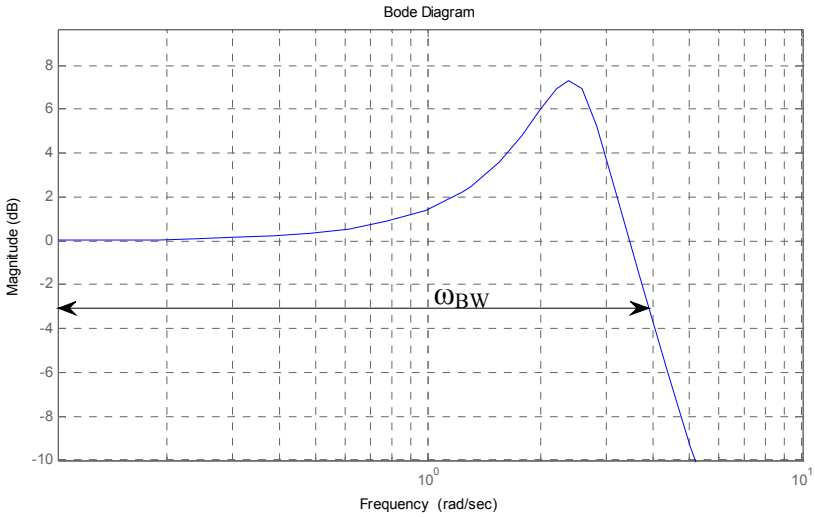
2.2 Chování ve frekvenční oblasti

Každý lineární systém je dobře popsán svou frekvenční charakteristikou a při hledání vhodného regulátoru můžeme vyjít právě z jeho frekvenční charakteristiky – frekvenční metody návrhu regulátoru. Potřebujeme najít takový regulátor, aby frekvenční charakteristika uzavřené smyčky měla určitý požadovaný tvar. To je dosti složité, ale některé vlastnosti frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky se dají poznat z frekvenční charakteristiky otevřené smyčky a na tom jsou založeny klasické frekvenční metody. Navrhujeme tedy frekvenční charakteristiku otevřené smyčky tak, abychom dosáhli požadované charakteristiky uzavřené smyčky.

2.2.1 Šířka přenášeného pásma

Přirozenou frekvenční specifikací je šířka přenášeného pásma ω_{BW} (viz.obr.2.3), což je maximální frekvence, při které výstup rozumně sleduje sinusový vstup. Z frekvenční charakteristiky komplementární citlivostní funkce je vidět, že nepřenáší vysoké frekvence a má tedy charakter dolní pásmové propusti (viz.obr.2.3). Šířka pásma je dána frekvencí, kde výstup má poloviční energii než vstup, tj. amplitudová frekvenční charakteristika poklesne o 3dB.

Širší propustné pásmo znamená rychlejší odezvu systému, tedy kratší dobu náběhu t_r, což ukazuje svázanost s požadavky pro časovou oblast. Zároveň ale znamená větší citlivost na poruchy.



obr.2.3 *– Amplitudová frekvenční charakteristika komplementární citlivostní funkce*

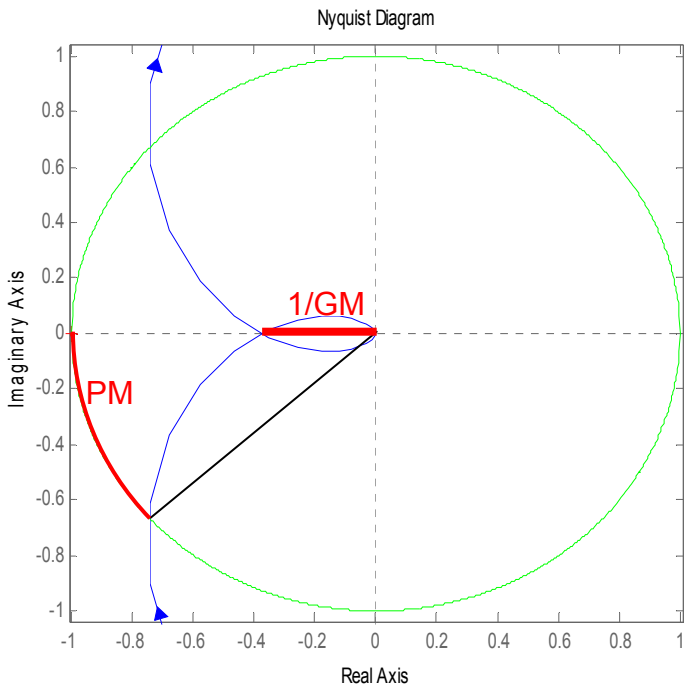
2.2.2 Amplitudová a fázová bezpečnost

Nyquistovo kritérium stability říká, že je-li systém otevřené smyčky stabilní, je stabilní i systém uzavřené smyčky právě tehdy, když Nyquistův graf otevřené smyčky neobkrouží kritický bod $\{-1\}$. V této souvislosti se definují pojmy bezpečnosti stability, kterých se často využívá při návrzích

regulátorů. Jsou to amplitudová a fázová bezpečnost. Ty určují maximální možnost změny zesílení a fáze otevřené smyčky, při které její průběh dosáhne meze stability, tj.projde kritickým bodem $\{-1\}$.

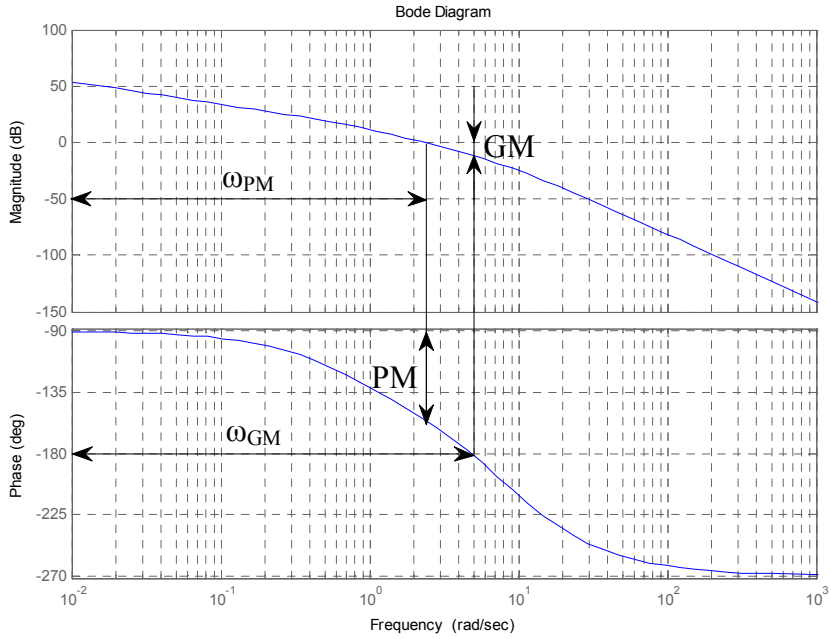
Pojem amplitudová bezpečnost GM (gain margin – znázorněno na obr.2.4) je definován jako maximální změna zesílení, při které se průběh otevřené smyčky na fázi $-180°$ dostane na mez stability, tj. projde kritickým bodem $\{-1\}$, a udává tak mez do které se stabilita neztratí.

Stejně tak pojem fázová bezpečnost PM (phase margin – znázorněno na obr.2.4) je definován jako maximální změna fáze, při které se průběh otevřené smyčky s amplitudou 1 dostane na mez stability, tj. projde kritickým bodem $\{-1\}$, a udává tak mez do které se stabilita neztratí. Fázová bezpečnost má ve většině případů i vliv na rezonanční převýšení frekvenční charakteristiky uzavřené smyčky, potažmo na překmit přechodové charakteristiky. Pro systémy 2.řádu je vztah mezi fázovou bezpečností a překmitem dán exaktně, ovšem pro složitější systémy již tyto vztahy neexistují.



obr.2.4 *– Amplitudová a fázová bezpečnost otevřené smyčky*

Frekvence, na které je fáze otevřené smyčky rovna $-180°$, a frekvence, na které je zesílení otevřené smyčky rovné 1, se nazývá přechodová frekvence ω_{GM} a ω_{PM} (viz.obr.2.5).



obr.2.5 *– Frekvenční charakteristika otevřené smyčky*

2.2.3 Komplementární citlivostní funkce

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, komplementární citlivostní funkce je definována jako přenos referenčního signálu r na výstup y:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \tag{2.1}$$

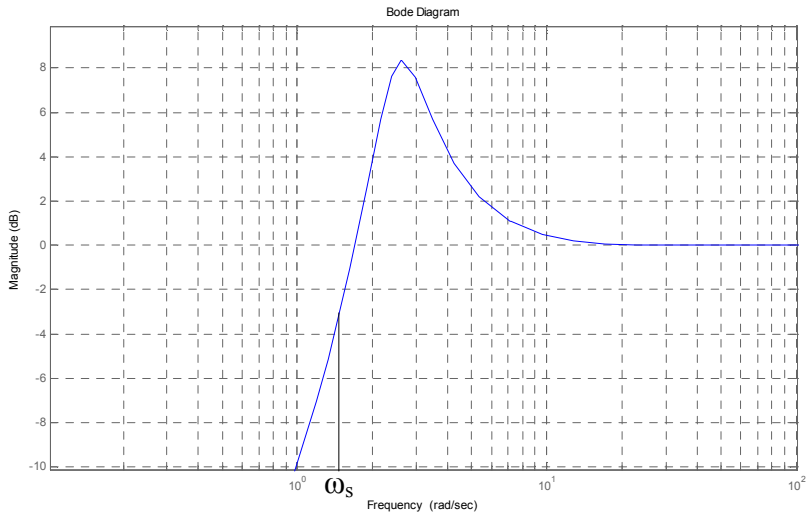
Pomocí této funkce můžeme ovlivnit průběh přechodové charakteristiky. Rezonanční převýšení této funkce je svázáno s překmitem přechodové charakteristiky a šířka přenášeného pásma, jak bylo uvedeno v části 2.2.1, ovlivňuje dobu náběhu přechodové charakteristiky a vliv vysokofrekvenčních šumů n senzoru výstupní veličiny y.

2.2.4 Citlivostní funkce

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, citlivostní funkce je definována jako přenos referenčního signálu r na odchylku e a zároveň představuje vliv poruchy d na výstupní veličinu y:

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)}. \tag{2.2}$$

Tvarováním frekvenční charakteristiky citlivostní funkce můžeme tedy ovlivnit především vliv poruch d na soustavu. Stejně jako u komplementární citlivostní funkce i zde existuje určité pásmo propouštěných frekvencí (viz.obr.2.6). Lépe řečeno existuje určité pásmo nepropouštěných frekvencí. Z frekvenční charakteristiky vidíme, že citlivostní funkce nepřenáší nízké frekvence a má tedy průběh horní pásmové propusti. Čím větší bude frekvence ω_s, na které dosáhne průběh amplitudové frekvenční charakteristiky hodnoty o 3dB menší než hodnota na vysokých frekvencích, tím menší bude vliv poruch – více nižších frekvencí nebude propuštěno.



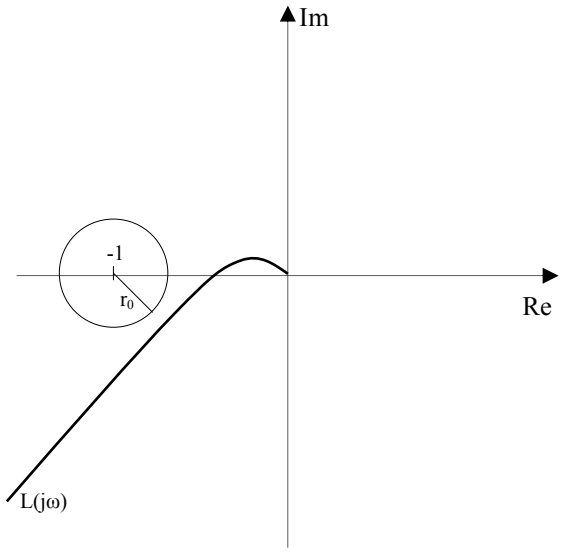
obr.2.6 *– Amplitudová frekvenční charakteristika citlivostní funkce*

2.3 Rezonanční převýšení citlivostních funkcí

Amplitudová bezpečnost má význam tehdy, když je neurčitost v zesílení. Stejně tak fázová bezpečnost má význam tehdy, když je neurčitost ve fázi. Pokud ovšem tyto neurčitosti nastanou současně, tak nám amplitudová a fázová bezpečnost stabilitu nezajistí. V tomto případě je lepší použít metodu, která zajistí určitou vzdálenost průběhu otevřené smyčky od kritického bodu $\{-1\}$. Tuto vzdálenost můžeme zajistit tak, že žádný bod Nyquistovy charakteristiky otevřené smyčky nebude ležet v oblasti vymezené kružnicí o poloměru r_0 a se středem v bodě $\{-1\}$, jak je znázorněno na obr.2.7. Zároveň má tato vzdálenost souvislost s rezonančním převýšením citlivostní funkce. Na frekvenci, na které je tato vzdálenost nejmenší, bude ležet maximum rezonančního převýšení M_s (viz.obr.2.8) citlivostní funkce o velikosti

$$M_s = \frac{1}{l}, \tag{2.3}$$

kde l je vzdálenost nejbližšího bodu Nyquistovy charakteristiky otevřené smyčky od kritického bodu $\{-1\}$.



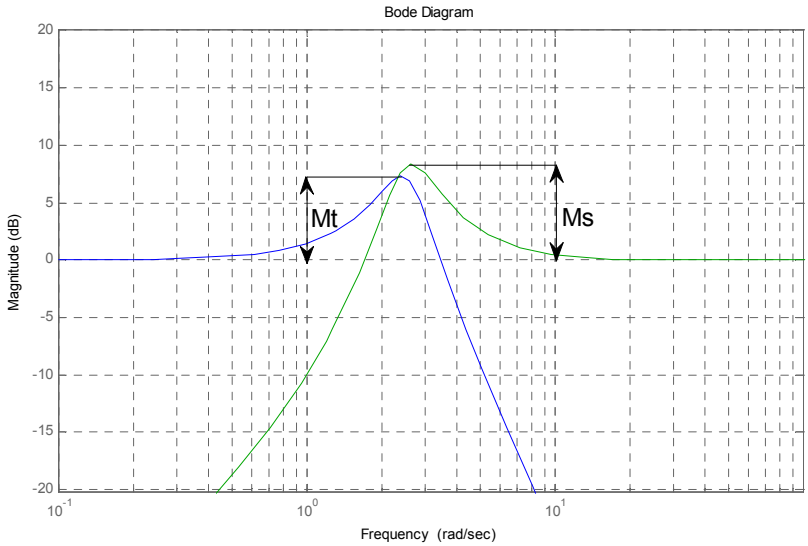
obr.2.7 *– Nyquistova charakteristika otevřené smyčky*

Stejně tak rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce souvisí s Nyquistovou charakteristikou otevřené smyčky. Jeho maximum M_t (viz.obr.2.8) je na frekvenci, kde se na Nyquistově charakteristice nachází bod, který leží na kružnici o poloměru

$$r_0 = \frac{M_t}{M_t^2 - 1} \tag{2.4}$$

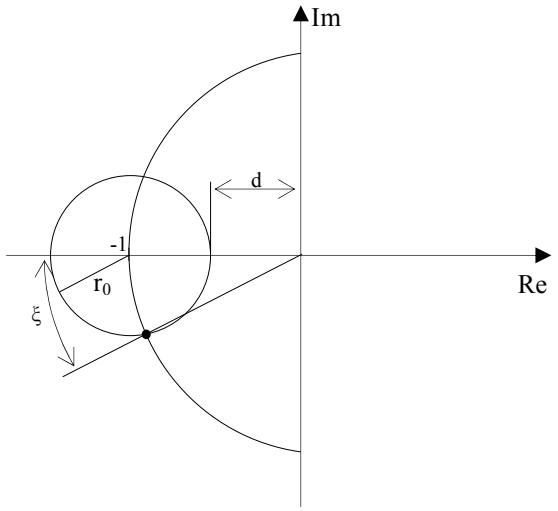
a se středem v bodě

$$p = -\frac{M_t^2}{M_t^2 - 1}. \tag{2.5}$$



obr.2.8 *– Amplitudová frekvenční charakteristika citlivostní a komplementární citlivostní funkce*

Pomocí maximálního rezonančního převýšení citlivostní M_s a komplementární citlivostní funkce M_t můžeme navrhnout regulátory, které nám splní požadavky na tyto hodnoty. Vhodnou volbou M_s můžeme zajistit i určitou minimální amplitudovou a fázovou bezpečnost, lépe řečeno najdeme M_s takové, které nám jejich požadované hodnoty zajistí (viz.obr.2.9).



obr.2.9 *– Zajištění minimální amplitudové a fázové bezpečnosti*

Při návrhu určíme maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce M_s. Průběh otevřené smyčky pak musíme vytvarovat tak, aby se vyhnul kružnici se středem v kritickém bodě $\{-1\}$ a poloměrem

$$r_0 = \frac{1}{M_s}. \tag{2.6}$$

V tomto případě máme zaručenou minimální amplitudovou bezpečnost

$$GM_{\min} = \frac{1}{d} = \frac{1}{1-r_0} = \frac{M_s}{M_s - 1}, \tag{2.7}$$

kde d je znázorněno na obr.2.9.

Stejně tak máme zaručenou minimální fázovou bezpečnost

$$PM_{\min} = \xi = 2\arcsin\frac{r_0}{2} = 2\arcsin\frac{1}{2M_s}, \tag{2.8}$$

kde úhel ξ je znázorněn na obr.2.9.

Podobně při určení maximálního rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce M_t musíme průběh otevřené smyčky vytvarovat tak, aby se vyhnul kružnici se středem v bodě p podle rovnice (2.5) a o poloměru r_0 podle rovnice (2.4), což nám zaručí minimální amplitudovou bezpečnost

$$GM_{\min} = \frac{1}{d} = \frac{1}{-r_0 - p} = \frac{1}{-\frac{M_t}{M_t^2 - 1} + \frac{M_t^2}{M_t^2 - 1}} = 1 + \frac{1}{M_t}. \tag{2.9}$$

Stejně tak máme zaručenou fázovou bezpečnost

$$PM_{\min} = \xi = 2\arcsin\frac{1}{2M_t}. \tag{2.10}$$

Rovnice (2.10) je shodná, až na proměnnou, s rovnicí (2.8), jelikož kružnice se středem v bodě p podle rovnice (2.5) a o poloměru r_0 podle rovnice (2.4) má shodný průsečík s jednotkouvou kružnicí, jako kružnice o poloměru r_0 podle rovnice (2.6) a se středem v bodě $\{-1\}$.

Využití těchto specifikací je velice výhodné pro návrh regulátorů, jelikož umožňují jak splnění požadavků na přechodový děj, tak mají možnost vlivu na případné poruchy, a zároveň lze jimi zaručit požadavky na bezpečnosti.

3 Postup návrhu regulátoru

Postup bude spočívat v nalezení množiny všech PID regulátorů, které na určité frekvenci budou zajišťovat dané maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce, což bude mít vliv na potlačení poruch, a dále nalezení množiny všech PID regulátorů, které na jiné určité frekvenci budou zajišťovat dané maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce, což bude mít vliv na překmit přechodové charakteristiky, jelikož ten je svázán s rezonančním převýšením frekvenční charakteristiky. Z těchto dvou množin poté můžeme vybrat regulátory, které budou zajišťovat oba požadavky. V případě, že takovéto regulátory nebudou existovat, je třeba vzájemně upravit požadavky na jednotlivá rezonanční převýšení.

3.1 Rezonanční převýšení citlivostní funkce

Pro přenos

$$G_p(j\omega) = r(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \tag{3.1}$$

kde $r(\omega)$ a $\phi(\omega)$ jsou amplituda a fáze frekvenční charakteristiky procesu, hledáme vhodnou množinu PID regulátorů s přenosem

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\,, \tag{3.2}$$

kde k_p, k_i a k_d jsou proporcionální, integrační a derivační konstanty PID regulátoru.

Pro výpočet daných parametrů regulátorů použijeme drobnou substituci

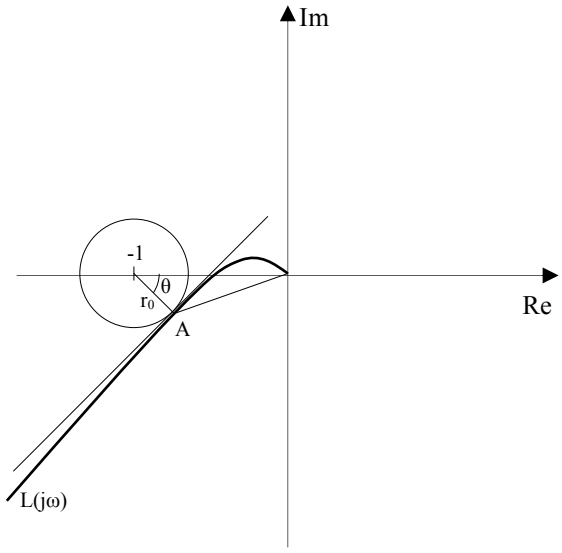
$$\phi(\omega) = \phi_r(\omega) - \pi \tag{3.3}$$

do rovnice (3.1), která nám usnadní orientaci, jelikož se pohybujeme hlavně ve III.kvadrantu komplexní roviny. Rovnice pro vyjádření průběhu otevřené smyčky bude potom vypadat takto:

$$L(j\omega) = G_p(j\omega)\cdot G_c(j\omega) = r(\omega)e^{j(\phi_r(\omega)-\pi)}\left(k_p + j\left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\right). \tag{3.4}$$

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, pro získání daného maximálního rezonančního převýšení citlivostní funkce M_s se musí průběh Nyquistovy charakteristiky otevřené smyčky vyhnout kruhu vymezeného kružnicí, se středem v kritickém bodě $\{-1\}$ a poloměrem

$$r_0 = \frac{1}{M_s}. \tag{3.5}$$



obr.3.1 *– Průběh Nyquistovy charakteristiky otevřené smyčky*

Předpokládejme, že křivka se dotýká kružnice tečně v bodě A. Podmínku, že smyčka přenosové funkce tímto bodem prochází můžeme s drobnou úpravou podle [1] zapsat takto:

$$r(\omega)e^{j(\phi_r(\omega)-\pi)}\left(k_p + j\left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\right) = p + r_0\cos\theta - jr_0\sin\theta, \tag{3.6}$$

kde r_0 a θ jsou definovány na obr.3.1 a p je střed vymezující kružnice, v tomto případě $p = -1$. Rozdělením reálné a imaginární části této rovnice získáme:

$$-k_p r(\omega)\cos\phi_r(\omega) - k_i\frac{r(\omega)}{\omega}\sin\phi_r(\omega) + k_d\omega r(\omega)\sin\phi_r(\omega) = p + r_0\cos\theta \tag{3.7}$$

$$-k_p r(\omega)\sin\phi_r(\omega) + k_i\frac{r(\omega)}{\omega}\cos\phi_r(\omega) - k_d\omega r(\omega)\cos\phi_r(\omega) = -r_0\sin\theta. \tag{3.8}$$

Směrnici tečny k průběhu získáme derivací přenosu otevřené smyčky v určitém bodě pro určitou frekvenci:

$$\frac{dL(j\omega)}{d\omega} = r(\omega)e^{j(\phi_r(\omega)-\pi)}\left(k_p\frac{r'(\omega)}{r(\omega)} - \left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\phi_r'(\omega) + \right.$$
$$\left. + j\left(k_p\phi_r'(\omega) + \left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\frac{r'(\omega)}{r(\omega)} + k_d + \frac{k_i}{\omega^2}\right)\right), \tag{3.9}$$

kde $r'(\omega)$ a $\phi_r'(\omega)$ jsou derivace amplitudy přenosu a fáze přenosu posunuté o $-\pi$. V případě, že chceme, aby tato tečna byla i tečnou k výše zmiňované kružnici, tak podle [1]

$$\arg\frac{dL(j\omega)}{d\omega} = \frac{\pi}{2} - \theta, \text{ tj.} \tag{3.10}$$

$$\phi_r(\omega) - \pi + \arctan\frac{k_p\phi'(\omega) + \left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\frac{r'(\omega)}{r(\omega)} + k_d + \frac{k_i}{\omega^2}}{k_p\frac{r'(\omega)}{r(\omega)} - \left(k_d\omega - \frac{k_i}{\omega}\right)\phi'(\omega)} = \frac{\pi}{2} - \theta. \tag{3.11}$$

Rovnici (3.11) můžeme zjednodušit na

$$ak_p + bk_i + ck_d = 0 \tag{3.12}$$

kde

$$a = \phi_r'(\omega) - \frac{r'(\omega)}{r(\omega)}\operatorname{cotan}(\theta + \phi_r(\omega)) \tag{3.13}$$

$$b = \frac{1}{\omega^2} - \frac{r'(\omega)}{\omega r(\omega)} - \frac{\phi_r'(\omega)}{\omega}\operatorname{cotan}(\theta + \phi_r(\omega)) \tag{3.14}$$

$$c = 1 + \frac{\omega r'(\omega)}{r(\omega)} + \omega\phi_r'(\omega)\operatorname{cotan}(\theta + \phi_r(\omega)). \tag{3.15}$$

Tím jsme získali tři rovnice (3.7), (3.8) a (3.12) o pěti neznámých k_p, k_i, k_d, θ a ω. Dvě z těchto neznámých můžeme použít jako proměnné, za které budeme dosazovat, čímž získáme tři rovnice o třech neznámých. Nejvhodnější bude použít jednu z konstant regulátoru jako parametr těchto rovnic a zbylé dvě konstanty budeme hledat jako funkci proměnné frekvence ω. Pro určitou hodnotu frekvence ω získáme určitou hodnotu zbylých dvou konstant regulátoru. Na této frekvenci dojde k tečnému

kontaktu Nyquistovy charakteristiky s kružnicí o poloměru r_0 a k rezonančnímu převýšení frekvenční charakteristiky o velikosti M_s. Jako proměnný parametr zvolíme konstantu derivační složky k_d a budeme hledat dvojice proporcionálních a integračních konstant k_p a k_i. Z rovnic (3.7) a (3.8) můžeme vyjádřit k_p a k_i jako funkci $\sin\theta$:

$$k_p = \frac{r_0 \sin\phi_r}{r(\omega)}\sin\theta - \frac{r_0\cos\phi_r}{r(\omega)}\sqrt{1-\sin^2\theta} - \frac{p\cos\phi_r}{r(\omega)} \tag{3.16}$$

$$k_i = \frac{-r_0\omega\cos\phi_r}{r(\omega)}\sin\theta - \frac{r_0\omega\sin\phi_r}{r(\omega)}\sqrt{1-\sin^2\theta} - \frac{p\omega\sin\phi_r}{r(\omega)} + k_d\omega^2 . \tag{3.17}$$

Při dosazení rovnic (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) a (3.17) do rovnice (3.12) získáme po úpravách rovnici ve tvaru:

$$A\sin^4\theta + B\sin^3\theta + C\sin^2\theta + D\sin\theta + E = 0 , \tag{3.18}$$

kde A, B, C, D a E jsou pro určitou frekvenci ω konstanty:

$$A = r_0^2 r^2(\omega) \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} B = {} & 2pr_0\omega r^2(\omega)\phi_r'(\omega)\left(\cos^2\phi_r(\omega) - \sin^2\phi_r(\omega)\right) - 4k_d r_0\omega r^3(\omega)\cos\phi_r(\omega) + \\ & + 2pr_0 r(\omega)\sin\phi_r(\omega)\cos\phi_r(\omega)\left(r(\omega) - 2\omega r'(\omega)\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} C = {} & 2r_0^2\omega r(\omega)r'(\omega)\left(\sin^2\phi_r(\omega) - \cos^2\phi_r(\omega)\right) + \\ & + p^2 r^2(\omega)\left(\omega^2\phi_r'^2(\omega) + 2\omega\phi_r'(\omega)\sin\phi_r(\omega)\cos\phi_r(\omega)\right) + \\ & + r^2(\omega)\sin^2\phi_r(\omega)\left(p^2 - 2r_0^2\right) - p^2 2\omega r(\omega)r'(\omega)\sin^2\phi_r(\omega) + \\ & + p^2\omega^2 r'^2(\omega) - 4pk_d\omega r^3(\omega)\sin\phi_r(\omega) + \\ & + 4k_d\omega^2 r^2(\omega)\left(-pr(\omega)\phi_r'(\omega)\cos\phi_r(\omega) + k_d r^2(\omega) + pr'(\omega)\sin\phi_r(\omega)\right) + \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} D = {} & 2pr_0\omega r(\omega)\phi_r'(\omega)\left(r(\omega)\sin^2\phi_r(\omega) - \omega r'(\omega)\right) + \\ & + 2pr_0 r(\omega)\left(\omega r'(\omega)\sin\phi_r(\omega)\cos\phi_r(\omega) - r(\omega)\sin^3\phi_r(\omega)\cos\phi_r(\omega)\right) \\ & + 4k_d r_0\omega r^2(\omega)\cos\phi_r(\omega)\left(r(\omega)\sin^2\phi_r(\omega) + \omega r'(\omega)\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} E = {} & \left(r_0^2 - p^2\right)\left(r^2(\omega)\sin^4\phi_r(\omega) + \omega^2 r'^2(\omega) - 2\omega r(\omega)r'(\omega)\sin^2\phi_r(\omega)\right) + \\ & + 4k_d\omega r^2(\omega)\sin\phi_r(\omega)\left(-p\omega r'(\omega) - k_d\omega r^2(\omega)\sin\phi_r(\omega)\right) + \\ & + 4pk_d\omega r^3(\omega)\sin^3\phi_r(\omega). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Při řešení našeho problému omezíme úhel θ pouze na rozsah $\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$, to znamená, že po vyřešení rovnice (3.18) využijeme pouze reálné kořeny $\sin\theta$ v rozsahu $\langle 0;1\rangle$. Pomocí těchto kořenů vypočteme podle (3.16) a (3.17) dvojice proporcionálních a integračních konstant k_p a k_i pro danou frekvenci ω a daný proměnný parametr derivační konstanty k_d. Z těchto dvojic využijeme pouze ty, jejichž hodnoty jsou větší nebo rovny nule. Z těchto výsledků vyneseme graf závislostí k_i na k_p pro jednotlivá k_d. V případě, že jedna nebo dvě z konstant k_p, k_i a k_d budou rovny nule, jedná se o příslušný regulátor typu PI, PD, P, I nebo D.

3.2 Rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce

V případě zajištění určitého maximálního rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce M_t je také třeba vytvarovat Nyquistovu charakteristiku otevřené smyčky tak, aby se vyhnula kružnici, která je ovšem oproti předchozímu případu určena podle [2] středem

$$p = -\frac{M_t^2}{M_t^2 - 1} \tag{3.24}$$

a poloměrem

$$r_0 = \frac{M_t}{M_t^2 - 1}, \tag{3.25}$$

kde M_t je velikost rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce na určité frekvenci ω.

Stejně jako v předchozím případě získáme graf závislostí k_i na k_p pro jednotlivá k_d. Při spojení s grafem z předchozí části můžeme pak najít regulátory splňující požadavky na M_s a M_t zároveň. Z nich potom můžeme vybrat regulátor, který na řízenou soustavu použijeme.

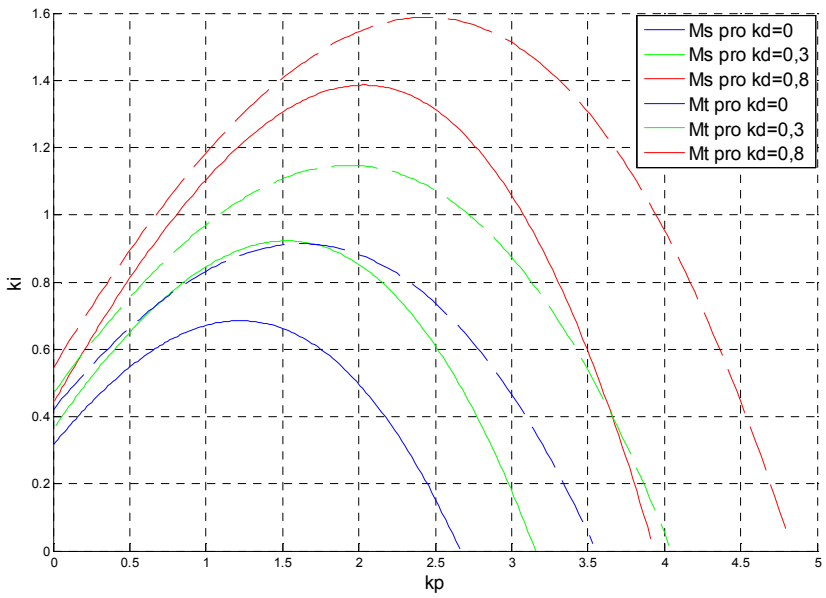
4 Příklady

4.1 Systém 3.řádu

Nechť přenos regulovaného systému je

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}. \tag{4.1}$$

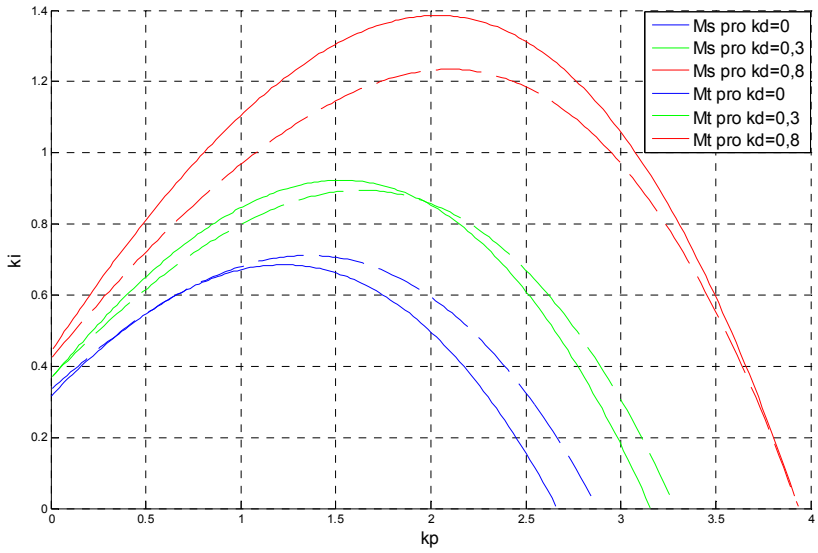
Pro hledání vhodného regulátoru zvolíme maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce $M_s = 2$ a maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce $M_t = 2$. Pro hledání množiny všech regulátorů musíme ještě zvolit parametr k_d. Zvolíme např. tři hodnoty, pro které budeme hledat hodnoty k_p a k_i, $k_d = \{0;0{,}3;0{,}8\}$. Použitím naprogramovaného algoritmu postupu návrhu v MATLABU získáme graf (viz.obr.4.1).



obr.4.1 *– Graf závislosti k_i na k_p*

Na obr.4.1 je znázorněna závislost k_i na k_p pro jednotlivá k_d. Plnou čarou jsou znázorněny regulátory, které zajišťují maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce M_s. Přerušovanou čarou jsou znázorněny regulátory, které zajišťují maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce M_t. Jak je vidět z grafu, pro daný přenos $G_s(s)$ neexistuje žádný regulátor, který by zajistil oba tyto požadavky najednou. Je proto třeba tyto požadavky upravit tak, aby je bylo možné splnit.

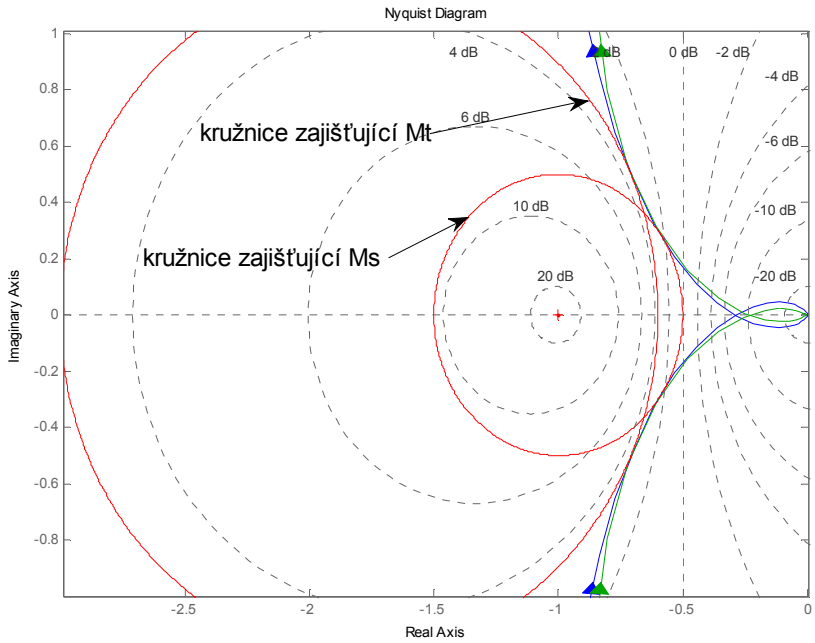
Změníme hodnotu maximálního rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce na $M_t = 1{,}5$, čímž získáme nový graf (viz.obr.4.2).



obr.4.2 *- Graf závislosti k_i na k_p*

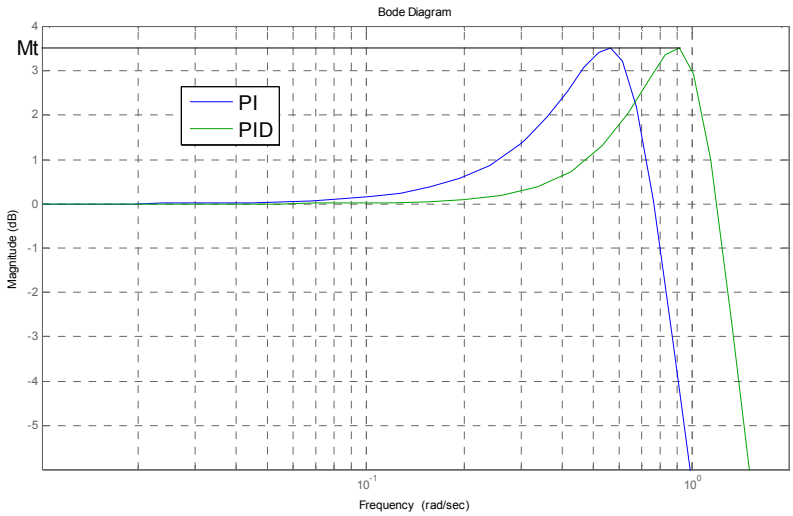
Na obr.4.2 vidíme, že po změně požadavku na M_t se podařilo najít několik regulátorů, které požadavky zajišťují. Na grafu je vidět několik regulátorů v místech kde se plné a přerušované čáry jednotlivých barev protínají. Jsou to dva regulátory typu PI, tedy pro $k_d = 0$, a dva regulátory typu PID pro $k_d = 0{,}3$.

Regulátory PI mají konstanty $k_p = 0{,}464$, $k_i = 0{,}534$, a druhý $k_p = 0{,}686$, $k_i = 0{,}607$. Nalezené PID regulátory s konstantou $k_d = 0{,}300$ mají ostatní konstanty $k_p = 0{,}037$, $k_i = 0{,}039$, a druhý $k_p = 1{,}950$, $k_i = 0{,}867$. Z těchto regulátorů vybereme ty, které mají největší integrační složku. Použijeme tedy regulátor PI s konstantami $k_p = 0{,}686$, $k_i = 0{,}607$, a regulátor PID s konstantami $k_p = 1{,}950$, $k_i = 0{,}867$ a $k_d = 0{,}300$ .Chování systému s jejich použitím prozkoumáme.



obr.4.3 *– Nyquistova charakteristika otevřené smyčky*

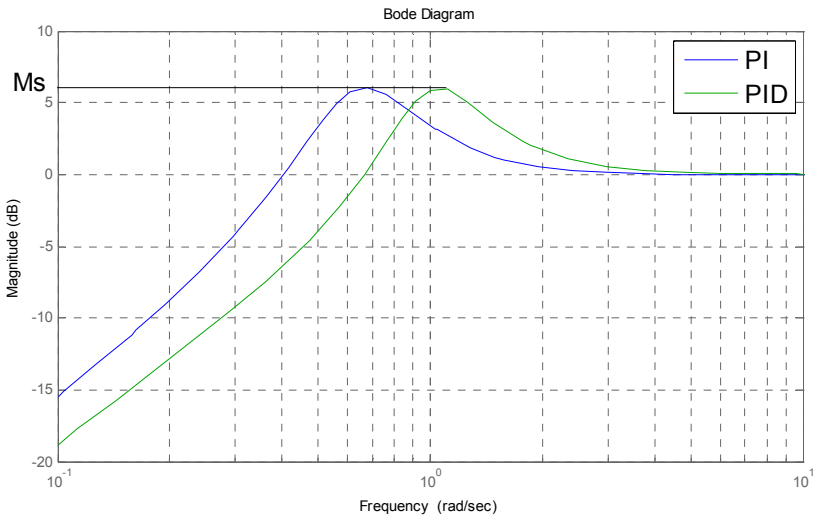
Jak je vidět na obr.4.3, oba vybrané regulátory zajišťují podmínku vytvarovat průběh Nyquistovy charakteristiky tak, aby se vyhnul kružnici zajišťující maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce a zároveň kružnici zajišťující maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce.



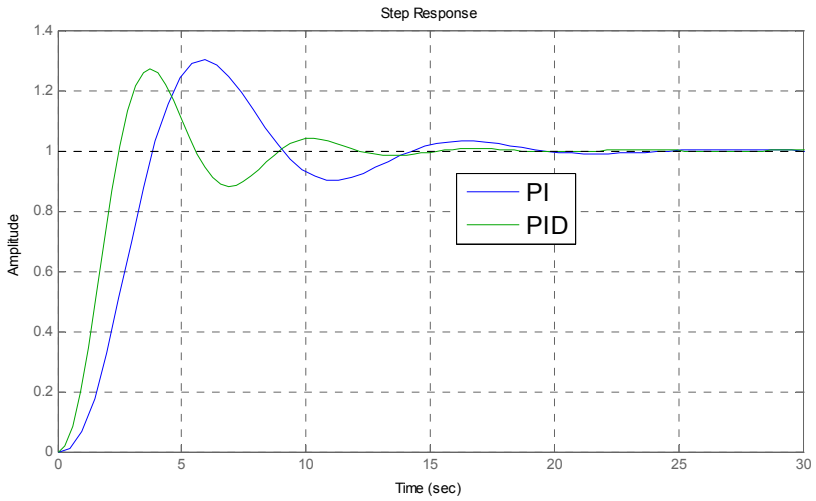
obr.4.4 *– Amplitudová frekvenční charakteristika komplementární citlivostní funkce*

Na obr.4.4 je vidět, že regulátory zajistili žádané maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce $M_t = 3{,}5dB \cong 1{,}5$, a že PID regulátor zajistil větší šířku přenášeného pásma než PI regulátor.
Stejně tak na obr.4.5 je vidět, že regulátory zajistili žádané maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce $M_s = 6dB \cong 2$, a že PID regulátor zajistil větší šířku pásma nepřenášených frekvencí.

Z těchto poznatků vidíme, že vhodnějším pro řízení systému bude zvolený PID regulátor, než PI regulátor. PID regulátor zajišťuje větší šířku přenášeného pásma komplementární citlivostní funkce a tudíž rychlejší odezvu systému, což potvrzuje přechodová charakteristika (viz.obr.4.6). Stejně tak PID regulátor má větší šířku pásma potlačených frekvencí citlivostní funkce a dokáže tedy více potlačit poruchy.

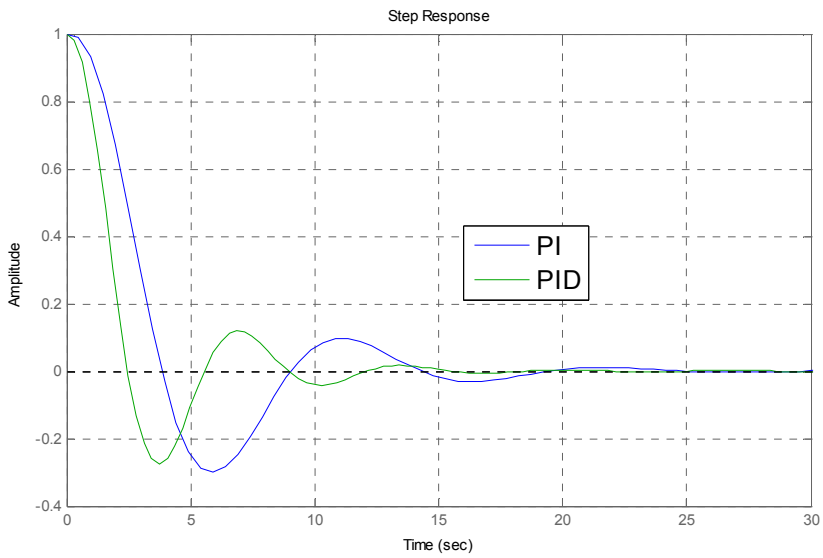


obr.4.5 *– Amplitudová frekvenční charakteristika citlivostní funkce*



obr.4.6 *– Přechodová charakteristika*

Z přechodové charakteristiky (viz.obr.4.6) je vidět, jak již bylo řečeno, že PID regulátor zajistil lepší odezvu, tedy kratší dobu náběhu a dobu ustálení, stejně jako menší překmit přechodové charakteristiky.



obr.4.7 *– Reakce systému na poruchu*

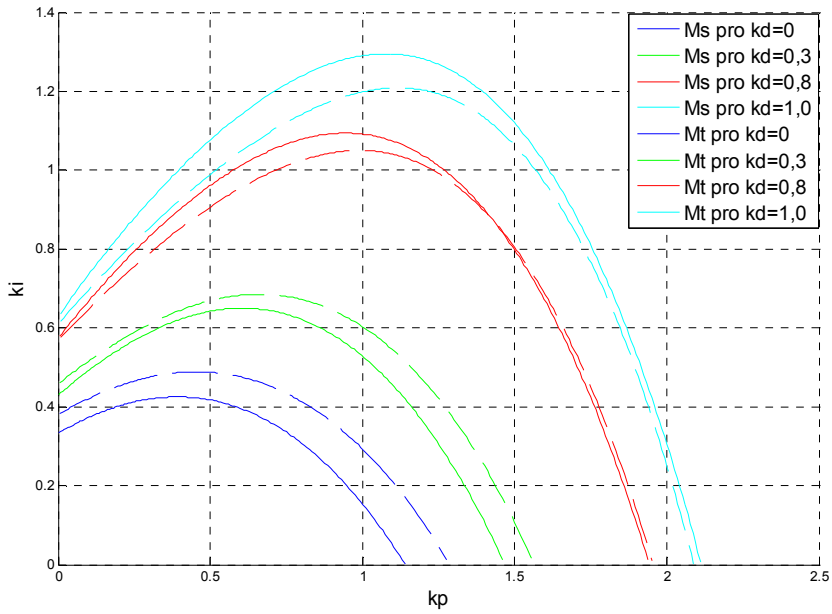
Z této přechodové charakteristiky vychází i reakce systému na poruchu (viz.obr.4.7). Z ní je vidět, že lepší potlačení poruch zajišťuje PID regulátor. Potlačení zajistí v kratší době a s menším překmitem.

4.2 Kmitavý systém 3.řádu

Nechť přenos regulovaného systému je

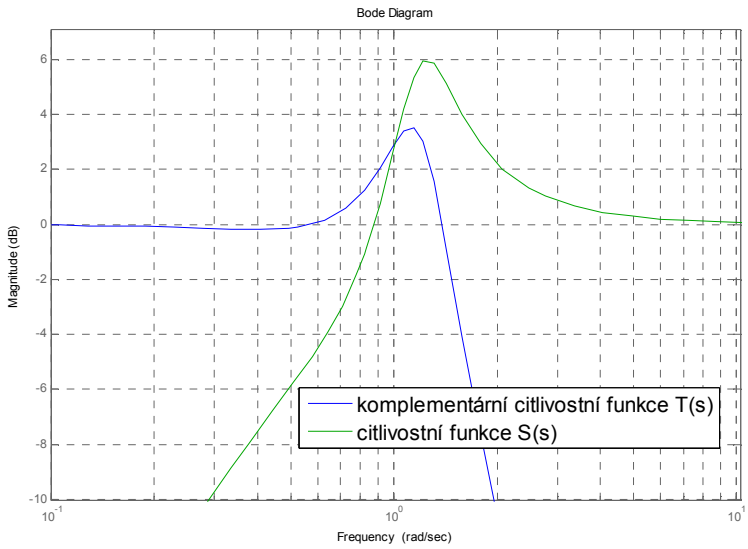
$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}. \tag{4.2}$$

Hodnoty rezonančních převýšení ponecháme stejné, jako v předchozím příkladě, tedy $M_s = 2$ a $M_t = 1{,}5$. Parametr k_d rozšíříme oproti předchozímu příkladu o hodnotu $k_d = 1{,}000$. Použitím algoritmu dostaneme graf na obr.4.8.



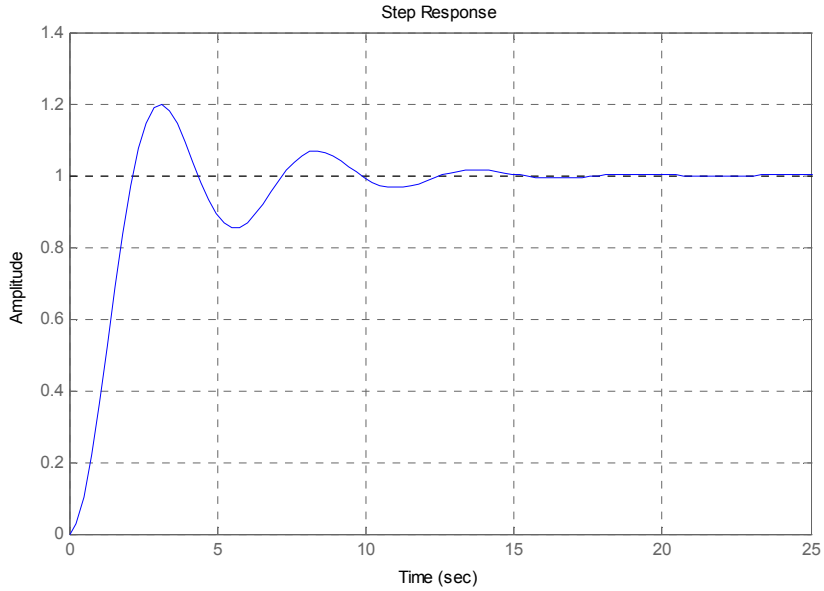
obr.4.8 *- Graf závislosti k_i na k_p*

Z grafu (viz.obr.4.8) získáme pouze jeden PID regulátor, jehož konstanty jsou $k_p = 1{,}438$, $k_i = 0{,}864$ a $k_d = 0{,}800$.

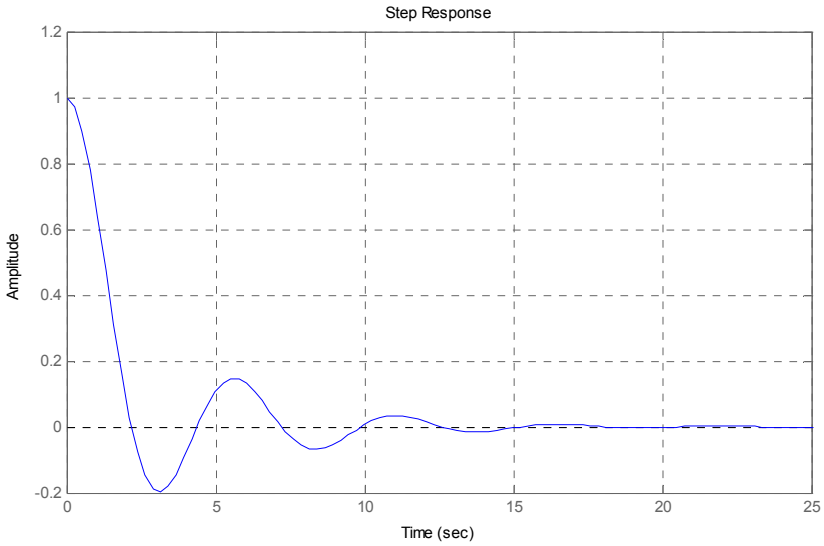


obr.4.9 *– Amplitudová frekvenční charakteristika citlivostních funkcí*

Na frekvenčních charakteristikách komplementární citlivostní funkce a citlivostní funkce (viz.obr.4.9) vidíme, že požadavky na obě hodnoty jsou splněny. Pro zajímavost, ještě průběh přechodové charakteristiky (viz.obr.4.10) a reakce systému na poruchu (viz.obr.4.11).



obr.4.10 *– Přechodová charakteristika*



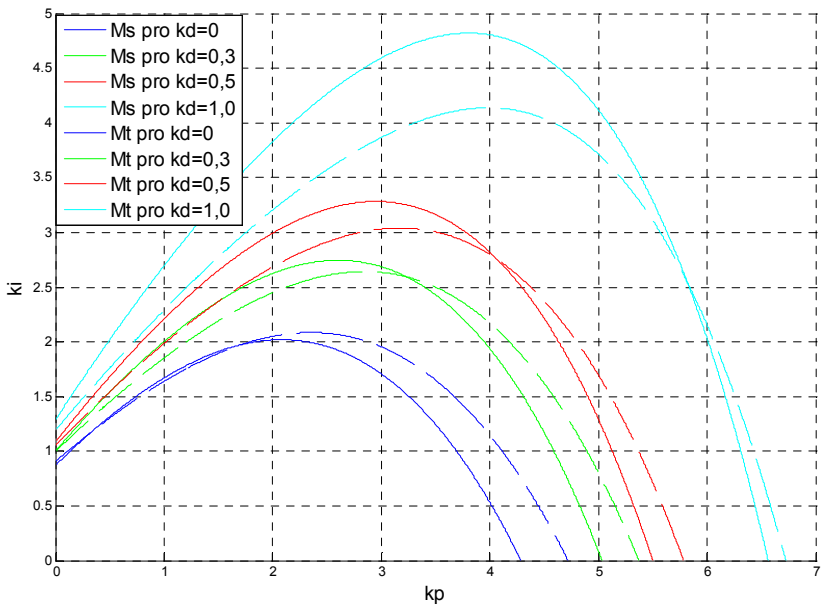
obr.4.11 *– Reakce systému na poruchu*

4.3 Systém 4.řádu

Nechť přenos regulovaného systému je

$$G_p(s) = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+10)}. \tag{4.3}$$

Hodnoty rezonančních převýšení opět ponecháme stejné $M_s = 2$ a $M_t = 1{,}5$. Parametry k_d lehce pozměníme na $k_d = \{0;0{,}3;0{,}5;1{,}0\}$. Použitím algoritmu dostaneme graf na obr.4.12.

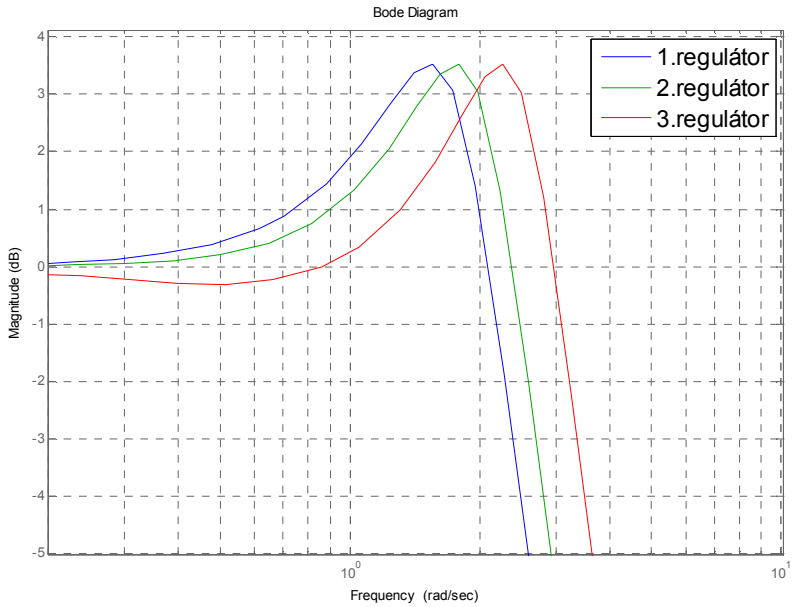


obr.4.12 *- Graf závislosti k_i na k_p*

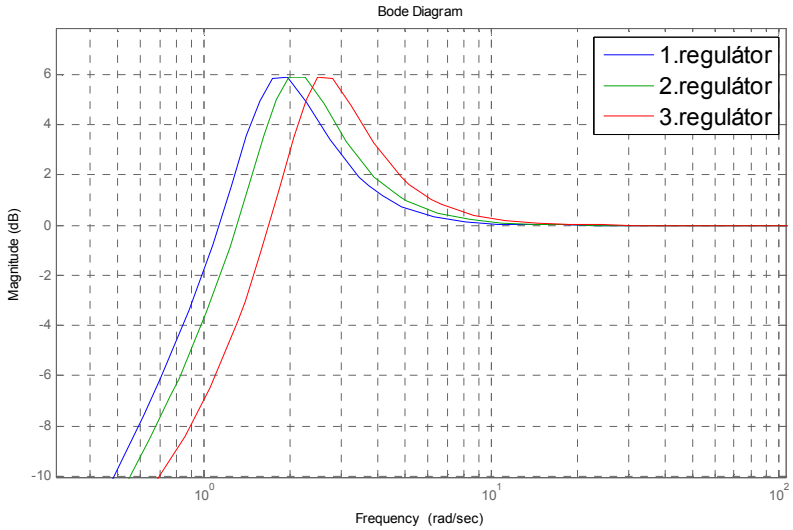
Z grafu na obr.4.12 je patrné, že regulátorů se nabízí hned několik. Vybereme tři regulátory, které mají největší integrační složku. První regulátor má konstanty $k_p = 3{,}237$, $k_i = 2{,}593$, $k_d = 0{,}300$, druhý regulátor má konstanty $k_p = 4{,}067$, $k_i = 2{,}756$, $k_d = 0{,}500$, a třetí regulátor $k_p = 5{,}817$, $k_i = 2{,}548$, $k_d = 1{,}000$.

Na frekvenčních charakteristikách (viz.obr.4.13 a obr.4.14) vidíme, že všechny regulátory zajišťují požadované hodnoty. Z hlediska pásma

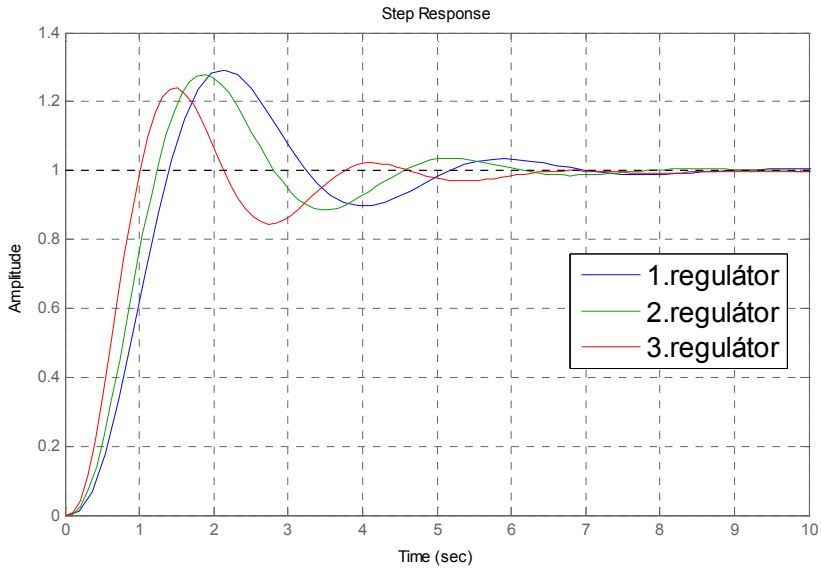
propouštěných a nepropouštěných frekvencí se jeví jako nejvhodnější třetí regulátor, tedy s největší derivační složkou.



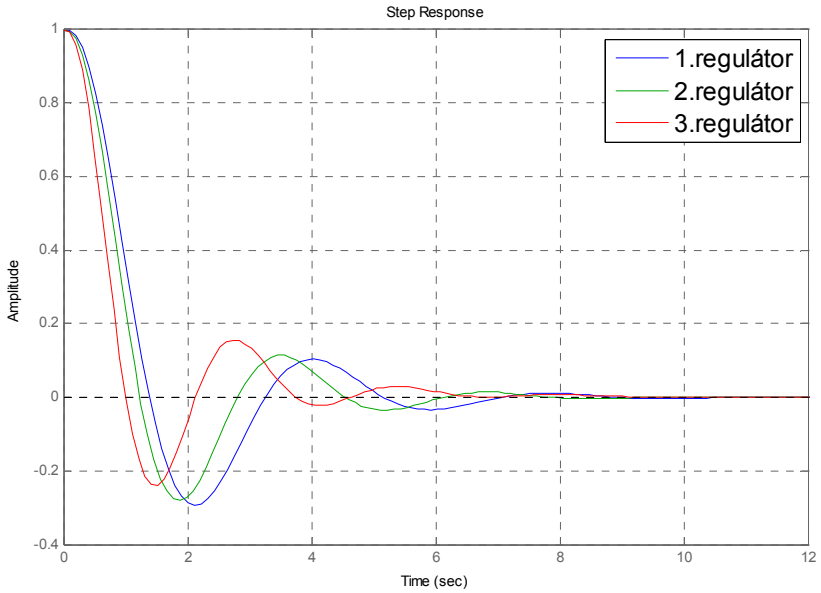
obr.4.13 *– Amplitudová frekvenční charakteristika komplementární citlivostní funkce*



obr.4.14 *– Amplitudová frekvenční charakteristika citlivostní funkce*



obr.4.15 *– Přechodová charakteristika*



obr.4.16 *– Reakce systému na poruchu*

Z přechodové charakteristiky vidíme, že doba náběhu i překmit jsou nejkratší pro třetí regulátor. Lepší dobu ustálení má ovšem druhý regulátor, ovšem rozdíl je zanedbatelný. I v případě poruchy, má nejlepší reakci třetí regulátor.

5 Závěr

Cílem této práce bylo vytvoření procedur v prostředí MATLAB, které umožní grafický návrh PID regulátorů zajišťující nejvyšší povolené rezonanční převýšení citlivostní funkce. Tato metoda nám poskytla množinu všech regulátorů, které toto dané maximální převýšení zajišťují.

Pro určení vhodného regulátoru z této množiny, byla tato metoda rozšířena o určení nejvyššího povoleného rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce. Tím jsme získali další množinu všech regulátorů, které zajistili toto převýšení.

Z těchto množin jsme vybrali regulátory, které zajistili tato převýšení současně. Pro tyto jednotlivé regulátory nám frekvenční charakteristiky citlivostních a komplementárních citlivostních funkcí a přechodové charakteristiky poskytly informace o jejich vlivech na regulovaný systém (rychlost a kvalita odezvy, pásmo potlačovaných frekvencí citlivostní funkce, atd.) . Podle nich je možné vybrat nejvhodnější regulátor.

Výhodnost použití této metody je v přesném určení maximálních rezonančních převýšení, které regulátory zajistí. Parametrem pro citlivostní funkci určujeme vliv poruch na soustavu a parametrem pro komplementární citlivostní funkci průběh odezvy systému.

Nevýhodou může být potřeba parametru jedné z konstant regulátoru. Použitím vhodného rozšiřujícího algoritmu by ovšem bylo možné prohledat větší množství regulátorů a tuto nevýhodu tak odstranit.

Literatura

[1] K.J.Aström, T.Hägglund: PID Controllers: Theory, Design and Tuning
ISA – The Instrumentation, Systém, and Automation Society, 1995

[2] J.L.Guzman, K.J.Aström, S.Dormido, T.Hägglund, M.Berenguel, Y.Piguet: Odborný článek – Interactive Learning Modules for PID Control
IEEE Control Systems Magazine, 2008

[3] G.F.Franklin, J.D.Powell, A.Emami-Naeini: Feedback Control of Dynamic Systems
Prentice Hall, 2006

[4] M.Šebek: Slajdy přednášek předmětu Systémy a řízení – X35SRI
M.Šebek – ČVUT, 2007

Přílohy

Obsah přiloženého CD:

bp_2009_battek_tomas.pdf – text práce v elektronické podobě

Procedury prostředí MATLAB:

citatelimag.m – vrací vektor polynomu imaginární části čitatele přenosu po úpravě na reálný jmenovatel

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

citatelreal.m – vrací vektor polynomu reálné části čitatele přenosu po úpravě na reálný jmenovatel

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

frekvencerange.m – vrací sloupcový vektor frekvencí velikosti 10001, pro které budou počítány konstanty regulátorů, dle parametrů se určí rozsah prohledávaných frekvencí, vektor má lineární průběh

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení jedné z citlivostních funkcí

getmagnitude.m – vrací sloupcový vektor zesílení pro jednotlivé frekvence

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – vektor frekvencí, pro které hledáme zesílení

getmagnitudederivation.m – vrací sloupcový vektor derivací zesílení pro jednotlivé frekvence

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – vektor frekvencí, pro které hledáme derivace zesílení

getphase.m – vrací sloupcový vektor fází pro jednotlivé frekvence

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – vektor frekvencí, pro které hledáme fáze

getphasederivation.m – vrací sloupcový vektor derivací fází pro jednotlivé frekvence

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – vektor frekvencí, pro které hledáme derivace fází

hodnoty.m – vrací matici konstant pro jednotlivé frekvence potřebných k výpočtu konstant regulátoru (frekvence, zesílení na frekvenci, fáze na frekvenci, derivace zesílení na frekvenci, derivace fáze na frekvenci, sinus fáze na frekvenci posunuté o π, cosinus fáze na frekvenci posunuté o π)

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení jedné z citlivostních funkcí

jmenovatel.m – vrací vektor polynomu jmenovatele přenosu po úpravě na reálný jmenovatel

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

polyderivace.m – vrací vektor polynomu derivace polynomu v parametru

1.parametr – vektor derivovaného polynomu

run.m – procedura pro spuštění výpočtů konstant regulátorů a vykreslení společného grafu, nevrací žádný objekt

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení citlivostní funkce

4.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce

5.parametr – vektor parametrů – derivačních konstant regulátoru

vypocetkonstantS.m – procedura pro výpočet konstant regulátorů zajišťujících maximální rezonanční převýšení citlivostní funkce a vykreslení grafu závislosti integračních konstant na proporcionálních pro jednotlivé parametry – derivační konstanty regulátoru, vrací matici konstant regulátoru se sloupci (proporcionální, integrační, derivační)

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení citlivostní funkce

4.parametr – vektor parametrů – derivačních konstant regulátoru

vypocetkonstantT.m – procedura pro výpočet konstant regulátorů zajišťujících maximální rezonanční převýšení komplementární citlivostní funkce a vykreslení grafu závislosti integračních konstant na proporcionálních pro jednotlivé parametry – derivační konstanty regulátoru, vrací matici konstant regulátoru se sloupci (proporcionální, integrační, derivační)

1.parametr – vektor polynomu čitatele přenosu

2.parametr – vektor polynomu jmenovatele přenosu

3.parametr – hodnota maximálního rezonančního převýšení komplementární citlivostní funkce

4.parametr – vektor parametrů – derivačních konstant regulátoru